

COMPARAÇÃO ENTRE MÉTODOS CLÁSSICOS E EVOLUTIVO NA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LAPLACE BI-DIMENSIONAL

Lúcio Aurélio Purcina

Universidade Federal de Uberlândia - Faculdade de Engenharia Mecânica

lucioaureliop@yahoo.com.br

Sezimária de Fátima Pereira Saramago

Universidade Federal de Uberlândia - Faculdade de Matemática

saramago@ufu.br

Resumo: Tradicionalmente sistemas lineares são resolvidos por métodos diretos ou através de métodos iterativos. Porém, quando a matriz dos coeficientes perde uma das características de ser simétrica ou positivo-definida, os métodos diretos perdem a eficiência, até mesmo métodos iterativos (estacionário e não estacionários), pois a convergência de tais métodos depende dos autovalores da matriz dos coeficientes. Este trabalho visa comparar a aplicação de algumas técnicas na solução de grandes sistemas lineares. Com esta finalidade, são testados métodos iterativos não-estacionários clássicos (Gradientes Conjugados, Resíduos Mínimos, Gradientes BiConjugados) e o método de otimização evolutivo conhecido como Evolução Diferencial. Nesta pesquisa é considerado o problema da equação de Laplace bi-dimensional, fazendo-se uma comparação entre solução analítica com as soluções numéricas obtidas através dos métodos citados.

Palavras-chave: Sistemas Lineares, Métodos Iterativos, Evolução Diferencial.

1. INTRODUÇÃO

Praticamente todos os campos da engenharia e também de outras ciências aplicadas, como física e química, necessitam da solução de sistemas lineares algébricos. Temas como: análise estrutural, escoamento de fluidos, transferência de calor, aerodinâmica, entre outros, utilizam fortemente a solução de tais sistemas como parte integrante da modelagem destes fenômenos. Dependendo do modelo matemático usado para representar o fenômeno, os sistemas lineares serão de elevada dimensão. As primeiras tentativas documentadas de solução de sistemas lineares aparecem no século XIX (Jacobi, 1845). O tema continua ainda extremamente rico e é possível encontrar publicações recentes sobre o tema, como em (Eberly, 2006).

Os sistemas lineares podem, de forma geral, ser resolvidos pelos seguintes grupos de métodos: *Métodos Diretos* - são aqueles que permitem a obtenção da solução do sistema com um número finito e bem determinado de operações aritméticas. *Métodos Iterativos Estacionários* - Nos métodos indiretos, a partir de uma aproximação inicial, procura-se a solução do sistema utilizando um processo iterativo. *Métodos Iterativos Não-Estacionários* (Barret et al., 1994) - Estes métodos se baseiam na teoria de otimização, assim procura-se o mínimo seguindo uma direção de busca bem definida, a cada iteração caminham sempre na direção correta da solução, o que justifica o nome não-estacionário.

Técnicas de otimização têm sido muito utilizadas para solucionar problemas que necessitam da determinação de pontos extremos. Entre estes problemas pode-se incluir a solução de sistemas lineares, desde que formulados adequadamente. Esta abordagem já é bastante utilizada nos métodos

iterativos não-estacionários (Barret et al., 1994). Uma grande dificuldade, inerente na maioria destes métodos, é a exigência de que a matriz dos coeficientes seja positiva definida. Além disso, alguns destes métodos possuem uma ordem de convergência muito baixa.

Com a crescente eficiência dos recursos computacionais, novas técnicas de otimização têm sido amplamente testadas (Storn & Price 1995). Entre estas novas técnicas destacam-se os métodos naturais. Assim, torna-se atraente a idéia de aplicar tais metodologias para a solução de grandes sistemas lineares. Os métodos naturais são procedimentos iterativos que tentam simular os processos usados na natureza para resolver problemas difíceis. Estes métodos se baseiam em população de indivíduos, onde cada indivíduo representa um ponto de busca no espaço das soluções candidatas de um dado problema.

Neste artigo trabalha-se como o algoritmo denominado Evolução Diferencial (ED), desenvolvido por (Storn & Price 1995), que tem sido aplicado com sucesso em vários campos da ciência, podendo ser citado entre muitos outros, o projeto de sistemas (Storn 1999), solução de sistemas lineares (Cheng & Hwang (2001), transferência de calor (Babu & Munawar, 2001), projeto manipulador de robô (Bergamaschi, Saramago & Coelho, 2005).

O objetivo deste trabalho é comparar a aplicação de alguns métodos iterativos com a técnica de otimização (ED) na solução de sistemas lineares, esparsos obtidos da resolução da equação de Laplace no plano.

