

MODIFICAÇÕES NA TÉCNICA BASEADA EM FUNÇÕES DE GREEN E OBSERVADORES DINÂMICOS

Priscila Ferreira Barbosa de Sousa, priscila@mecanica.ufu.br

Ana Paula Fernandes, apfernandes@mecanica.ufu.br

Valério Luis Borges, vlborges@mecanica.ufu.br

Gilmar Guimarães, gguima@mecanica.ufu.br

Faculdade de Engenharia Mecânica, FEMEC

Universidade Federal de Uberlândia, UFU

Uberlândia, MG, Brasil.

Resumo. O uso de observadores dinâmicos baseados em funções de Green foi concebido para aplicação em problemas inversos de transferência de calor multidimensionais. A técnica se baseia no uso da função transferência do modelo térmico (G_H) para a obtenção da função transferência do ruído (G_N), que é a base do estimador, ou seja, da técnica inversa. Originalmente a G_H é obtida usando os princípios de funções de Green e a solução numérica de um problema auxiliar. Além disso a técnica estima o fluxo de calor a partir de temperaturas medidas por um único termopar posicionado no condutor. Este trabalho apresenta duas propostas para aumentar a robustez e confiabilidade dessa técnica: a primeira visa a obtenção da função transferência do modelo térmico obtida analiticamente; a segunda, busca obter uma função de transferência, G_H , que possibilite o uso simultâneo de vários sensores dispostos em pontos diferentes da amostra, o que fisicamente contribui para uma estimativa mais precisa. Em um primeiro momento essa função transferência será obtida numericamente. As duas melhorias são implementadas e simulações de problemas 1D, 2D e 3D são apresentadas. Os resultados apresentam estimativas mais precisas e com menor erro, quando comparados com ao método original.

Palavras chave: problema inverso, observadores, funções de Green, múltiplos sensores.

1. Introdução

Os problemas inversos são encontrados em várias áreas da ciência e engenharia e podem ser aplicados sob diferentes formas. A principal característica deste tipo de abordagem é a obtenção da solução do problema físico de maneira indireta, pois as condições de contorno não são conhecidas ou são de difícil acesso. Diante disso, o problema pode ser resolvido a partir de informações oriundas de sensores localizados em pontos acessíveis.

Nos problemas inversos em condução de calor o uso de temperaturas experimentais permite a obtenção da solução do problema térmico, que pode ser: a obtenção das propriedades térmicas, obtenção do fluxo de calor superficial, obtenção da fonte de calor interna ou ainda a obtenção da temperatura superficial numa face sem acesso direto.

Recentemente técnicas de filtro, como o uso de observadores dinâmicos proposto por Blum e Marquardt (1997), têm sido empregadas na solução de problemas inversos em condução de calor. Trabalhos como os Blum e Marquardt (1997) e Sousa *et al.* (2006) têm demonstrado a eficiência e flexibilidade do uso de observadores dinâmicos na solução de problemas unidimensionais. Sousa (2006) apresenta uma técnica baseada em funções de Green e observadores dinâmicos que pode ser aplicada diretamente a problemas multidimensionais, apresentando resultados competitivos com técnicas inversas consolidadas como o método da função especificada sequencial (Beck, *et al.*, 1985).

Entretanto essa técnica apresenta algumas restrições como a estimação do fluxo de calor baseada apenas em um termopar e a necessidade de um modelo numérico que represente fielmente o problema real. Esse trabalho propõe a melhoria desta técnica, substituindo a função resposta do sistema térmico, originalmente numérica, por uma função analítica obtida usando funções de Green e ainda possibilitando o uso de múltiplos sensores simultâneos para estimação do fluxo de calor.

2. Fundamentos

A técnica de solução de problemas inversos baseada em funções de Green e observadores dinâmicos (Sousa, 2006) pode ser dividida em duas etapas distintas: i) a obtenção da função transferência, G_H ; ii) a obtenção dos estimadores G_Q e G_n e implementação do algoritmo baseado em observadores. Na primeira etapa obtém-se a função transferência do sistema condutor fazendo uso da teoria de funções de Green e da definição de sistemas dinâmicos equivalentes tendo aplicação imediata em problemas multidimensionais. Na segunda etapa faz-se uso do procedimento apresentado por Blum and Marquardt (1997).

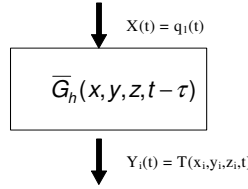


Figura 2. Sistema dinâmico equivalente ao modelo térmico

Aplicando-se a transformada de Laplace (Ozisik, 1993) em ambos os lados da Eq.(4) obtém-se

$$\bar{T}(x, y, z, s) = \bar{G}_h(x, y, z, s) \bar{q}_1(s) \quad (5)$$

onde a Transformada de Laplace de uma função $F(t)$ é definida por

$$\mathcal{L}[F(t)] = \bar{F}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st'} F(t') dt' \quad (6)$$

A obtenção da função transferência $\bar{G}_h(x, y, z, s)$ se completa através do uso de um problema auxiliar, que possui as mesmas características físicas do problema original, porém impondo-se um sinal de entrada de valor unitário na mesma localização do fluxo de calor do problema original (S_1) e com temperatura inicial zero.

