

RESOLUÇÃO DE ESCOAMENTOS NÃO PERIÓDICOS UTILIZANDO MÉTODOS PSEUDO-ESPECTRAIS E O MÉTODO DE FRONTEIRA IMERSA

Felipe Pamplona Mariano

Universidade Federal de Uberlândia

Av. João Naves de Ávila, 2160 - Campus Santa Mônica - Bloco 1M - Uberlândia/MG

CEP: 38400-902

fpmariano@mecanica.ufu.br

Leonardo de Queiroz Moreira

lqmoreira@mecanica.ufu.br

Aristeu da Siveira Neto

aristeus@mecanica.ufu.br

Resumo: Os métodos pseudo-espectrais proporcionam uma excelente precisão numérica e, com o desenvolvimento do algoritmo Fast Fourier Transform, apresentam um baixo custo computacional comparado a outros métodos de alta ordem. Porém, este método pode ser aplicado somente em funções periódicas, ou seja, apenas para alguns tipos de escoamentos que tem condições de contorno periódicas. Visando resolver esta restrição acoplou-se a metodologia de Fronteira Imersa ao método pseudo-espectral. Será abordado neste trabalho, os vórtices de Green-Taylor, problema teste bastante utilizado para validar códigos computacionais, e a cavidade com tampa deslizante com diferentes números de Reynolds, demonstrando a possibilidade de resolver um escoamento não-periódico através do método pseudo-espectral de Fourier.

Palavras-chave: Método Pseudo-Espectral, Método da Fronteira Imersa, Vórtices de Green-Taylor, Cavidade com Tampa Deslizante.

1. INTRODUÇÃO

A mecânica de fluidos computacional visa simular escoamentos através de metodologias numéricas de tal forma que represente o mais precisamente possível um fenômeno físico. Porém para conseguir uma boa precisão no cálculo de um escoamento normalmente existe uma demanda de custo computacional elevada.

Uma das metodologias que apresentam uma excelente precisão numérica é a espectral e/ou pseudo-espectral de Fourier, que tem como grande vantagem a utilização da *Fast Fourier Transform* (FFT), algoritmo que calcula as transformadas de Fourier de forma muito eficiente. Porém para utilizar esse algoritmo é necessário que o escoamento seja periódico.

Visando resolver esta restrição foi desenvolvido neste trabalho um procedimento numérico que impondo as condições de contorno através da metodologia da fronteira imersa, escoamentos não-periódicos possam ser resolvidos via métodos pseudo-espectrais de Fourier.

Neste trabalho apresentar-se-á dois casos teste utilizados para a validação do código computacional desenvolvido, o primeiro são os “vórtices de Green-Taylor”, o qual foi resolvido para validar o código pseudo-espectral clássico, ou seja, com condições de contorno periódicas. O segundo caso simulado foi de uma “cavidade bidimensional com tampa deslizante” que serviu para validar o código pseudo-espectral acoplado com a fronteira imersa.

No primeiro caso simulado os resultados foram comparados com a solução analítica proposta por Souza, 2005 e no caso da cavidade os resultados foram comparados com os de Ghia et al, 1982, ambas comparações mostraram boa concordância com suas respectivas referências.

Neste artigo, primeiramente, será mostrado a modelagem matemática e numérica do método, depois os resultados obtidos e por fim as conclusões e perspectivas futuras para continuar o desenvolvimento desse trabalho.

2. MODELO MATEMÁTICO

A modelagem matemática de um código pseudo-espectral começa necessariamente com a definição de transformada de Fourier (TF) e da transformada discreta de Fourier (DFT), após essas breves definições será mostrado o processo de transformação das equações de Navier-Stokes para o espaço espectral, depois será feito uma introdução ao método de fronteira imersa e, por fim, como acoplar o termo-fonte da fronteira imersa nas equações transformadas.