2. MÉTODOS ITERATIVOS NÃO ESTACIONÁRIOS

Os métodos iterativos não estacionários diferem dos métodos estacionários devido ao fato de que os operadores matriciais que atuam sobre a aproximação da solução x^{k-1} para produzir x^k não são constantes ao longo do processo iterativo. A maioria dos métodos desta categoria derivam diretamente do método dos gradientes conjugados utilizado em problemas clássicos de otimização. Para solução iterativa de sistemas lineares o método dos gradientes conjugados foi adaptado de várias formas, podendo levar em consideração as características do sistema, principalmente se a matriz dos coeficientes é positiva definida, simétrica ou genérica (Barret et al., 1994). É possível produzir-se muitos variantes do método dos gradientes conjugados, podendo-se citar: *Gradientes Conjugados*, *Minimização de Resíduos*, *Minimização de Resíduos Generalizado* e *Gradientes Biconjugados*.

Seja o sistema de equações lineares $Ax = b$, escrito como $b - Ax = 0$, onde x é a solução desejada. Definindo:

$$r = r(x) = b - Ax \quad (1)$$

sendo x é um vetor genérico e $r(x)$ é um vetor resíduo. Se a norma de $r(x)$ for nula, significa que $r(x)$ é um vetor nulo e que x é a solução do sistema linear. Neste caso, obter a solução x implicaria em achar o zero (vetorial) de $r(x)$. Aplicando as regras de linearidade, prova-se que o resíduo $r(x)$ é linear em x e, portanto, infinitamente diferenciável, assim $r(x) \in C^\infty(R^n)$. Logo, pode-se também definir o seguinte funcional quadrático:

$$F(x) = \frac{1}{2} x^T Ax - x^T b \quad (2)$$

cujo gradiente e matriz Hessiana são dados por:

$$\nabla F(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x} = Ax - b \Rightarrow \nabla F(x) = -r(x); \quad H(x) = \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} = A \Rightarrow H(x) = A \quad (3)$$

Observe que $F(x)$ é uma forma quadrática que será sempre positiva, exceto quando x for uma solução do sistema linear, $r(x) = 0$, este ponto é também, simultaneamente, um ponto crítico de $F(x)$. Ou seja, minimizar $F(x)$ é equivalente a obter a solução do sistema linear. Assim, pode-se

aplicar algum método de minimização ao funcional $F(x)$, para obter o ponto de mínimo x , que corresponde à solução do sistema.

De acordo com a teoria de otimização para garantir que o ponto crítico x seja um ponto de mínimo a matriz Hessiana $H(x)$ deve ser *positivo-definida* e também *simétrica*, ou seja:

$$H_{ij}(x) = \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_j \partial x_i} = H_{ji}(x) \quad (4)$$

Assim, como pela Eq. (3) a matriz Hessiana é a própria matriz dos coeficientes ($H=A$), para garantir a convergência para a solução será, inicialmente, imposto que a matriz A seja *simétrica*, *positivo-definida*.

Um procedimento iterativo característico dos métodos de otimização pode ser expresso da seguinte maneira: arbitra-se a solução inicial x^0 e calcula-se o resíduo inicial $r_0 = b - Ax^0$ em seguida atualiza-se o vetor x^k .

Esta metodologia preserva a esparsidade da matriz A , pois necessita apenas de produto matriz-vetor, além das operações entre vetores.

2.1 Métodos dos Gradientes Conjugados (CG)

Este é o método de minimização clássico mais utilizado na solução de grandes sistemas lineares esparsos. O método dos Gradientes Conjugados é um dos métodos mais eficientes para solução de sistemas cuja matriz dos coeficientes é positivo-definida e simétrica. Seu procedimento básico consiste em gerar uma sequência de soluções aproximadas, obter os resíduos correspondentes e as direções de busca usadas para atualizar as soluções e os resíduos. A cada iteração, são executados dois produtos internos para calcular os escalares de atualização, definidos de forma que a sequência satisfaça certas condições de ortogonalidade. Em um sistema linear positivo-definido e simétrico estas condições implicam que a distância entre as aproximações obtidas em cada iteração e a verdadeira solução é minimizada em alguma norma.

As aproximações x^k e os resíduos r_k são atualizadas em cada iteração por um escalar (α_k) que multiplica o vetor de direção de busca (p_k). Já as direções de busca são atualizadas por um escalar (β_k), ou seja:

$$x^k = x^{k-1} + \alpha p_{k-1}; \quad r_k = r_{k-1} - \alpha p_{k-1}; \quad p_k = r_k + \beta_{k-1} p_{k-1}; \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

Prova-se em (Barret et al, 1994), que:

$$\alpha_k = \frac{r_{k-1}^T r_{k-1}}{p_{k-1}^T A p_{k-1}} \quad \text{e} \quad \beta_k = \frac{r_k^T r_k}{r_{k-1}^T r_{k-1}} \quad (6)$$

minimiza o valor de $r_k^T A^{-1} r_k$ e assegura que r_k e r_{k-1} são ortogonais, respectivamente.