2.1.2 Problema térmico auxiliar

O problema auxiliar citado anteriormente pode ser descrito como

$$\frac{\partial^2 T^+}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^+}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T^+}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T^+}{\partial t} \quad (7a)$$

na região R ($0 < x < a$, $0 < y < b$, $0 < z < c$) e $t > 0$, sujeito às condições de contorno:

$$\begin{aligned} -k \frac{\partial T^+}{\partial y} \Big|_{y=0} &= 1 \text{ em } S_1 \quad (0 \leq x \leq x_H, \quad 0 \leq z \leq z_H) \\ -k \frac{\partial T^+}{\partial y} \Big|_{y=0} &= 0 \text{ em } S_2 \quad (x, z \in S \mid (x, z) \notin S_1) \end{aligned} \quad (7b)$$

$$\frac{\partial T^+}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial T^+}{\partial x} \Big|_{x=a} = \frac{\partial T^+}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial T^+}{\partial z} \Big|_{z=c} = \frac{\partial T^+}{\partial y} \Big|_{y=b} = 0 \quad (7c)$$

e à condição inicial

$$T^+(x, y, z, 0) = 0 \quad (7d)$$

Analogamente à solução do problema térmico original pode-se obter, usando-se funções de Green, a solução do problema térmico auxiliar

$$T^+(x, y, z, t) = G_h(x, y, z, t - \tau) * 1 \quad (8)$$

uma vez que, $\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$, obtém-se no domínio de Laplace

$$\bar{T}^+(x, y, z, s) = \bar{G}_h(x, y, z, s) \frac{1}{s} \quad (9)$$

Como o sistema dinâmico equivalente é linear, invariante e fisicamente realizável (Bendat & Pierson, 1986) a função resposta $\bar{G}_h(x, y, z, s)$ é a mesma qualquer que seja o conjunto entrada/saída. Logo, da Eq.(9) obtém-se

$$\bar{G}_h(x, y, z, s) = s \bar{T}^+(x, y, z, s) \quad (10)$$

Assim, para a identificação completa de $\bar{G}_h(x, y, z, s)$, resta, portanto, a obtenção de $\bar{T}^+(x, y, z, s)$ em uma determinada posição, ou seja, $\bar{T}^+(r_i, s)$, onde $r_i = (x_i, y_i, z_i)$. Um procedimento simples e eficaz é usado na obtenção de $T^+(r_i, s)$. Baseando-se nos princípios de correlação entre dois sinais ergódicos tipo entrada e saída (Bendat & Pierson, 1986), a função resposta em frequência, $\bar{G}_h(r_i, s)$, pode ser definida em qualquer intervalo de amostragem t_a . Portanto por conveniência se a função $T^+(r_i, s)$ pode ser aproximada por um polinômio no intervalo de amostragem $[0, t_a]$ então, nesse caso, pode-se escrever,

$$T^+(r_i, t) = a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots + \quad (11)$$

Tomando-se a transformada de Laplace da Eq.(11) obtém-se (Ozisik, 1993)

$$\bar{T}^+(r_i, s) = \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_3}{2s^3} + \frac{a_4}{6s^4} + \dots + \quad (12)$$

e portanto da Eq.(10)

$$\bar{G}_h(r_i, s) = s \bar{T}^+(r_i, s) = s \left[\frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_3}{2s^3} + \frac{a_4}{6s^4} + \dots + \right] \quad (13)$$

ou ainda

$$\bar{G}_h(r_i, s) = a_1 + \frac{a_2}{s} + \frac{a_3}{2s^2} + \frac{a_4}{6s^3} + \dots + \quad (14)$$

Uma vez determinado a função $\bar{G}_h(r_i, s)$ resta a obtenção das funções G_Q , G_n e a implementação do algoritmo baseado nos observadores.

2.1.3. Obtenção dos estimadores G_Q , G_N e implementação do algoritmo inverso.

O problema térmico descrito pelas Eqs.(1) pode ser representado por um sistema dinâmico apresentado na Fig. 3 em diagrama de bloco como (Blum and Marquardt, 1997):

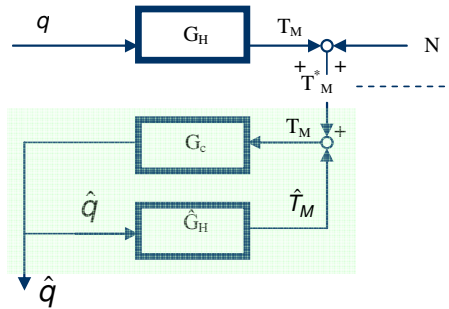


Figura 3. Diagrama de bloco de um sistema dinâmico (Blum & Marquardt, 1997)

