

PROGRAMAÇÃO LINEAR APLICADA AO PROBLEMA DE PLANEJAMENTO DE TRANSPORTE

Carlos Alberto da Silva Junior

FEMEC – Universidade Federal de Uberlândia, Av. João Naves de Ávila, 2160 - Campus Santa Mônica - Bloco 1M -
Uberlândia/MG, CEP: 38400-902
carlosdamat@gmail.com

Sezimária Pereira de Fátima Saramago

FAMAT – Universidade Federal de Uberlândia, Av. João Naves de Ávila, 2160 - Campus Santa Mônica - Bloco 1F -
Uberlândia/MG, CEP: 38400-902
saramago@ufu.br

Resumo: *A Programação Linear é amplamente usada na solução de problemas nas mais diversas áreas do conhecimento, por isto, continua sendo estudada e aprimorada. Este trabalho visa apresentar alguns conceitos envolvendo o Método Simplex e sua aplicação na resolução de um problema de transporte. Os resultados obtidos por três códigos comerciais (LINDO, LINPROG e MOSEK) são analisados e comparados, sendo apresentado ainda o tempo computacional e o número de iterações necessárias.*

Palavras-chave: *Otimização, Programação Linear, Método Simplex, Problema de Transporte.*

1. INTRODUÇÃO

O sucesso de qualquer metodologia de otimização depende da capacidade de se tratar com problemas complexos, exigindo uma modelagem matemática adequada para esses problemas, pois a obtenção correta da função objetivo e das restrições envolvidas no problema é fundamental na representação de qualquer projeto.

A Otimização Linear, também conhecida como Programação Linear, é de grande importância nas mais diversas áreas, como na resolução de problemas ligados ao planejamento de Transporte de cargas, distribuição de água, etc. Este tema ainda apresenta um grande interesse de estudo, como visto nos trabalhos de Barboza (2006), Berger (2003), Costa (2005), do Couto (2004), Fukasawa (2002), Melo (2004), Pigatti (2003), Silva (2003) e Steiner (2006) e, por isto, um estudo detalhado dos métodos de resolução de PPL é relevante.

Existem vários códigos comerciais que podem ser utilizados na resolução de PPL, neste trabalho são escolhidos três destes códigos, o MOSEK (Mathematical Optimization Software Specified), o LinProg (Linear Programming), ambos utilizando o Software MatLab e o código LINDO (Linear, Interactive and Discrete Optmizer). O vetor solução obtido em cada código, o número de iterações necessárias e o tempo computacional são comparados, para que seja possível obter informações relevantes sobre cada um destes códigos.

2. O MÉTODO SIMPLEX

Um *Problema Geral de Otimização* visa minimizar ou maximizar uma função, chamada de *Função Objetivo*, sujeita ou não a algumas restrições. Estas restrições podem ser restrições de igualdades, desigualdades ou restrições laterais. A função objetivo e as restrições podem ser funções lineares ou não-lineares; funções de uma única variável ou de várias variáveis; podem ser funções explícitas ou implícitas. Assim, um problema geral de otimização pode ser definido como a seguir.

Definição: Sejam $F : \phi_1 \rightarrow \psi_1$, $G_j : \phi_2 \rightarrow \psi_2, \forall j$, $H_k : \phi_3 \rightarrow \psi_3, \forall k$, onde $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \in \mathbb{R}^m$ e $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \in \mathbb{R}^n$. Então, um problema geral de otimização é definido por:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar ou maximizar} \\ &F(x) = [f_1(x) \ f_2(x) \ \cdots \ f_n(x)] \\ &\text{Sujeita a} \\ &G_j(x) \leq 0, \ j = 1, \dots, s \\ &H_k(x) = 0, \ k = 1, \dots, t \\ &x_i^l \leq x_i \leq x_i^u, \ i = 1, \dots, m \end{aligned} \tag{1}$$

sendo F é o vetor das funções objetivos, G_j , H_k são funções de restrição de desigualdade e igualdade, respectivamente, e x_i são as variáveis de projeto.