O método de Gradiente Conjugado pode ser visto como uma variante especial do método de Lanczos (Barret et al, 1994), para sistemas positivo-definidos e simétricos. Por meio de diferentes definições do funcional $F(x)$, dado pela Eq. (2), obtêm-se diferentes variantes do método.

2.2. Método dos Resíduos Mínimos (MINRES)

O Método MINRES é uma alternativa computacional para o Método dos Gradientes Conjugados quando as matrizes dos coeficientes são simétricas, mas possivelmente não-definidas. A sequência de vetores obtida no método dos Gradientes Conjugados corresponde à uma fatoração da matriz tri-diagonal semelhante à matriz dos coeficientes. Entretanto, um desarranjo do algoritmo pode ocorrer, correspondendo ao pivô nulo, se a matriz é não-definida. Além disso, para matrizes não-definidas as propriedades de minimização do método de Gradiente Conjugado não podem ser

garantidas. O método MINRES é uma variante do método de CG que evita a fatoração LU e, portanto, não sofre desarranjo. Este método minimiza o resíduo na norma-2.

Quando A é não positivo-definida, mas simétrica, ainda pode-se construir uma base ortogonal para o subespaço de Krylov com três termos da relação de recorrência. Introduzindo a seguinte fatoração da matriz A :

$$AU = UT, \text{ com } U^T AU = U^T UT = T. \text{ Daí:} \\ u_k^T A u_k = \gamma_k; \quad u_k^T A u_{k+1} = \beta_k; \quad A u_k = \beta_k u_{k+1} + \gamma_k u_k + \beta_{k-1} u_{k-1} \quad (7)$$

Tomando na fatoração (7) $U = R$, a matriz dos vetores resíduos é dada por:

$$A r_k = \beta_k r_{k+1} + \gamma_k r_k + \beta_{k-1} r_{k-1} \quad \text{ou} \quad A R_k = R_{k+1} T_k \quad (8)$$

Sendo que todos os vetores r_k são ortogonais. Se $\beta_k = 0$ o algoritmo termina e R_k é uma base ortogonal para o subespaço de Krylov $K(r_0, A, k)$ associado. Portanto, os autovalores de T_k são os autovalores de A . O método MINRES se inicia impondo:

$$u_1 = r_0 / \|r_0\| \text{ e escolhendo } x^k \in S_k = x_0 + [u_1, u_2, \dots, u_k] \quad (9)$$

impondo a condição de ortogonalidade ao resíduo da seguinte forma:

$$u_j^T r_i = 0, j \leq i, \text{ minimiza: } \|A x^k - b\|_2 = \|A R_k y - b\|_2 = \|R_{k+1} T_k y - b\|_2 \quad (10)$$

Agora explorando o fato que se $D_{k+1} = \text{diag}(\|r_0\|_2, \|r_1\|_2, \dots, \|r_k\|_2)$, então $R_{k+1} D_{k+1}^{-1}$ é uma transformação ortonormal com respeito ao subespaço de Krylov atual:

$$\|A x^k - b\|_2 = \|D_{k+1} T_k y - \|r_0\|_2 e_1\|_2 \quad (11)$$

esta expressão final simplesmente pode ser vista como um problema de norma mínima. Outra possibilidade é resolver o sistema $T_k y = \|r_0\| e_1$, como ocorre no método de CG (T_k é a parte $k \times k$ superior de T).

2.3. Método do Gradiente Biconjugado (BiCG)

O Método dos Gradientes Conjugados, com ou sem pré-condicionamento, não é adequado para sistemas lineares onde a matriz dos coeficientes não seja simétrica, porque não é possível obter seqüências ortogonais dos vetores dos resíduos com poucas iterações.

O Método dos Gradiente Bi-Conjugados foi desenvolvido sobre outro enfoque, no qual a seqüência de resíduos ortogonais é substituída por duas seqüências mutuamente ortogonais, porém, com a desvantagem de não mais garantir a minimização do resíduo. Este é um ponto muito importante, pois conforme mostrado nos métodos dos gradientes conjugados e gradientes conjugados pré-condicionados, desconsiderando o erro de arredondamento, estes métodos garantem que, se a matriz dos coeficientes é simétrica e positivo-definida, então a norma do vetor resíduo tende a zero. O método dos gradientes bi-conjugados, e suas derivações, não baseiam-se na teoria de otimização, e sim na teoria de Lanczos, assim a minimização do resíduo não é garantida.