Do diagrama de bloco pode-se observar:

i) o fluxo de calor desconhecido aplicado ao condutor G_H , resulta na temperatura medida T_M^* corrompida por um ruído (N),

$$T_M^* = T_M + N = G_H q + N \quad (15)$$

ii) um fluxo de calor estimado $\hat{q}$ é calculado a partir de uma entrada de valores medidos de temperatura T_M^* . O estimador pode então ser representado pela função de transferência em malha fechada,

$$\hat{q} = \frac{G_C}{1 + G_C G_H} T_M^* \quad (16)$$

que caracteriza o comportamento do algoritmo de solução. As funções de transferência do sinal e do ruído, G_Q e G_N respectivamente, são encontradas combinando as Eqs.(15) e (16),

$$\hat{q} = \underbrace{\frac{G_C G_H}{1 + G_C G_H}}_{G_Q} q + \underbrace{\frac{G_C}{1 + G_C G_H}}_{G_N} N \quad (17)$$

Da Equação (17) obtém-se:

$$G_N = G_Q G_H^{-1} \quad \text{ou} \quad |G_N(j\omega)| = \frac{|G_Q(j\omega)|}{|G_H(j\omega)|} \quad (18)$$

Quanto mais rápida for a atenuação de $|G_Q|$ além de ω_c , menor a sensibilidade do algoritmo a ruídos. Desta forma a equação que se refere ao estimador pode ser escrita como,

$$\hat{q}(s) = G_N(s) \times T_M^*(s) \quad (19)$$

Para a obtenção de G_Q opta-se pelo Chebyshev tipo I, pois a resposta da magnitude da frequência cai monotonicamente além da frequência de corte como anteriormente requerido. No domínio de Laplace a função transferência do filtro Chebyshev tipo I assume a seguinte forma:

$$G_Q(s) = \frac{k_{cheb}}{(s - s_{Cheb,1})(s - s_{Cheb,2}) \cdots (s - s_{Cheb,n_Q})} \quad (20)$$

Com o filtro escolhido obtém-se a função de transferência do estimador (G_N), através da relação entre a função transferência do modelo condutor (G_H) e a função transferência do filtro (G_Q), Eq. (19).

A Equação (19) que descreve o estimador pode ser escrita na forma,

$$G_N(s) = \frac{\hat{q}(s)}{T_M^*(s)} \xrightarrow{\text{no domínio Z temos}} G_N = \frac{\sum_{i=0}^{n_n} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{n_n} a_i z^{-i}} \quad (21)$$

obtendo-se os estimadores

$$\hat{q}(k) = \sum_{i=0}^{n_n} b_i T_M^*(k-i) - \sum_{i=1}^{n_n} a_i \hat{q}(k-i) \Rightarrow \text{Equação diferença} \quad (22)$$

$$\hat{q}(k) = \sum_{i=0}^{n_n} b_i q(k-i) - \sum_{i=1}^{n_n} a_i \hat{q}(k-i) \Rightarrow \text{Equação diferença} \quad (23)$$

Assim, é possível se estimar o fluxo desconhecido, a partir das Eqs.(22) e (23). Com os valores medidos de temperatura na posição $x=L$, faz-se uma primeira estimativa do fluxo, através da Eq. (22). Reverte-se a seqüência obtida no tempo e filtra-se este fluxo com a Eq. (23). Revertendo a seqüência de fluxo filtrada, têm-se o fluxo estimado.

2.2. Alterações propostas.

2.2.1. Múltiplos sensores

A técnica inversa baseada em funções de Green e observadores dinâmicos, como visto na seção 2.1.2, tem como base a função resposta do sistema térmico (G_H), que é obtida fazendo-se uso da teoria de funções de Green e da definição de sistemas dinâmicos equivalentes. A função resposta, G_H , é determinada usando-se um sistema térmico auxiliar. A Figura 4 apresenta um modelo térmico 2D e o sistema dinâmico equivalente conforme concebido originalmente. Observa-se que o sistema de uma entrada e uma saída, impossibilita o uso de mais de um termopar.

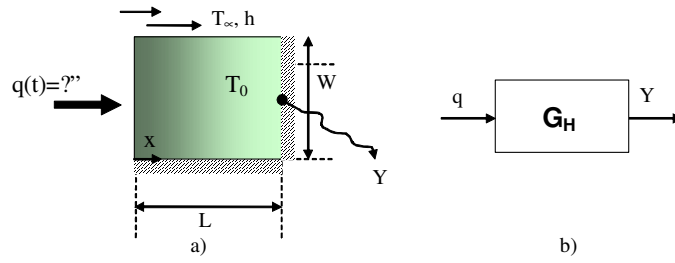


Figura 4. Modelo térmico: a) sistema físico; b) sistema dinâmico tipo uma entrada/ uma saída.

Da teoria de funções de Green sabe-se que o modelo térmico pode ser representado pela equação:

$$T(x, t) = \int_{\tau=0}^t [G_{H1}(x, y, t/\tau) q_1(\tau)] d\tau \quad (24)$$

Desta forma, a partir da evolução da temperatura capturada por um termopar pode-se estimar o fluxo de calor. Entretanto, da teoria de sistemas dinâmicos, sabe-se que um sistema dinâmico pode ser composto por uma entrada e múltiplas saídas, o que analogamente pode ser entendido como sendo um sistema térmico com dois sensores, como mostra a Fig. 5.