2.1 Transformadas de Fourier

A Transformada de Fourier é definida por 1:

$$\hat{f}_{(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(x)} e^{-i2\pi kx} dx \quad (1)$$

Esta equação representa uma transformação linear de uma função que está no espaço físico $f_{(x)}$ para o espaço espectral ou de Fourier $\hat{f}_{(k)}$, onde k são os números de onda. Existe a operação inversa, a qual é denominada Transformada Inversa de Fourier (2). Ela transforma uma função do espaço espectral para o espaço físico.

$$f_{(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi kx} \hat{f}_{(k)} dk \quad (2)$$

Os métodos numéricos (FFT) utilizados que utilizam essa metodologia têm uma excelente precisão numérica e grande eficiência computacional.

2.2 Transformada Discreta de Fourier

Para trabalhar computacionalmente com a transformada de Fourier utiliza-se a Transformada Discreta de Fourier (DFT), definida em (3).

$$\hat{f}_k = \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} f_n e^{\frac{-i2\pi kn}{N}} \quad (3)$$

A equação (3) é a aproximação numérica da transformada de Fourier dada em (1). Existe também a Transformada Discreta Inversa de Fourier (4)

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \hat{f}_k e^{\frac{i2\pi kn}{N}} \quad (4)$$

A partir de meados de 1960 J. W. Cooley e J. W. Tukey desenvolveram o algoritmo denominado *Fast Fourier Transform* (FFT), o qual torna o cálculo da DFT muito mais eficiente quando comparado com (3), pois o número de operações reduz de $O(N^2)$ para $O(N \log 2N)$. Esse custo computacional reduzido torna atrativa a utilização de métodos espectrais para resolver equações diferenciais parciais.

Outra grande vantagem do método espectral é a precisão numérica, a qual será mostrada mais adiante através da resolução de problemas teste.

Para esse trabalho foi utilizada a subrotina FFTPACK com dupla precisão para números complexos. Ela pode ser encontrada em <http://www.netlib.org/fftpack/>.

2.3 Equações de Navier-Stokes

Partindo das equações de Navier-Stokes bidimensionais para escoamentos incompressíveis (equações 5 e 6):

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (5)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (6)$$

Onde:

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x_i}$$

p^* : pressão;

u : velocidade ;

ρ : densidade;

ν : viscosidade cinemática;

x : componente espacial;

t : tempo.

As condições de contorno foram impostas com a metodologia da Fronteira Imersa (Peskin, 1977), através do modelo físico virtual (Lima e Silva, 2002), adicionando a equação (5) um termo forçante, que faz o papel de uma força de corpo imposta no escoamento (Goldstein, 1992). Para o cálculo da pressão adotou-se o método da projeção.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i \quad (7)$$

Onde:

$$f_i = \frac{1}{\rho} f_i^*$$

f_i^* : termo forçante

Transformando a equação (7) e aplicando as propriedades das Transformadas de Fourier, temos:

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial(\widehat{u_i u_j})}{\partial x_j} = -ik_i \hat{p} - \nu k_j \hat{u}_i + \hat{f}_i \quad (8)$$

Neste trabalho optou-se pelo método da projeção (Silveira Neto, 2002) para resolver a equação 8. Este método avalia a equação de Navier-Stokes transformada (equação 8) independentemente do conceito da pressão (p). Definindo um tensor projeção ($\mathcal{P}$):

$$\left[\frac{\partial \widehat{u_i u_j}}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} - \hat{f}_i \right] = \mathcal{P} \left[\frac{\partial \widehat{u_i u_j}}{\partial x_j} - \hat{f}_i \right] \quad (9)$$

Concluí-se de 9 que a soma dos vetores transformados do gradiente de pressão, do termo não-linear e do termo forçante é a projeção do termo não-linear e do termo forçante.

Portanto as equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis assumem a seguinte forma no espaço de Fourier:

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} = -k_j^2 \nu \hat{u}_i + \mathcal{P} \left[\hat{f}_i - \frac{\partial \hat{u}_i \hat{u}_j}{\partial x_j} \right] \quad (10)$$

O campo de pressão pode ser obtido subtraindo os termos não-linear e forçante não projetados da soma dos termos não-linear e forçante projetados (equação 9).