As fórmulas para atualização dos resíduos no Método dos Gradientes Bi-Conjugados são semelhantes às dos Método dos Gradientes Conjugados, mas baseadas em A^T ao invés de A . As duas fórmulas de atualização das seqüências dos resíduos e as direções de busca são:

$$r_k = r_{k-1} - \alpha_k A p_k, \quad \tilde{r}_k = \tilde{r}_{k-1} - \alpha_k A^T \tilde{p}_k \quad \text{e} \quad p_k = r_{k-1} + \beta_k p_{k-1}, \quad \tilde{p}_k = \tilde{r}_{k-1} + \beta_k \tilde{p}_{k-1} \quad (12)$$

Sendo que

$$\alpha_k = \frac{\tilde{r}_{k-1}^T r_{k-1}}{\tilde{p}_k^T A p_k} \text{ e } \beta_k = \frac{\tilde{r}_k^T r_k}{\tilde{r}_{k-1}^T r_{k-1}} \quad (13)$$

garantem a relação de bi-ortogonalidade.

3. EVOLUÇÃO DIFERENCIAL

Seja um problema de otimização que consiste em minimizar uma função objetivo de n variáveis de projeto, sujeita a restrições laterais. Estas restrições definem o espaço de busca viável onde se espera encontrar a solução ótima. O problema pode ser escrito como:

$$\text{Minimizar } f(X), X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T; x_i^{inf} \leq x_i \leq x_i^{sup}; i = 1, \dots, n \quad (14)$$

Muitos algoritmos evolutivos têm sido desenvolvidos para resolver tais problemas.

A Evolução Diferencial foi desenvolvida por (Storn & Price, 1995). Em sua primeira execução o algoritmo gera uma população inicial escolhida aleatoriamente, com N_p indivíduos, que deve cobrir todo o espaço de busca. Geralmente, é criada por uma distribuição de probabilidade uniforme, quando não há nenhum conhecimento sobre o problema.

A idéia principal da evolução diferencial é gerar novos indivíduos, denotados vetores modificados ou doadores, pela adição da diferença ponderada entre dois indivíduos aleatórios da população a um terceiro indivíduo. Esta operação é chamada *mutação*. Este processo que resulta o vetor doador $V^{(q+1)}$ pode ser escrito como:

$$V^{(q+1)} = X_\alpha^{(q)} + F(X_\beta^{(q)} - X_\gamma^{(q)}) \quad (15)$$

onde os índices aleatórios $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, \dots, N_p\}$ são inteiros distintos entre si e diferentes do índice d . $F \in [0, 2]$ controla a amplitude da diferença ponderada conforme representada na Figura 1.

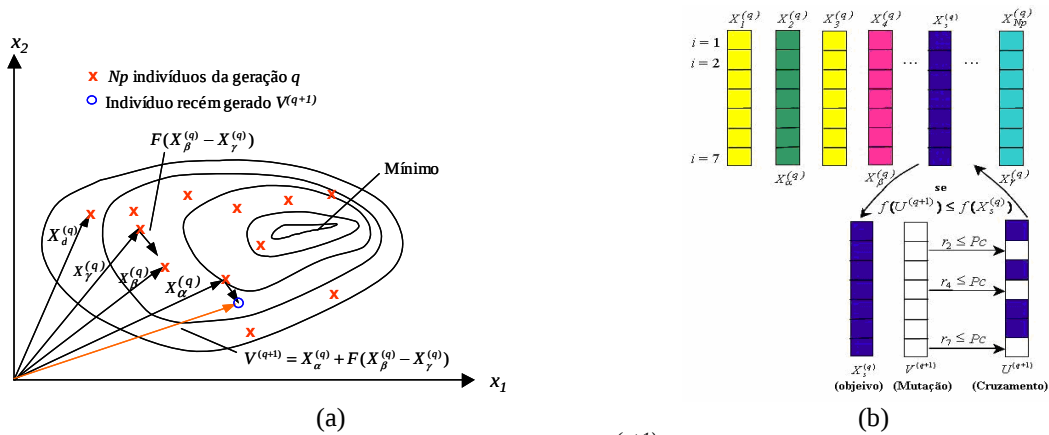


Figura 1 – (a) Processo de geração do vetor doador $V^{(q+1)}$ para uma função bidimensional.
(b) Ilustração do binômio de cruzamento.

As componentes do indivíduo doador são misturadas com as componentes de um indivíduo escolhido aleatoriamente (denotado vetor alvo), para resultar o chamado vetor tentativa, ou vetor experimental. O processo de misturar os parâmetros é referido freqüentemente como *cruzamento*, sendo dada por:

$$u_i^{(q+1)} = \begin{cases} v_i^{(q+1)}, & \text{se } r_i \leq CR \\ x_{d,i}^{(q)}, & \text{se } r_i > CR, \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (16)$$

onde r_i é um número gerado aleatoriamente com resultado no intervalo $[0, 1]$. $x_{d,i}$ são as componentes do vetor alvo $X_d^{(q)}$ e $CR \in [0, 1]$ é a probabilidade do cruzamento ocorrer.