Um *Problema de Programação Linear (PPL)* é um caso particular do problema geral de otimização, onde o objetivo deste é minimizar uma função objetivo, chamada de *função custo*, sujeita a restrições. O que diferencia este tipo de problema de todos os outros é que todas as funções envolvidas, a Função Custo e as restrições, são funções lineares.

Um vetor que satisfaz todas as restrições é chamado *uma solução viável*. O conjunto de todas as soluções viáveis é chamado de *conjunto viável*. A variável x_j é chamada de *uma variável livre* se $N = \{1, \dots, n\}$ e $j \notin N$.

É possível escrever um PPL em linguagem matricial. Ele é dito estar na forma padrão se todas as restrições forem restrições de desigualdade da forma

$$a_i^T \geq b_i \tag{2}$$

onde a_i^T é o vetor formado por todos os coeficientes da restrição i e b_i é o vetor dos termos independentes correspondendo a restrição i (recursos disponíveis). Então, para transformar todas as restrições de um PPL apresentado pela Equação 2 tem-se que $a_i^T = b_i$ é equivalente a $a_i^T \geq b_i$ e $a_i^T \leq b_i$; toda restrição da forma $a_i^T \leq b_i$ pode ser reescrita como sendo da forma $-a_i^T \geq -b_i$; e $x_i \geq 0$ ou $x_i \leq 0$ são casos particulares da restrição da Equação 2, sendo que a_i^T é o i -ésimo vetor unitário e $b_i = 0$. Assim, um PPL pode ser escrito da forma:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && F(X) = C^T X \\ &\text{sujeito a} && AX \geq b \end{aligned} \tag{3}$$

sendo A a matriz dos coeficientes das restrições $A = \begin{bmatrix} - & a_1^T & - \\ - & a_2^T & - \\ - & \vdots & - \\ - & a_n^T & - \end{bmatrix}$, b é o vetor dos recursos

disponíveis $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ e X é o vetor das variáveis de projeto.

O conjunto solução de um PPL é uma região convexa chamada de *poliedro*, sendo que em alguns problemas este poliedro pode ser limitado e em outros casos não. Os *pontos extremos* de um poliedro P é qualquer ponto que não seja possível achar dois vetores $y, z \in P$ tais que exista $\lambda \in [0, 1]$ de modo que $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$. Em outras palavras, pontos extremos são equivalentes a vértices de um poliedro.

Dentre as restrições que definem o poliedro, em cada vértice, existem restrições que são chamadas de *ativas*. Estas restrições são aquelas que satisfazem $a_i^T x^* = b_i$, para algum i do conjunto das restrições. Se existir n restrições que são ativas num determinado vetor x^* , então x^* satisfaz um determinado sistema de n equações lineares e n incógnitas. Este sistema terá uma única solução se, e somente se, as n restrições lineares forem LI, no sentido que os vetores correspondente a_i são LI. Com isto, é possível apresentar a seguinte definição.

Definição: Considere um poliedro P definido por restrições de igualdade e de desigualdade e seja x^* um elemento do $\mathfrak{R}^n$.

- a) O vetor x^* é uma solução básica se:
 - i) Todas as restrições de igualdade forem ativas;
 - ii) Dentro destas restrições que são ativas em x^* existem n delas que são LI.
- b) Se x^* é uma solução básica que satisfaz todas as restrições, então se diz que ela é uma solução básica viável.

O Teorema a seguir apresenta uma maneira de construir soluções básicas, utilizando as colunas LI da matriz de restrição.

Teorema: Considere a restrição $Ax = b$ e $x \geq 0$, e assumamos que a matriz A de dimensão $m \times n$ tem linhas LI. Um vetor $x \in \mathfrak{R}^n$ é uma solução básica se, e somente se, tem-se que $Ax = b$ e existem índices $B(1); \dots; B(m)$ tal que:

- a) As colunas $A_{B(1)}; \dots; A_{B(m)}$ são LI;
- b) Se $i \notin B(1); \dots; B(m)$, então $x_i = 0$.