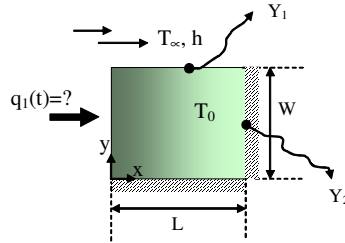


Figura 5. Modelo Térmico 2D – Dois Sensores

Resolvendo o problema por funções de Green tem-se:

$$T(L, W/2, t) = T_1(t) = \int_{\tau=0}^t [G_{H1}(x, y, t/\tau) q_1(\tau)] d\tau \quad (25)$$

$$T(L/2, W, t) = T_2(t) = \int_{\tau=0}^t [G_{H2}(x, y, t/\tau) q_1(\tau)] d\tau \quad (26)$$

Observa-se nas Eqs. (25) e (26) a função de Green para as duas posições onde estão localizados os termopares. Assim é necessário desenvolver uma equação que corresponda às duas saídas simultaneamente. Da teoria de sistemas e controle temos que:

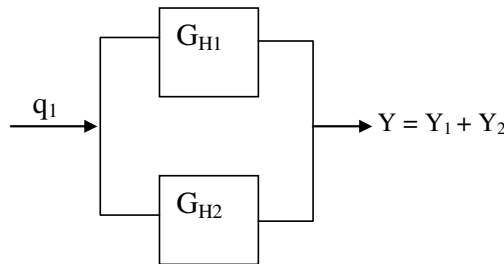


Figura 6. Uma entrada/múltiplas saídas.

Desta forma, pode-se obter uma função de Green que corresponda aos dois sensores. Matematicamente tem-se:

$$Y(t) = T_1(t) + T_2(t) = \int_{\tau=0}^t [G_{H1}(t-\tau) + G_{H2}(t-\tau)] q_1(\tau) d\tau \quad (27)$$

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) = G_{H12}(s) q_1(s) \quad (28)$$

Então para se estimar o fluxo de calor com maior confiabilidade, pode-se fazer uso de mais de um sensor de temperatura. Para isso basta aplicar a Eq. (27).

2.2.2. Função resposta analítica.

Como visto na seção 2.1.2, a função resposta do sistema térmico baseia-se nos princípios de Green e na teoria de sistemas dinâmicos, sendo originalmente obtida via modelo dinâmico. Numericamente a função resposta do sistema térmico é determinada a partir de um problema auxiliar, através do qual se obtém o comportamento discreto da função resposta no tempo que pode ser interpolado obtendo-se uma função. A determinação da função transferência no domínio de Laplace é realizada aplicando-se Laplace diretamente na função resultante da interpolação. Entretanto, é possível se obter a função resposta via modelo térmico.

Assim, se a solução do problema unidimensional transiente, mostrado na Fig 7, é obtida em termos de funções de Green conforme a Eq. (29)

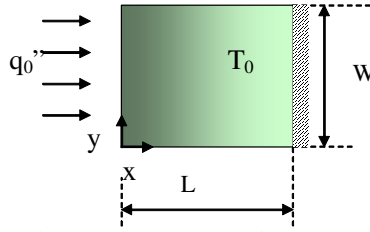


Figura 7. Modelo Térmico 1D.

$$\theta(x, t) - T_0 = \left(\frac{q_0 L}{k} \right) \left[\frac{\alpha}{L^2} t + \left(\frac{1}{3} - \frac{x}{L} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right) - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n \pi x / L) \frac{e^{-B_n t}}{n^2} \right] \quad (29)$$

pode-se escrever

$$\theta_I(x, y, t) - \theta_0 = A_1 q_0 + A_2 q_0 t - \sum_{n=1}^{\infty} A_{2,n} q_0 e^{-B_n t} \quad (30)$$

onde

$$A_1 = \left(\frac{1}{k} \right) \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{x}{L} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right) \right] \quad A_2 = \frac{\alpha}{k L^2}$$

$$A_{3,n} = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n \pi x / L) \frac{1}{n^2} \quad B_n = \frac{n^2 \pi^2 \alpha}{L^2}, \quad n = 1, 2, 3$$