Se o vetor experimental resultar em um valor da função objetivo menor que o vetor alvo, então o vetor experimental substitui o vetor alvo na geração seguinte. Esta última operação é chamada *seleção*. Este processo pode ser escrito como:

$$\text{Se } f(U^{(q+1)}) \leq f(X_d^{(q)}), \text{ então } X_d^{(q+1)} = U^{(q+1)}; \quad \text{Se } f(U^{(q+1)}) > f(X_d^{(q)}), \text{ então } X_d^{(q+1)} = X_d^{(q)} \quad (17)$$

O procedimento descrito é finalizado através de algum critério de parada, sendo que um número máximo de gerações deve ser estabelecido.

4. SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LAPLACE BI-DIMENSIONAL

Nesta seção, apresenta-se o problema envolvendo uma equação de Laplace, comparando a solução analítica com solução numérica.

Considere uma placa quadrada fina metálica de 1 m^2 , onde deseja-se encontrar a temperatura de equilíbrio $u(x,y)$ (após um tempo muito grande) da barra na posição x e y . Este problema é regido pela equação de Laplace e as condições de contorno a seguir:

$$\text{Equação de Laplace: } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad ; \quad \text{Condições de Dirichlet: } \begin{cases} u(x,0) = u(0,y) = 100^\circ \text{C} \\ u(x,1) = u(1,y) = 0^\circ \text{C} \end{cases} \quad (18)$$

4.1. Solução Analítica

Podemos decompor a solução de problema (18) na soma de duas funções soluções de problemas simplificados. Assim,

$$u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y) \quad (19)$$

onde as funções u_1 e u_2 são soluções, respectivamente, dos seguintes problemas:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0 ; & u_1(x,0) = 100^\circ \text{C} \\ u_1(0,y) = u_1(x,1) = u_1(1,y) = 0^\circ \text{C} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0 ; & u_2(0,y) = 100^\circ \text{C} \\ u_2(x,0) = u_2(x,1) = u_2(1,y) = 0^\circ \text{C} \end{cases} \quad (20)$$

Aplicando o método da separação de variáveis, em cada um dos problemas (20), vamos determinar funções da forma $X(x)Y(y)$, soluções dos problemas lineares homogêneos associados. Substituindo-se a expressão $X(x)Y(y)$ nas EDP (20), obtém-se:

$$X''(x) = \lambda X(x) \quad \text{e} \quad Y''(y) = -\lambda Y(y) \quad (21)$$

Resolvendo as equações (21), juntamente com as condições de contorno, obtém-se:

$$X_n(x) = C_n \sin(n\pi x) \quad \text{e} \quad Y_n(y) = 2C \sinh(n\pi(1-y)) \quad \text{com} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (22)$$

Logo as soluções são dadas por:

$$u_1(x,y) = 200 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 - \cos(n\pi)}{n\pi \cdot \sinh(n\pi)} \sin(n\pi x) \cdot \sinh(n\pi(1-y)) \right] \quad (23)$$

$$u_2(x, y) = 200 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 - \cos(n\pi)}{n\pi \cdot \text{sh}(n\pi)} \sin(n\pi y) \cdot \sinh(n\pi(1-x)) \right] \quad (24)$$

Logo a solução geral é:

$$u(x, y) = 200 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(n\pi)}{n\pi \cdot \sinh(n\pi)} [\sin(n\pi x) \sinh(n\pi(1-y)) + \sin(n\pi y) \sinh(n\pi(1-x))] \quad (25)$$

Apresenta-se, na Fig. 2, gráficos dos valores de $u(x, y)$ para os valores de $y=0.1$ e $y=0.9$.

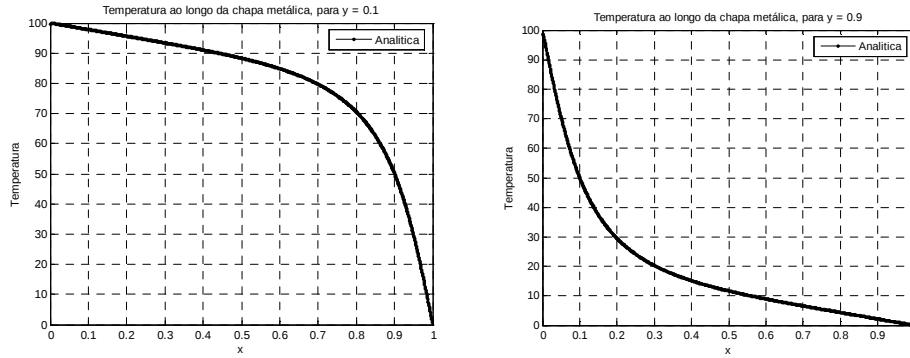


Figura 2 – Temperatura da chapa para $y = 0.1$ e $y = 0.9$

4.1. Solução Numérica:

Aplicando, na equação diferencial, as aproximações de diferenças finitas com passos: $\Delta x = \Delta y = 0,25$ metros, e trocando o índice i por j para a derivada em relação à y , tem-se:

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} = 0 \quad (26)$$

$$\Rightarrow u_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{4}$$

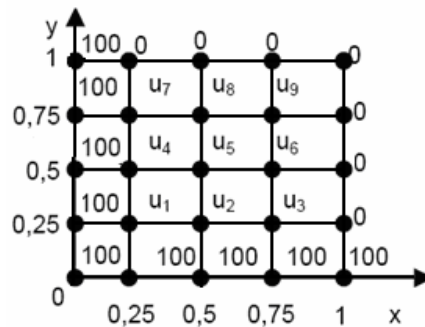


Figura 3 : Malha da discretização da placa.

Expandindo a Eq. 26 para cada ponto do interior, de u_1 a u_9 , chegam-se às equações (27):

$$\begin{cases} u_1 = \frac{u_2 + 100 + u_4 + 100}{4}; u_2 = \frac{u_3 + u_1 + u_5 + 100}{4}; u_3 = \frac{0 + u_2 + u_6 + 100}{4} \\ u_4 = \frac{u_5 + 100 + u_7 + u_1}{4}; u_5 = \frac{u_6 + u_4 + u_8 + u_2}{4}; u_6 = \frac{0 + u_5 + u_9 + u_3}{4} \\ u_7 = \frac{u_8 + 100 + 0 + u_4}{4}; u_8 = \frac{u_9 + u_7 + 0 + u_5}{4}; u_9 = \frac{0 + u_8 + 0 + u_6}{4} \end{cases} \quad (27)$$

Resolvendo o sistema obtido da Eq. 27, pelos métodos ED, CG, MINRES, BiCG, obtém-se os valores apresentados na Tabela 1.

Tabela 1- Valores Numéricos da Temperatura dados por ED, CG, MINRES e BiCG, para $n_x = 4$

	ED	CG	MINRES	BiCG
u_1	85,138	85,143	85,143	85,143
u_2	71,277	71,286	71,286	71,286
u_3	49,980	50,000	50,000	50,000
u_4	71,261	71,286	71,286	71,286
u_5	49,982	50,000	50,000	50,000
u_6	28,738	28,714	28,714	28,714
u_7	49,991	50,000	50,000	50,000
u_8	28,710	28,714	28,714	28,714
u_9	14,869	14,857	14,857	14,857

Na Fig. 4 apresenta-se um gráfico comparativo dos valores numéricos da Temperatura obtidos pelos métodos ED, CG, MINRES e BiCG, dados na Tabela 1.

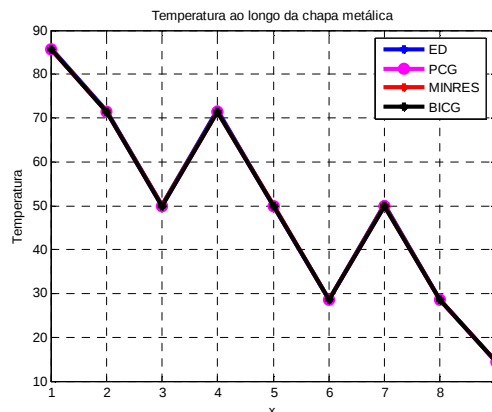


Figura 4: Gráfico dos valores numéricos da Temperatura

Observa-se a simetria em relação à diagonal principal da placa, e constata-se que os valores da temperatura, nos vértices da placa, não entraram no cálculo.

Segue-se uma comparação entre a solução analítica e a solução numérica obtida pelos métodos ED, CG, MINRES e BiCG. Nota-se, nas Fig. 5, 6, 7 e 8 que quanto mais subintervalos se tomam, mais a solução numérica se aproxima da solução analítica, veja alguns casos.

Observe que, no caso onde é tomado um pequeno número de nós 100, a solução numérica apresentada pelos quatro métodos estudados aparentemente difere da solução analítica. Nas figuras seguintes esta diferença aparente entre as soluções numérica e analítica é apenas porque se tomou um pequeno número de nós, pois quando se aumenta este número a solução numérica quase não se difere da solução analítica, principalmente a apresentada pelos métodos iterativos.