Assim, utilizando este Teorema é possível criar um procedimento para a construção de soluções básicas, dado pela Tabela 1.

Tabela 1: Procedimento para construir soluções básicas viáveis.

1 – Escolha m colunas LI $A_{B(1)}; \dots; A_{B(m)}$;
2 – Tome $x_i = 0$, para todo $i \notin B(1); \dots; B(m)$;
3 – Resolva o sistema de m equações $Ax = b$ para os $x_{B(1)}, \dots, x_{B(m)}$ desconhecidos.

Se a solução básica construída por este procedimento for não negativa então ela é uma *solução básica viável*. Se x for uma solução básica, então $x_{B(1)}, \dots, x_{B(m)}$ são chamadas de *variáveis básicas* enquanto que as demais variáveis são chamadas de *variáveis não básicas*. Uma solução é chamada de *degenerada* se ela possui mais do que n restrições ativas, assim no espaço bidimensional uma solução degenerada tem pelo menos três restrições ativas relacionadas a ela.

Teorema: a) Considere o PPL de minimizar $C^T X$ sobre um poliedro P . Suponha que P tenha no mínimo um ponto extremo e que exista uma solução ótima. Então, existe uma solução ótima que é um ponto extremo de P .

b) Considere o PPL de minimizar $C^T X$ sobre um poliedro P . Suponha que P tenha pelo menos um ponto extremo. Então, o custo ótimo é igual a $-\infty$ ou existe um ponto extremo que será ótimo.

Teorema: Considere uma solução básica viável x associada com a matriz básica B e seja $\bar{C}$ o vetor custo reduzido correspondente.

(a) Se $\bar{C} \geq 0$ então x é ótimo.

(b) Se x é uma solução ótima e x é não degenerada então $\bar{C} \geq 0$.

Com isto é possível completar o Método Simplex. A principal tarefa é apresentar os detalhes de como se mover para uma solução básica viável melhor, sempre que uma direção básica vantajosa é encontrada. Assim, utilizando o procedimento apresentado na Tabela 2 é possível encontrar as soluções básicas viáveis através do método simplex.

Tabela 2: Uma Iteração do Método Simplex.

1 - Inicie o processo com uma base constituída das colunas básicas $A_{B(1)}, \dots, A_{B(m)}$ e uma solução básica viável associada com esta base.
2 - Calcule o custo reduzido $\bar{C}_j = C_j - C_B B^{-1} A_j$, para todo índice não básico j . Se todos forem não negativos, a presente solução básica é ótima, por isto, o algoritmo se encerra. Caso contrário, escolha algum j para o qual $\bar{C}_j < 0$.
3 - Calcule $u = B^{-1} A_j$. Se nenhuma das componentes de u é positiva, tem-se que $\theta^* = -\infty$ e que o custo ótimo também é $-\infty$ e, por isto, o algoritmo se finaliza.
4 - Se alguma componente de u for positiva, seja $\theta^* = \min_{\{i=1, \dots, m u_i > 0\}} \left\{ \frac{X_{B(i)}}{u_i} \right\}$
5 - Seja l tal que $l = \theta^*$. Forme uma nova base trocando $A_{B(l)}$ com A_j . Se y é a nova solução básica viável, o valor da nova variável básica é $y_j = \theta^*$ e $y_{B(i)} = x_{B(i)} - \theta^* u_i, \text{ para } i \neq l.$

Se o conjunto viável é não vazio e se cada solução básica viável é não degenerada, então o Método Simplex termina depois de um número finito de iterações. Além disso, ao terminar ou tem-se uma base ótima B e uma solução básica viável associada com este ponto ótimo ou tem-se achado um vetor d satisfazendo $Ad = 0$, $d \geq 0$, $C^T d < 0$ e que o custo ótimo é $-\infty$.