Assim, tem-se

$$\theta_I(x, y, t) - \theta_0 = A_1 q_0 + A_2 q_0 t - \sum_{n=1}^{\infty} A_{2,n} q_0 e^{-B_n t} \quad (31)$$

ou

$$\theta_I(x, y, t) - \theta_0 = q_0 \left(A_1 + A_2 t - \sum_{n=1}^{\infty} A_{2,n} e^{-B_n t} \right) \quad (32)$$

se ainda a transformada de Laplace de uma função $F(t) \Rightarrow \theta(x, y, t) - \theta_0$ é dada por

$$L[F(t)] = \bar{F}(s) = A_1 q_0 \int_0^{\infty} e^{-s t} dt + A_2 q_0 \int_0^{\infty} t e^{-s t} dt - \sum_{n=1}^{\infty} A_{2,n} q_0 \int_0^{\infty} e^{-(s+B_n)t} dt \quad (33)$$

e portanto a Eq.(33) pode ser escrita como

$$\bar{\theta}_I(x, y, s) - \bar{\theta}_0 = A_1 q_0 \frac{1}{s} + A_2 q_0 \frac{1}{s^2} - \sum_{n=1}^{\infty} A_{2,n} q_0 \frac{1}{(s + B_n)} \quad (34)$$

ou ainda

$$\bar{\theta}_I(x, y, s) - \bar{\theta}_0 = q_0 \left[A_1 \frac{1}{s} + A_2 \frac{1}{s^2} - \sum_{m=1}^{\infty} A_{3,n} \frac{1}{(s + B_n)} \right] \quad (35)$$

Portanto substituindo a Eq.(34) na Eq.(13) obtém-se a função transferência como

$$G_{H,s} = s \frac{\bar{\theta}_I(x, y, s) - \bar{\theta}_0}{q_0}$$

$$G_{H,s} = \left[A_1 + \frac{1}{s} A_2 - \sum_{m=1}^{\infty} A_{3,n} \frac{s}{(s + B_n)} \right] \quad (36)$$

Observa-se que como B_n são auto valores positivos, a função $G_H(s)$ não tem qualquer polo para $s > 0$. Desta forma pode-se usar a G_H analítica na técnica inversa.

3. Análise e Discussão de Resultados

3.1. Uso da G_H analítica – Problema 1D.

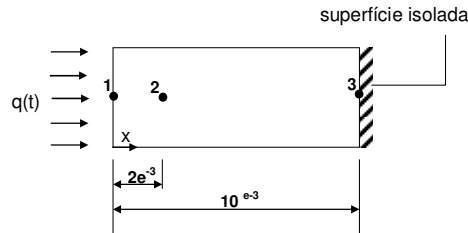


Figura 8. Localização dos sensores

Resolveu-se o problema direto 1D e obteve-se a distribuição de temperatura para as três posições representadas na Fig. 8. A Figura 9 apresenta os perfis de temperatura obtidos numericamente e analiticamente.

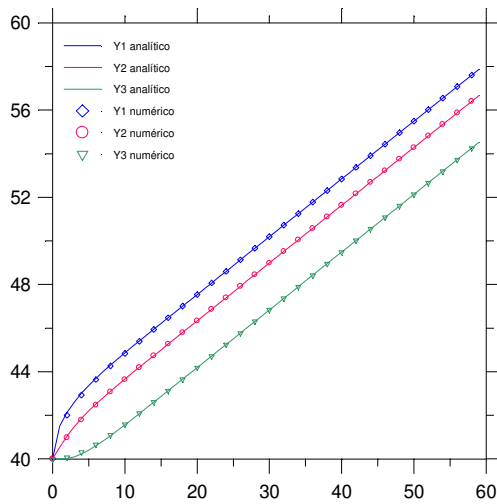


Figura 9. Perfis de Temperatura

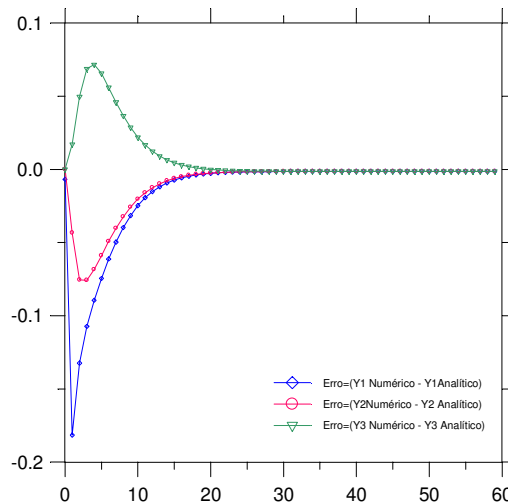


Figura 10. Erro absoluto

Os resultados apresentados nas Figs.(9) e (10) validam ambas soluções. Observa-se que as soluções numérica e analítica apresentam uma pequena distorção para tempos inferiores a 10 s. Este comportamento é esperado devido a características das séries presentes na solução analítica que alcançam uma melhor convergência para tempos maiores. De posse da solução analítica, obtém-se a função transferência para o modelo térmico. A Fig. (11) mostra a comparação entre a G_H analítica e G_H numérica.

Na Figura 11 observa-se que para uma frequência até 5 rad/s as G_{Hs} são perfeitamente coincidentes. Como na técnica inversa baseada em funções de Green e observadores dinâmicos a frequência de corte para o filtro não é maior que o valor de 5 rad/s, constata-se que o desvio existente a partir de 5 rad/s não interfere no resultado, o que pode ser comprovado pela estimativa do fluxo apresentada a seguir.