2.4 Tratamento do Termo Não-Linear

O termo não-linear pode ser tratado de diferentes formas: advectiva, divergente, skew-simétrica e rotacional, apesar de serem matematicamente idênticas, quando assume-se $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, apresentam diferentes propriedades quando discretizadas.

De acordo com Souza, 2005 uma boa maneira de tratar o termo não-linear é utilizar a forma skew-simétrica alternada, ou seja, simula-se o termo não-linear alternando entre as formas advectiva e divergente em sucessivos passos de tempo.

É importante salientar que o termo não-linear para ser transformado para o espaço espectral deve passar pela resolução de uma integral de convolução, pois se trata de uma multiplicação de duas funções transformadas. A resolução dessa integral é inviável computacionalmente. O procedimento adotado para resolver esse inconveniente é o método pseudo-espectral. Ele resolve o produto $\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}$ e $\nabla \cdot (\vec{u} \vec{u})$ no espaço físico e depois os transforma para o espaço de Fourier.

3. Resultados

3.1 Vórtices de Green-Taylor

O primeiro caso simulado foi os *vórtices de Green-Taylor*, caso teste muito utilizado para validação de códigos numéricos. Os vórtices de Green-Taylor apresentam condições de contorno periódicas para u, v e p equações 11, 12 e 13 e figuras 1, 3 e 5:

$$u = -U_\infty \cos(x) \cdot \sin(y) \cdot e^{-2 \cdot t \cdot \nu} \quad (11)$$

$$v = U_\infty \sin(x) \cdot \cos(y) \cdot e^{-2 \cdot t \cdot \nu} \quad (12)$$

$$p = \frac{U_\infty}{4} \cdot [\cos(2x) + \cos(2y)] \cdot e^{4 \cdot t \cdot \nu} \quad (13)$$

Obtêm-se o termo forçante para a equação 7 derivando as equações 11, 12 e 13:

$$f_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{\nu} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (14)$$

A partir da equação 10 com o termo forçante sendo avaliado pela equação 14 fez-se três simulações para diferentes números de nós de colocação 64x64, 128x128 e 256x256. O passo de tempo foi de 0,0005 s de forma que o erro do tempo de discretização possa ser considerado desprezível em relação ao erro espacial, para o avanço temporal foi utilizado o esquema de Adams-Bashforth de terceira ordem. O número de Reynolds, definido por $Re = U_\infty L_x / \nu$, é igual a 1000.

Foi calculado o erro através do desvio padrão das componentes de velocidade e pressão calculadas a partir de sua solução exata (equação 11, 12 e 13). Utilizou-se os mesmo parâmetro que Souza, 2005.

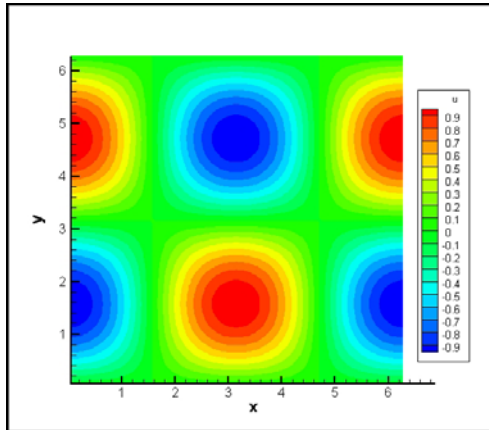


Figura 1: Componente horizontal de velocidade com 128^2 nós de colocação.