3. UM PROBLEMA DE TRANSPORTE

O PPL apresentado aqui foi proposto por Couto (2004). O objetivo deste problema é maximizar os lucros obtidos na transferência de cargas, entre várias cidades, por uma determinada transportadora, sendo que a mesma possui uma grande frota e uma grande área de cobertura. Neste estudo adotou-se que o custo operacional está diretamente relacionado à quilometragem rodada por cada tipo de carreta e de cavalos. Por isto, não são levados em conta o peso ou o tipo de produtos transportados já que as Demandas são montadas levando em conta a quantidade e o tipo de carreta. Também não foi considerado a localidade do transporte e os custos particulares de cada carreta e cada cavalo e as possíveis alterações que ocorreriam devido a restrições climáticas, manutenção de veículos, fechamento de estradas, etc. Da mesma forma que na frota própria, os custos da frota terceirizada estão estimados por quilômetros rodados pelo conjunto que pode atender uma demanda. Por fim, o custo dos motoristas está relacionado, também, com a quilometragem.

O objetivo do problema é definir a frota, isto é, definir a quantidade de cada tipo de veículo que deve ser enviada para cada cidade, em cada uma das datas, definindo quais as cargas a serem terceirizadas para que todas as demandas sejam atendidas, de forma a maximizar os lucros na transferência de cargas entre as cidades. As restrições que tem que ser respeitadas são: a capacidade da frota agregada; atender a todas as demandas; limite do comprimento do conjunto cavalo e carreta; capacidade em números de carreta, de cada filial; horário de carregamento; viagem acima de 12 horas precisam de dois motoristas; prazo de entrega do pedido; datas de compras de veículos novos; saídas dos cavalos e carretas próprios para manutenção agendada.

Na formulação do problema foi usado o modelo matemático de multi-fluxos multi-periódicos, com restrições adicionais para controlar o atendimento das demandas e a capacidade das filiais. Para resolver o problema os dados abaixo são necessários vários dados, sendo estes dados por V , o conjunto de todos os tipos de Cavalos; R , o conjunto de todos os tipos de Carretas; D , o conjunto de todas as demandas; N , o conjunto de todos os nós das malhas; M , o conjunto de todas as viagens (i ; j) que possuem uma duração acima de 12 horas; G , o conjunto de todas as viagens (i ; j) que possuem uma duração abaixo de 12 horas e que não representam veículos parados nas filiais; F_d , frete, ou ganho, para a uma carreta atender à demanda d ; C_{td} , custo de terceirizar um conjunto, para atender à demanda d ; Dem^r_d , quantidade de carretas, do tipo r , requeridas pela demanda d ; $C^v_{i,j}$, custo da viagem de i para j , para um cavalo do tipo v ; $C^r_{i,j}$, custo da viagem de i para j , para um carreta do tipo r ; Q^v_i , quantidade de cavalos do tipo v que estão disponíveis na cidade i no dia de estudo; Q^r_i , quantidade de carretas do tipo r que estão disponíveis na cidade i no dia de estudo; CM , custo por hora de um motorista; $H_{i,j}$, quantidade de horas da viagem de i para j ; Cap_i , capacidade, em número de carretas, da filial i .

Com isto, o PPL fica definido pelas seguintes variáveis de projeto: $x^v_{i,j}$: número de cavalos do tipo v , indo da cidade i para a cidade j ; y^r_i : número de carretas do tipo r , parada na cidade i ; $z^{r,v}_{i,j}$: número de conjuntos cavalos do tipo v e carreta do tipo r , vazios, indo da cidade i para a cidade j ; $w^{r,v,d}_{i,j}$: número de conjuntos formados por cavalos do tipo v e carretas do tipo r , atendendo a demanda d , indo da cidade i para a cidade j ; t_d : número de conjuntos terceirizados, atendendo a demanda d .