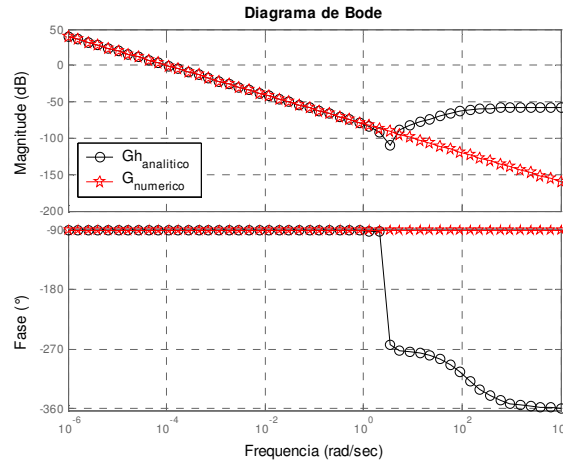


Figura 11. Comparação entre G_{Hs} (analítica x numérica)

A Figura 12, apresenta o esquema do problema inverso 1D. A partir de uma temperatura experimental simulada na posição mostrada na Fig. 12, estima-se o fluxo de calor desconhecido imposto na face oposta usando a técnica baseada em funções de Green e observadores dinâmicos. Ambas G_{Hs} , analítica e numérica, são testadas.

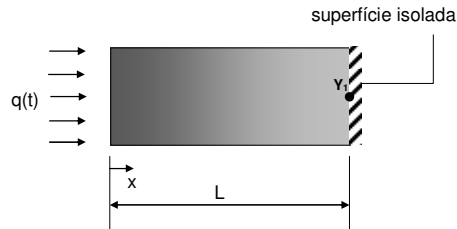


Figura 12. Esquema do problema inverso 1D.

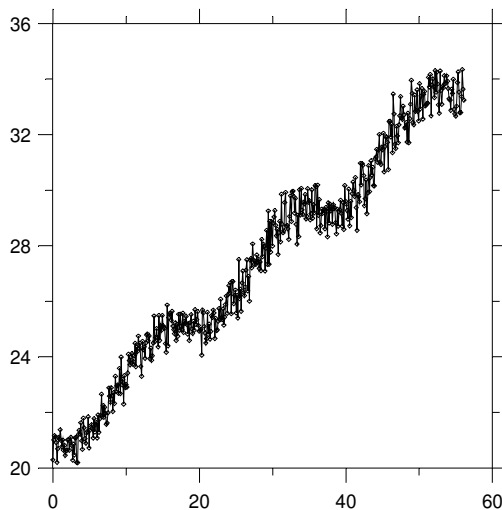


Figura 13. Temperatura experimental (Y_1) simulada com um erro de 1.5 %

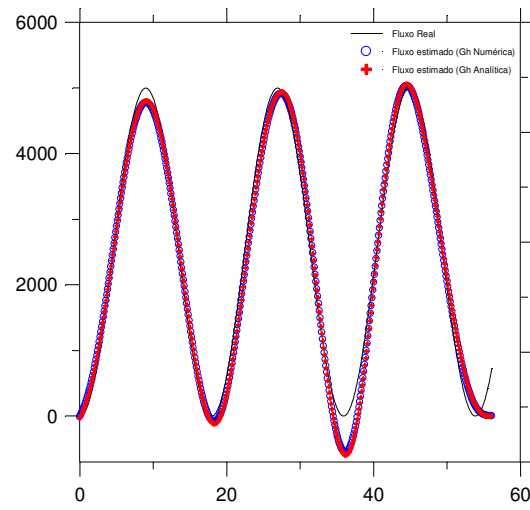


Figura 14. Fluxo de calor estimado

3.2. Uso de múltiplos sensores

Para avaliar a desempenho da técnica inversa ao se trabalhar simultaneamente com vários sensores, estabelece-se uma comparação com o resultado apresentado por Sousa (2006), onde se estimou o fluxo imposto para um caso tridimensional partindo de quatro posições diferentes usadas isoladamente. O esquema do problema 3D é mostrado na seguir, Fig. 15.

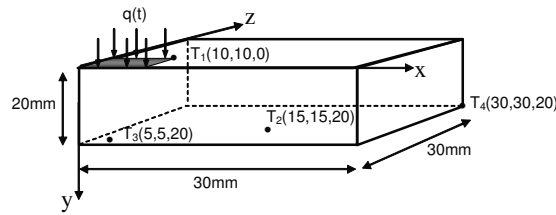


Figura 15. Localização dos sensores. Sousa (2006).

Visando melhorar a robustez da técnica inversa estima-se o fluxo de calor a partir da soma das temperaturas em quatro posições. As Figs. 16 e 17 apresentam as temperaturas medidas por cada termopar e a soma destas temperaturas.

A Figura 18 apresenta o fluxo estimado a partir da soma das temperaturas e os fluxos estimados a partir de cada sensor individualmente. A Fig. 19 mostra o erro absoluto calculado a partir de cada estimativa. Observa-se que o fluxo estimado a partir da soma das temperaturas apresenta menor erro, estando abaixo de 4%.