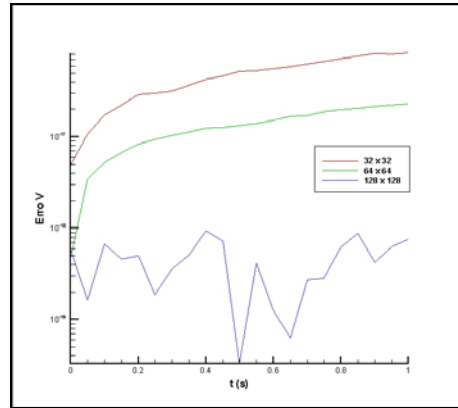


Figura 2: Comparação do erro da componente de velocidade horizontal para diferentes números de pontos de colocação.

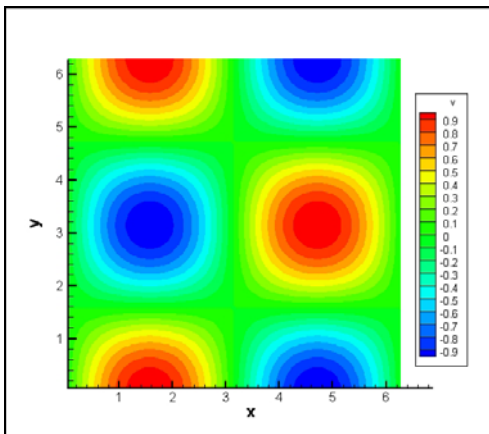


Figura 3: Componente vertical de velocidade com 128^2 nós de colocação.

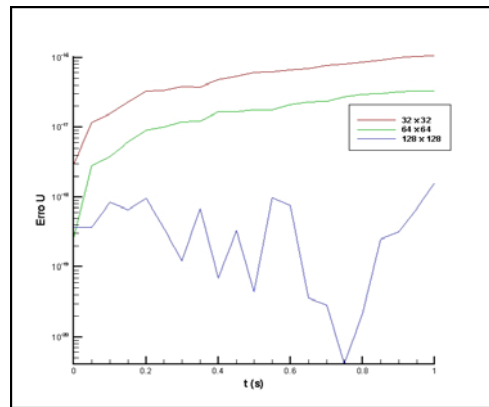


Figura 4: Comparação do erro da componente de velocidade vertical para diferentes números de pontos de colocação.

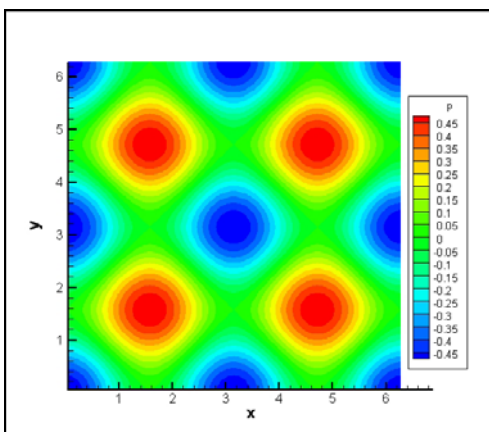


Figura 5: Campo de pressão "P" com 128^2 nós de colocação.

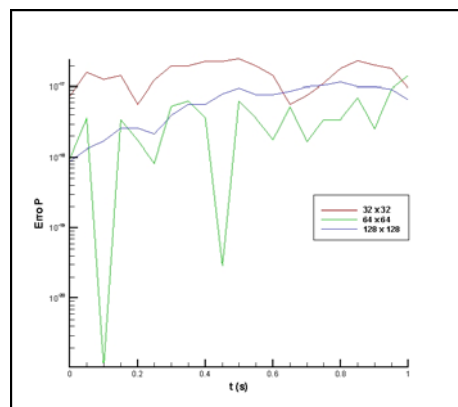


Figura 6: Comparação do Erro do campo de pressão para diferentes números de pontos de colocação.

Os vórtices de Green-Taylor são funções que não apresentam descontinuidade e são periódicas em todas as suas direções, com isso a ordem do erro calculado em função do tempo varia entre 10^{-16} a 10^{-20} (Figuras 2, 4 e 6). Souza, 2005 chegou à ordem de grandeza de 10^{-15} .