Assim, a função objetivo que representa o PPL modelado é escrita conforme a Equação:

$$Max: FO = FO_1 + FO_2 - FO_3 - FO_4 - FO_5 - FO_6, \quad (4)$$

onde FO_1 é a equação que representa o lucro das entregas das demandas obtidos pela frota própria e é obtido pela Equação 5, FO_2 é o lucro das entregas das demandas obtidos pela frota terceirizada, dada pela Equação 6; FO_3 é o custo das viagens dos conjuntos cavalo carreta viajando vazios, dado pela Equação 7; FO_4 é o custo das viagens dos cavalos, sem carretas, dado pela Equação 8; FO_5 e FO_6 representam o custo dos motoristas com viagens acima de 12 horas e inferior a 12 horas, respectivamente, sendo dadas pelas Equação 9 e Equação 10, respectivamente.

$$FO_1 = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{r \in R} \sum_{v \in V} \sum_{d \in D} (F_d - C^r_{i,j} - C^v_{i,j}) \cdot w^{r,v,d}_{i,j} \quad (5)$$

$$FO_2 = \sum_{d \in D} (F_d - C_{t_d}) \cdot t^d \quad (6)$$

$$FO_3 = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{r \in R} \sum_{v \in V} (C_{i,j}^r + C_{i,j}^v) \cdot z_{i,j}^{r,v} \quad (7)$$

$$FO_4 = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{v \in V} C_{i,j}^v \cdot x_{i,j}^v \quad (8)$$

$$FO_5 = 2CM \sum_{(i,j) \in M} H_{i,j} \cdot \left[\sum_{r \in R} \sum_{v \in V} \sum_{d \in D} w_{i,j}^{r,v,d} + \sum_{r \in R} \sum_{v \in V} z_{i,j}^{r,v} + \sum_{v \in V} x_{i,j}^v \right] \quad (9)$$

$$FO_6 = CM \sum_{(i,j) \in M} H_{i,j} \cdot \left[\sum_{r \in R} \sum_{v \in V} \sum_{d \in D} w_{i,j}^{r,v,d} + \sum_{r \in R} \sum_{v \in V} z_{i,j}^{r,v} + \sum_{v \in V} x_{i,j}^v \right] \quad (10)$$

As restrições às quais o PPL está sujeito estão reunidas em vários conjuntos. O primeiro grupo de restrições representa a entrada de fluxo para cada cidade, em um dia, para cavalos do tipo v , este grupo de restrições, dado pela Equação 11. O conjunto de restrições que representa o fluxo em cada cidade, num dia, considerando as carretas num pátio do tipo r , é mostrado na Equação 12. O terceiro grupo de restrições é análogo ao primeiro, sendo que as restrições estão relacionadas com a conservação do fluxo para uma determinada cidade k que não representa nem o primeiro nem o último dia para cavalos do tipo v , e ainda $k \notin S$, $k \notin T$, $\forall v \in V$, este grupo de restrições é dado pela Equação 13. O quarto grupo de restrições é análogo ao segundo grupo, sendo que as restrições representam a conservação do fluxo para uma determinada cidade k que não considera nem o primeiro nem o último dia para carretas do tipo r , e ainda $k \notin S$, $k \notin T$, $\forall r \in R$, apresentadas na Equação 14. O quinto conjunto de restrições, ligadas ao atendimento da demanda indo da cidade i para a cidade j , sendo $\forall d \in D$ e $\forall r \in R$, é dado pela Equação 15. O sexto grupo de restrições consideram a capacidade de um pátio i , para todas as carretas $\forall i \in N$, sendo representado pela Equação 16. Os cinco últimos tipos de restrições estão relacionados com as restrições laterais, que exige que todas as variáveis sejam não negativas, sendo representadas pelas Equações 17 até 21.