Entretanto em situações reais existem interferências inerentes aos experimentos que se refletem nos dados de temperatura. Assim estima-se o fluxo de calor para o problema 3D partindo de dados de temperatura corrompidos por um erro da ordem de 1.5%, o que provoca uma flutuação de $\pm 1^\circ\text{C}$ nos dados simulados. As Figuras 20 e 21 mostram as temperaturas corrompidas.

A Figura 22 apresenta o fluxo estimado a partir da soma das temperaturas e os fluxos estimados a partir de cada sensor individualmente. A Fig. 23 apresenta o erro absoluto calculado para cada estimativa, observa-se que o fluxo estimado a partir da soma das temperaturas corrompidas ainda apresenta menor erro.

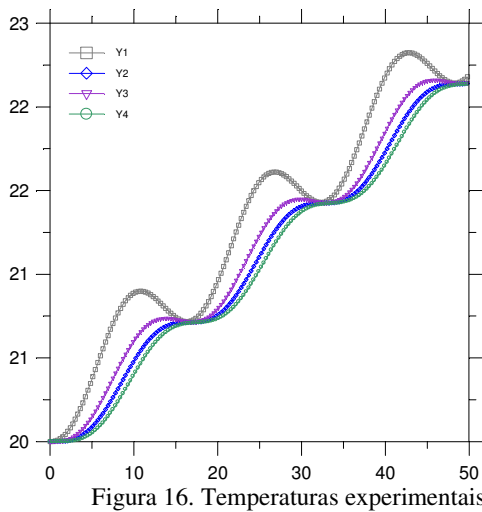


Figura 16. Temperaturas experimentais

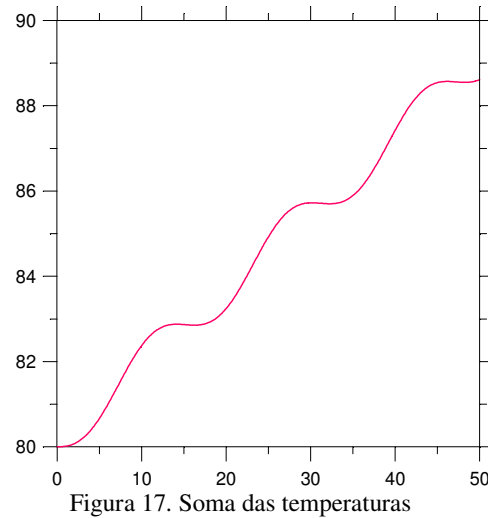


Figura 17. Soma das temperaturas

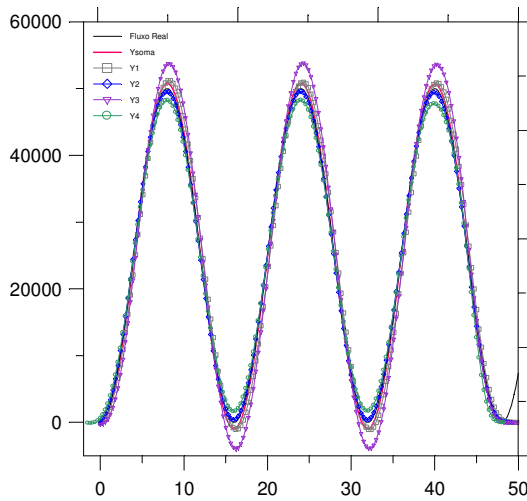


Figura 18. Estimativas do Fluxo

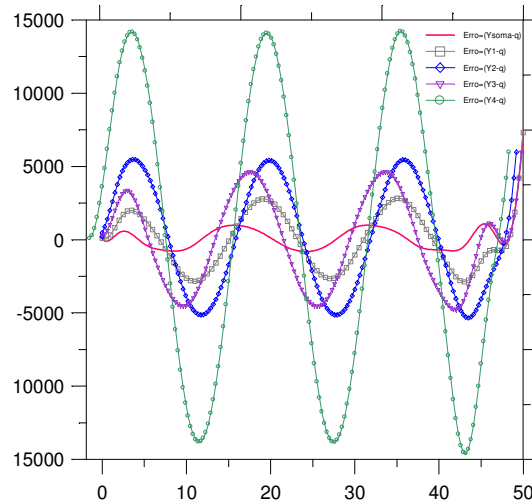


Figura 19. Erro absoluto

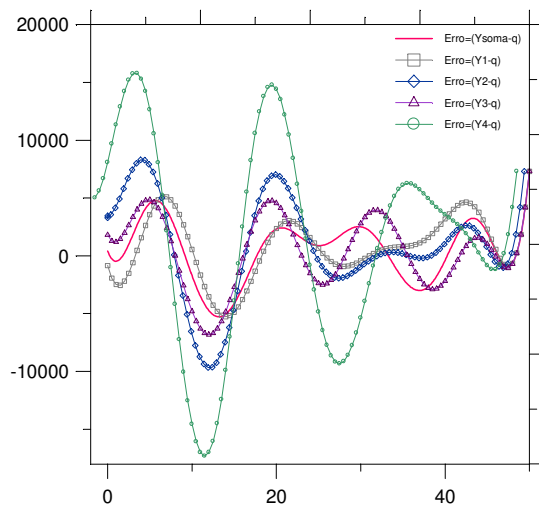
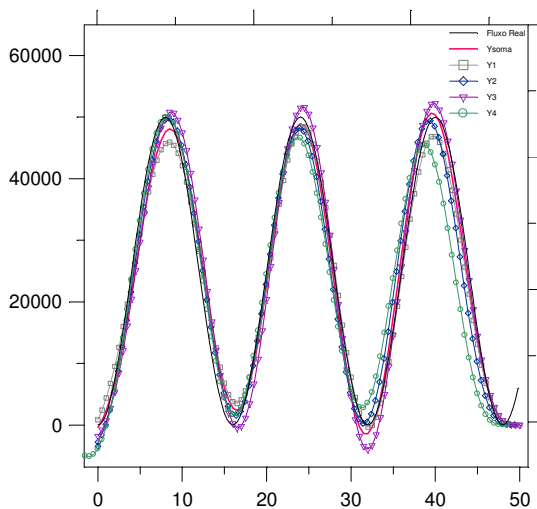
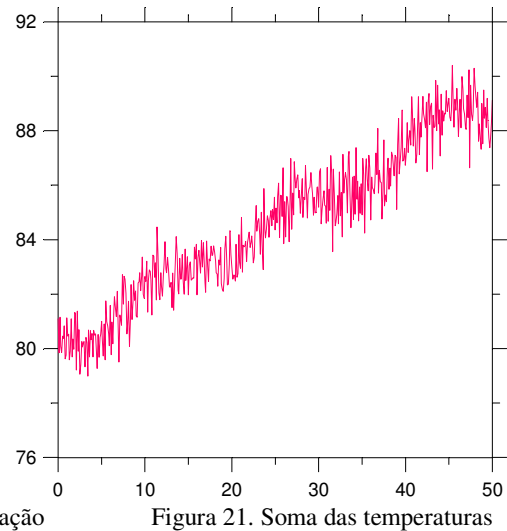
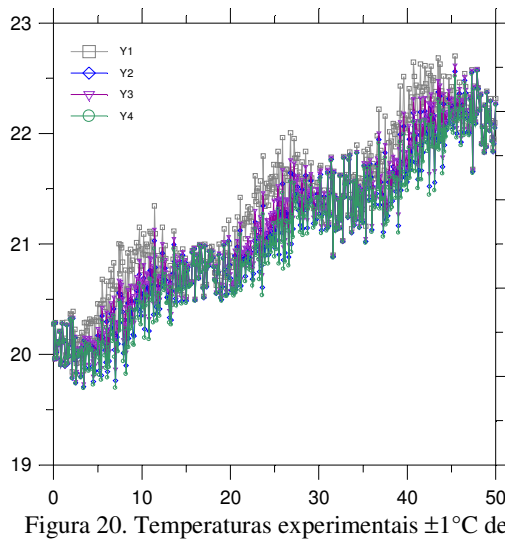


Figura 22. Estimativas do Fluxo

Figura 23. Erro absoluto

4. Conclusão

As alterações propostas melhoram a robustez e a confiabilidade da técnica inversa. A eficiência do uso da técnica inversa aliada tanto à substituição da função de transferência numérica pela analítica quanto à soma das temperaturas captadas por múltiplos sensores