3.2 Fronteira Imersa

Como discutido anteriormente, os métodos espectrais e pseudo-espectrais de Fourier resolvem apenas escoamentos periódicos, ou a direção do escoamento que é periódica. Visando resolver esse inconveniente aplica-se a metodologia de fronteira imersa, a qual avalia o termo-forçante nos pontos lagrangianos através da equação 14. O procedimento para esse cálculo é o seguinte:

- Primeiramente, traz para o espaço físico o campo de velocidade euleriano;
- Cria-se um campo de velocidade lagrangiano igual ao campo de velocidade euleriano;
- Impõem-se as condições de contorno no campo lagrangiano;
- Transforma-se o campo lagrangiano para o espaço de Fourier;
- Calcula-se as derivadas necessária para o lado direito da equação 14 utilizando o campo lagrangiano transformado.

Após as derivadas calculadas existem dois caminhos que podem ser seguidos, ambos tentam evitar o fenômeno de Gibbs que surge devido à descontinuidade imposta pelas condições de contorno, o primeiro é utilizar uma função distribuição, no presente trabalho adotou-se a utilizada por Lima e Silva (2002), cujo termo fonte da Equação 7 é obtido através da distribuição das componentes do vetor força interfacial lagrangiana. Esta função distribuição transforma uma função concentrada em um ponto (delta de Dirac) em uma função gaussiana, mostrada na figura 7.

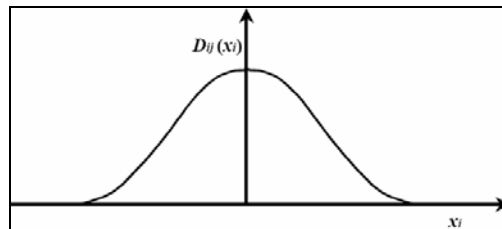


Figura 7: Função distribuição do tipo gaussiana proposta por (Lima e Silva, 2002).

No presente trabalho os pontos lagrangianos são coincidentes com a malha euleriana permitindo assim resolver o escoamento sem a função distribuição, assim sendo, uma segunda maneira de evitar o fenômeno de Gibbs é utilizar esquemas de filtragem. Utilizou-se os filtros de Lanczos e Sharpened Raised Cosine (Canuto, 1986) para filtrar o termo forçante em uma tentativa de anular o fenômeno de Gibbs.

3.2.1 Cavidade com tampa deslizante

O segundo caso simulado foi uma cavidade bidimensional com tampa deslizante. Este escoamento é outro teste muito utilizado para validação de códigos numéricos. Simulou-se a cavidade com tampa deslizante à Reynolds 100 com diferentes tipos de filtragem e também com diferentes números de Reynolds (100, 400 e 1000), comparando os resultados com dados da literatura.

O esquema de avanço temporal para todas as simulações foi o de Adams-Bashforth de terceira ordem. A malha utilizada, para os casos de $Re=100$ e $Re=400$ no domínio externo foi de 256×256 e no domínio interno (cavidade) foi de 128×128 nós de colocação. Para $Re=1000$ a malha externa utilizada foi de 256×128 e a interna de 64×64 , neste caso também foi utilizada uma zona de buffer (Huang, 2004) com a finalidade de amortecer os vórtices externos na saída do domínio.

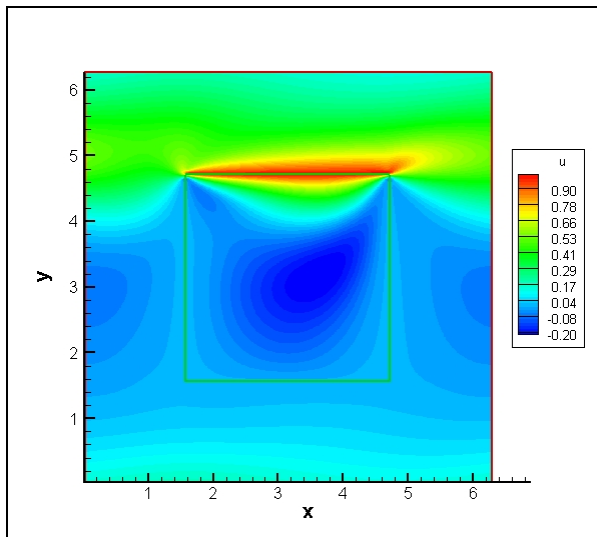


Figura 8: Componente horizontal de velocidade, $Re=100$.