$$g_1 : \sum_{j \in N} \left(x_{i,j}^v + \sum_{r \in R} z_{i,j}^{r,v} + \sum_{r \in R} \sum_{d \in D} w_{i,j}^{r,v,d} \right) = Q_i^v, i \in S, \forall v \in V \quad (11)$$

$$g_2 : \sum_{j \in N} \left(y_i^r + \sum_{v \in V} z_{i,j}^{r,v} + \sum_{v \in V} \sum_{d \in D} w_{i,j}^{r,v,d} \right) = Q_i^r, i \in S, \forall r \in R \quad (12)$$

$$g_3 : \sum_{j \in N} \left(x_{k,j}^v + \sum_{r \in R} z_{k,j}^{r,v} + \sum_{r \in R} \sum_{d \in D} w_{k,j}^{r,v,d} \right) - \sum_{i \in N} \left(x_{i,k}^v + \sum_{r \in R} z_{i,k}^{r,v} + \sum_{r \in R} \sum_{d \in D} w_{i,k}^{r,v,d} \right) = Q_k^v \quad (13)$$

$$g_4 : \sum_{j \in N} \left(y_k^r + \sum_{v \in V} z_{k,j}^{r,v} + \sum_{v \in V} \sum_{d \in D} w_{k,j}^{r,v,d} \right) - \sum_{i \in N} \left(y_i^r + \sum_{v \in V} z_{i,k}^{r,v} + \sum_{v \in V} \sum_{d \in D} w_{i,k}^{r,v,d} \right) = Q_k^r \quad (14)$$

$$g_5 : t_d + \sum_{v \in V} w_{i,j}^{r,v,d} = Dem_d^r \quad (15)$$

$$g_6 : \left[\sum_{k_{in} \in N} \sum_{r \in R} \sum_{v \in V} \sum_{d \in D} w_{k_{in},i}^{r,v,d} + \sum_{k_{in} \in N} \sum_{r \in R} \sum_{v \in V} z_{k_{in},i}^{r,v} + \sum_{k_{in} \in N} \sum_{r \in R} y_{k_{in}}^r \right] - \left[\sum_{k_{out} \in N} \sum_{r \in R} \sum_{v \in V} \sum_{d \in D} w_{i,k_{out}}^{r,v,d} + \sum_{k_{out} \in N} \sum_{r \in R} \sum_{v \in V} z_{i,k_{out}}^{r,v} + \sum_{k_{out} \in N} \sum_{v \in V} y_{k_{out}}^v \right] \leq Cap_i \quad (16)$$

$$g_7 : w_{i,j}^{r,v,d} \geq 0 \quad (17)$$

$$g_8 : z_{i,j}^{r,v} \geq 0 \quad (18)$$

$$g_9 : x_{i,j}^v \geq 0 \quad (19)$$

$$g_{10} : y_i^r \geq 0 \quad (20)$$

$$g_{11} : t^d \geq 0 \quad (21)$$

Para uma melhor compreensão do PPL definido pela Equação 5 até a Equação 21, considere o problema simplificado, ou seja, considere apenas um tipo de demanda, duas cidades que são tanto cidades de saída como cidades de chegada. Além disso, suponha que existam 3 tipos de cavalos, e 3 tipos de carretas, sendo que apenas uma destas combinações, ultrapassa a medida permitida por lei para transitar em rodovias. Para efetuar a simulação numérica, é considerado o conjunto de dados dado pela Tabela 3.

Tabela 3: Dados de Entrada utilizados para resolver o PPL de transporte.

$N = 2$	$V = 3$
$R = 3$	$D = 1$
$CM = R\$ 10,00$	$F_d = R\$ 100,00$
$C_{td} = R\$ 50,00$	$Dem_d^r = [40 \ 40 \ 40]$
$C_{I,II}^r = C_{II,I}^r = [07 \ 09 \ 11]$	$C_{I,II}^v = C_{II,I}^v = [10 \ 12 \ 14]$
$Q_{I,II}^r = [15 \ 15 \ 15]$	$Q_{I,II}^v = [10 \ 10 \ 10]$
$Cap_i = [50 \ 50]$	$H_{I,II} = [03 \ 03]$

Com o objetivo de comparação, são utilizados os códigos MOSEK, Linprog e LINDO. Estes códigos permitem a escolha dos métodos de otimização: Simplex ou Ponto Interior. Nesta pesquisa, todos os códigos foram aplicados utilizando o método Simplex. O valor da função objetivo, o tempo gasto e o número de iterações de cada um dos códigos são apresentados na Tabela 4.