pôde ser comprovada nas estimativas de fluxo apresentadas. Mesmo no caso simulado com ruído percebe-se que o erro é pequeno quando se analisa a curva de erro absoluto. O bom desempenho de ambas as alterações sugere a possibilidade de se obter ainda melhores resultados com o uso simultâneo de múltiplos sensores e função transferência analítica. Essa investigação representa o estágio atual desse trabalho.

5. Referência

- Beck, J. V.; Blackwell, J. C. Inverse Heat Conduction. 2.ed., N.Y., John e Sons, 1985. 300p.
- Blum, J.W. Marquardt, W., 1997 "An optimal solution to inverse heat conduction problems based on frequency-domain interpretation and observers", Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals, 32, December 1997, 453-478.
- J. S. Bendat, A.G.Piersol, 1986 "Analysis and Measurement Procedures", Wiley-Interscience, 2nd ed., USA, 1986, p. 566.
- Özisik, M. N., 1993, "Heat Conduction", John Wiley & Sons, New York.
- Sousa, P.F.B, Carvalho, S.R, Guimarães, G., 2006, "Análise Do Desempenho de observadores dinâmicos na investigação de problemas inversos em condução de calor, IV Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, Agosto, Recife-PE
- Sousa, P.F.B, 2006, "Desenvolvimento de uma tecnica baseada em funções de Green e observadores dinamicos para aplicação em problemas inversos", Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.
- Vanderplaats, G.N., 1995, "Design optimization tools, Vanderplaats Research & Development", Inc., Colorado Springs.