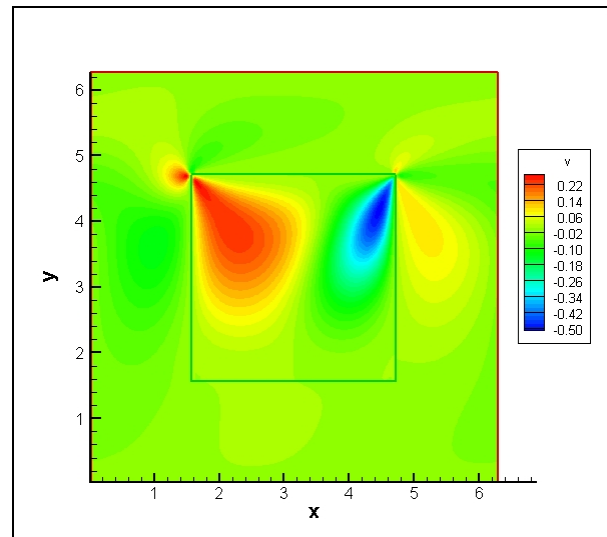


Figura 9: Componente vertical de velocidade, $Re=100$.

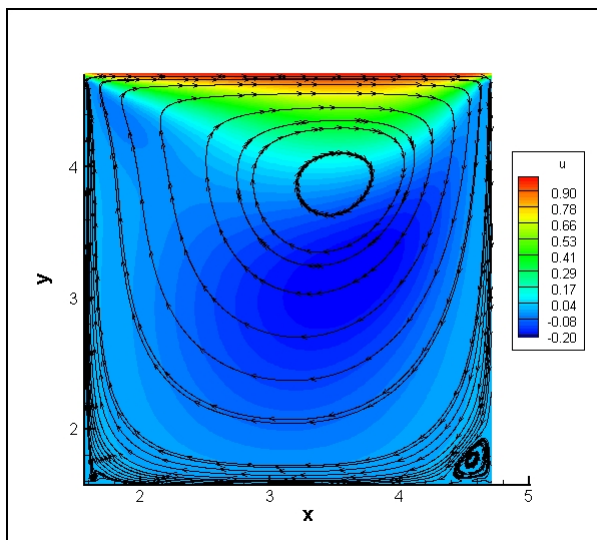


Figura 10: Linhas de corrente para $Re=100$.

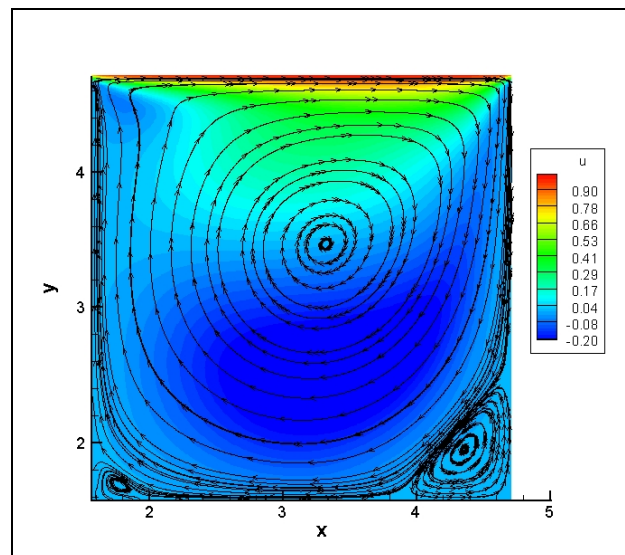


Figura 11: Linhas de corrente para $Re=400$.