Tabela 4: Resultados Obtidos para o PPL.

	Função Objetivo (R\$)	Tempo Gasto (s)	Número de Iterações
LINDO	3940	3.00	17
LINPROG	3940	2.10	24
MOSEK	3940	1.00	08

Os vetores das variáveis de projeto, relacionados com a variável w , obtido por cada código, são dado na Tabela 05.

Tabela 5: Variáveis de Projeto w Obtidas para o PPL.

LINDO	$[0 \ 10 \ 0 \ 0 \ 0 \ 10 \ 10 \ 0 \ 0 \ 0 \ 10 \ 10 \ 0 \ 0 \ 0 \ 10]^T$
LINPROG	$[5 \ 0 \ 10 \ 0 \ 10 \ 0 \ 5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 5 \ 0 \ 5 \ 5 \ 10 \ 5]^T$
MOSEK	$[0 \ 0 \ 10 \ 10 \ 0 \ 0 \ 0 \ 10 \ 10 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 10 \ 0 \ 10]^T$

Pode-se observar que os vetores obtidos em cada um dos códigos são diferentes, mas apresentaram o mesmo valor da função objetivo. Mesmo sendo distintos, é possível observar que existe certa simetria entre eles, isto é, as primeiras coordenadas da Tabela 4 saem da cidade I em direção a cidade II e, nos três códigos, foram necessários 30 conjuntos cavalo-carreta, da frota própria, para atender a demanda. O mesmo ocorre com o trajeto entre a cidade II e a cidade I . Em relação à variável t , os três códigos obtiveram a necessidade de terceirizar 25% da demanda, mostrado na Tabela 6, sendo preciso, então, de 20 conjuntos terceirizados para atender a demanda.

Tabela 6: Variáveis de Projeto t Obtidas para o PPL.

LINDO	$[20]^T$
LINPROG	$[20]^T$
MOSEK	$[20]^T$

Para todos os códigos, na solução ótima, as variáveis z (conjuntos viajando sozinhos) e x (cavalos viajando sozinhos) são nulas. Assim, a solução ótima apresentada por cada um considera que nestes casos o melhor é não ter nenhum conjunto (ou cavalo) viajando vazio.

Sobre as carretas paradas nos pátios, todos os códigos deixaram o mesmo número de carretas em cada cidade, como visto na Tabela 7. O que diferencia uma solução da outra é apenas o tipo de carreta que fica parado, que depende do tipo de carreta que foi usado para atender a demanda s .

Tabela 7: Variáveis de Projeto y Obtidas para o PPL.

LINDO	$[5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5]^T$
LINPROG	$[0 \ 5 \ 10 \ 10 \ 5 \ 0]^T$
MOSEK	$[5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5]^T$

É fácil observar que mesmo os três códigos tenham chegado ao mesmo valor da função objetivo, as soluções obtidas por cada um foram distintas, o que demonstra que existem infinitas soluções. A maior diferença observada nas soluções obtidas foi o tempo gasto e no número de iterações, sendo que o código MOSEK mostrou-se mais eficiente.

4. CONCLUSÕES

O uso do método simplex na resolução de PPL sempre se mostra eficiente, visto que ele é construído de maneira a sempre andar nos vértices do poliedro que define a sua região viável. É importante observar também que neste exemplo, como o número de variáveis de projeto é baixo, os códigos foram precisos e os três chegaram ao mesmo vetor solução, porém alguns gastaram mais tempo computacional ou precisou de um número maior de iterações.