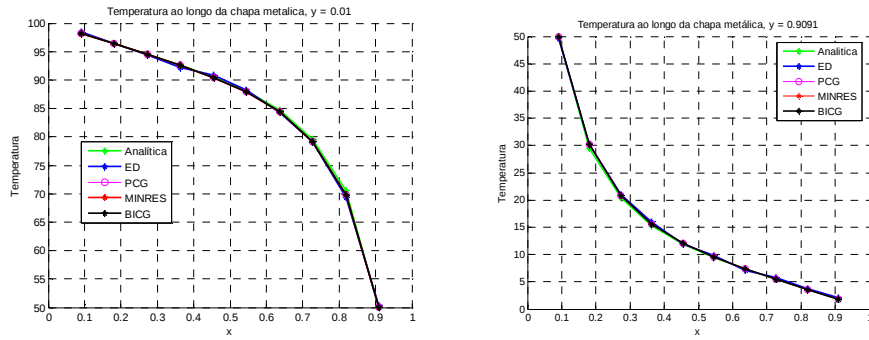


Figura 5: Gráfico comparativo entre as soluções analítica e numéricas obtidas pelos métodos ED, CG, MINRES e BiCG, com $n = 100$ nós. Em $y = 0.1$ e $y = 0.9$.

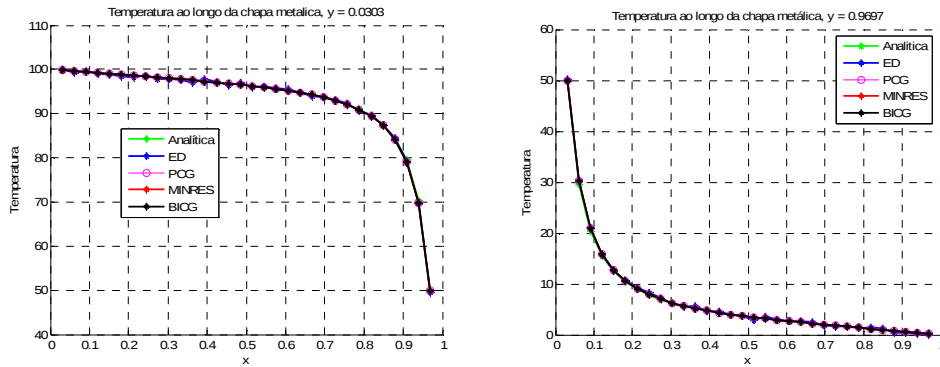


Figura 6: Gráfico comparativo entre as soluções analítica e numéricas obtidas pelos métodos ED, CG, MINRES e BiCG, com $n = 1024$ nós. Em $y = 0.0303$ e $y = 0.9697$.

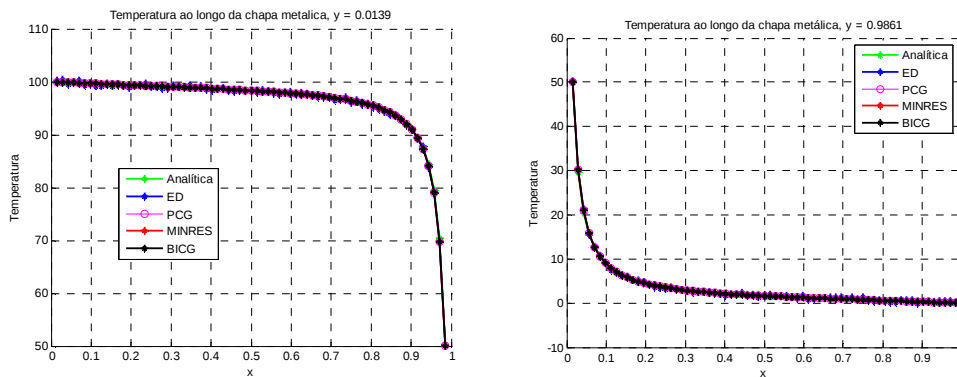


Figura 7: Gráfico comparativo entre as soluções analítica e numéricas obtidas pelos métodos ED, CG, MINRES e BiCG, com $n = 5041$ nós. Em $y = 0.0139$ e $y = 0.9861$.

Claramente se percebe principalmente ao se considerar as Figs. 6 e 7, que a solução numérica obtida pelos métodos CG, MINRES, BiCG e ED estão muito próximas da solução analítica. Isto nos leva a concluir que estes métodos são todos muito eficientes para este tipo de problema.

A seguir se apresenta a Tabela 2 onde é comparado o tempo computacional necessário para se calcular a solução numérica, do problema estudado nesta seção, usando os métodos estudados.

Tabela 2 – Comparação entre os métodos BiCG, MINRES, CG e ED.