Outra informação importante está relacionada ao fato que para problemas com alto número de variáveis e restrições o código LINDO não se torna muito recomendado, visto que ele não trabalha diretamente com as matrizes e, para sua aplicação, existe a necessidade de se escrever todas as equações envolvida no PPL, fazendo com que este processo não seja eficiente e recomendável para grandes problemas.

5. AGRADECIMENTOS

O primeiro Autor agradece à Capes pelo financiamento deste projeto.

6. REFERÊNCIAS

- Barboza, C. B e Oliveira, A. R. L., 2006, “Planejamento do tratamento por radioterapia através de métodos de pontos interiores”, Pesquisa Operacional, Vol.26, Nº 1, Rio de Janeiro.
- Berger, R., Timofeiczky Jr, R., Carnieri, C. Lacowicz, P. G., Sawinski Junior, J. e Brasil, A. A., 2003, “Minimização de Custos de Transporte Florestal com a utilização da Programação Linear”, Revista Floresta, Vol. 33, Nº 1.
- Costa, F. P., Souza, M. J. F. e Pinto, L. R., 2005, “Um modelo de programação matemática para alocação estática de caminhões visando ao atendimento de metas de produção e qualidade”, Revista Escola de Minas, vol.58 no.1 Ouro Preto.
- do Couto, P. T. B., 2004, “Resolução de problemas de transporte rodoviário de cargas utilizando programação inteira” DISSERTAÇÃO DE MESTRADO, PUC-Rio.
- Fukasawa, R., 2002, “Resolução de problemas de logística ferroviária utilizando programação inteira” DISSERTAÇÃO DE MESTRADO, PUC-Rio.
- Melo, M. P.; Lima, D. P. e Pinheiro, P. R., 2004, “Modelos em programação matemática para o processamento do biscoito tipo *Cracker*”, Ciências e Tecnologia de Alimentos, Vol.24, Nº 03, Campinas.
- Pigatti, A. A., 2003, “Modelos e Algoritmos para o Problema de Alocação Generalizada (PAG) e Aplicações” DISSERTAÇÃO DE MESTRADO, PUC-Rio.
- Silva, G. F.; Leite, H. G.; da Silva, M. L., Rodrigues, F. L. e Santos, H. N., 2003, “Problemas com o uso de programação linear com posterior arredondamento da solução ótima, em regulação florestal”, Revista Árvore, Vol.27 Nº 5, Viçosa.
- Steiner, M. T. A.; Soma, N. Y., Shimizu, T., Nievola, J. C. e Steiner Neto, P. J.; 2006, “Abordagem de um problema médico por meio do processo de *KDD* com ênfase à análise exploratória dos dados”, Gestão e Produção, Vol.13 Nº 2, São Carlos.

LINEAR PROGRAMMING APPLIED TO THE PROBLEM OF TRANSPORT PLANNING

Carlos Alberto da Silva Junior

FEMEC – Universidade Federal de Uberlândia, Av. João Naves de Ávila, 2160 - Campus Santa Mônica - Bloco 1M - Uberlândia/MG, CEP: 38400-902
carlosdamat@gmail.com

Sezimária Pereira de Fátima Saramago

FAMAT – Universidade Federal de Uberlândia, Av. João Naves de Ávila, 2160 - Campus Santa Mônica - Bloco 1F - Uberlândia/MG, CEP: 38400-902
saramago@ufu.br

Abstract: *Linear programming is frequently used in the solution of problems of several areas of knowledge. Thus, It has still been studied and improved. The objective of this work is to present some concepts about the Simplex Method and its application in the resolution of a transport problem. The main theorems related with the development of this method are studied. A simple transport problem is modeled. The optimal results obtained by using three commercial codes (LINDO, LINPROG and MOSEK) are analyzed and compared, presenting the computational time and the number of iterations for each methodology.*

Keywords: *Optimization, Linear Programming, Simplex Method, Transport Problems.*