N	Tempo Computacional			
	BiCG	MINRES	CG	ED
100	0,078	0,047	0,093	0,094
1024	1,375	0,500	0,906	0,500
4096	56,359	18,000	36,016	9,031
5041	78,468	26,329	52,641	11,469

Para os valores de n considerados, que são valores pequenos, nota-se que o tempo computacional gasto por cada um dos métodos iterativos se diferenciam bastante e que vale realmente a pena usar o método da Evolução Diferencial, pois apresenta bons resultados e necessita de um tempo computacional bem abaixo dos demais métodos. É conveniente observar, para este problema tomou-se estes números pequenos de nós devido à maneira que se gerou a matriz dos coeficientes, aqui não se usou um algoritmo para compactar a matriz esparsa, escrevendo somente os elementos não nulos, e com isso o maior tempo computacional é empregado para gerar a matriz, por exemplo, quando se usou $n = 5041$ nos gastou-se 1652.03 segundos. Além disso, usa-se muita memória para armazenar os zeros da matriz, fazendo com que, ao se aumentar o número de nós além do que se usou, ocorre um problema de falta de memória.

5. CONCLUSÕES

Neste trabalho, um problema de otimização foi definido com o propósito de obter a solução de sistemas lineares obtidos na resolução de um problema envolvendo a equação de Laplace. Foram utilizadas três técnicas iterativas e uma evolutiva, sendo que todas apresentaram bom desempenho na obtenção da solução. A técnica de Otimização por Evolução Diferencial apresentou uma solução com maior erro quando comparada com os outros métodos, porém também pode ser utilizada para qualquer tipo de matriz, mostrando ser uma técnica de grande potencial para ser aplicada a problemas complexos.

Na continuidade desta pesquisa serão focados essencialmente sistemas lineares onde as matrizes dos coeficientes são não simétricas e não positivo-definidas, pois são poucos os métodos disponíveis para a solução numérica destes sistemas.

6. REFERÊNCIAS

- Jacobi, C. G. J. (1845), "Über eine neue Auflösungsart". Astr. Nachr., 22, N^o. 523, pp. 297-303.
- Eberly, W., (2006), et al. "Solving sparse integer linear systems". Proc. ISSAC'06, Genova, Italy, ACM Press, 63-70, July 2006.
- Barret, R. Berry, (1994), et al. "Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods", 2^a ed. Philadelphia, PA: SIAM.
- Deb, K., (2001), "Multi-objective optimization using Evolutionary Algorithms". John Wiley&Sons, pp. 77-80 e 129-135.
- Storn, R. & Price, K., (1995), "Differential Evolution: a simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous spaces." Technical Report TR-95-012, International Computer Science Institute, Berkeley, March 1995.
- Storn, R., (1999). "System Design by Constraint Adaptation and Differential Evolution". IEEE Transactions on Evolutionary Computation, vol. 3, n. 1, pp. 22-34.
- Cheng, S.L. & Hwang, C. (2001), "Optimal Approximation of Linear Systems by a Differential Evolution Algorithm." IEEE Transactions on Systems, vol.31, no. 6, November 2001.
- Babu, B. V. & Munawar, S. A., (2001). "Optimal Design of Shell-and-Tube Heat Exchangers by Different Strategies of Differential Evolution", The Faculty Lounge, Article n^o 003873.
- Bergamaschi, P.R., Saramago, S.F.P. & Coelho, L.S, (2005). "Comparative Study of SQP and Metaheuristics for Robotic Manipulator", submitted to Journal of Optimization Theory and Applications.
- Palm, William J., (2005). "Introduction to MATLAB 7 for engineers", McGraw- Hill International Edition New York.
- Oliveira, G.T.S. 2006. "Estudo e aplicações da evolução diferencial". Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil.

COMPARISON BETWEEN CLASSIC AND EVOLUTIONARY METHODS IN THE SOLUTION OF THE BI-DIMENSIONAL LAPLACE EQUATION

Lúcio Aurélio Purcina

Universidade Federal de Uberlândia - Faculdade de Engenharia Mecânica
lucioaureliop@yahoo.com.br

Sezimária de Fátima Pereira Saramago

Universidade Federal de Uberlândia - Faculdade de Matemática
saramago@ufu.br

Abstract: *Traditionally, great linear systems are resolved by using direct or iterative methods. The convergence of these methods depends on the eigenvalues of the coefficients matrix. Thus, when the coefficients matrix loses one of the following characteristics: being symmetrical or positive-defined, the direct and even the iterative methods (stationary and no-stationary) lose efficiency. The aim of this work is to compare the applications of some techniques in the solution of great linear systems. With this purpose, classic no-stationary iterative methods are tested (Conjugate Gradients, Minimal Residual, Bi-Conjugate Gradients) and the methods of evolutive optimization known as Differential Evolution. In this research, is considered the problem of bi-dimensional Laplace equation, making it is a comparison between analytical solution with the numerical solutions obtained by the methods mentioned.*

KEYWORDS: *Linear Systems, Iterative Methods, Differential Evolution.*