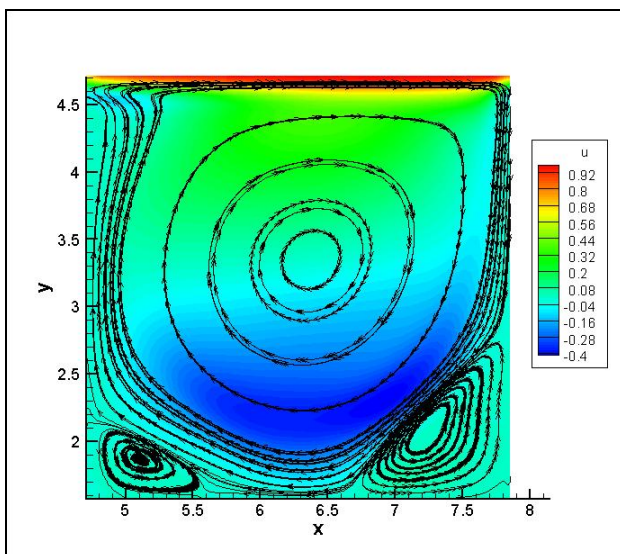


Figura 12: Linhas de corrente para $Re=1000$.

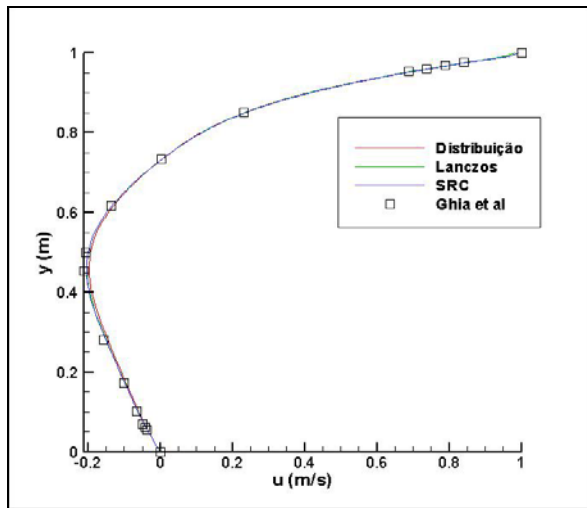


Figura 13: Perfil de velocidade "U", $Re=100$ comparação entre filtro de Lanczos, "Sharpenned Raised Cosine" e função Distribuição.

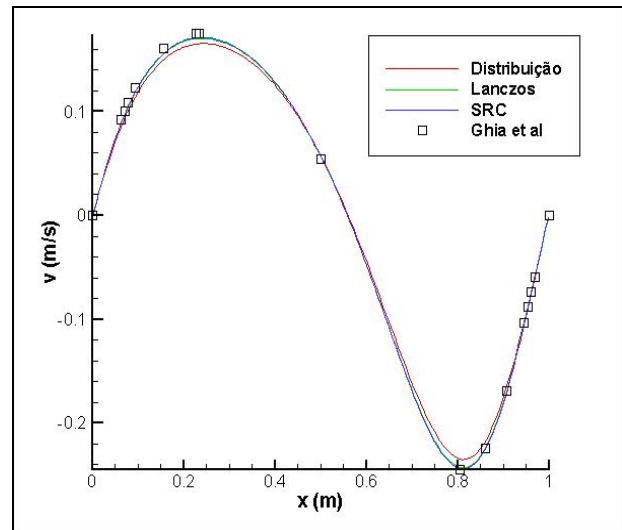


Figura 14: Perfil de velocidade "V", $Re=100$ comparação entre filtro de Lanczos, "Sharpenned Raised Cosine" e função Distribuição.

As figuras 10, 11 e 12 mostram as linhas de corrente para cavidades bidimensionais com diferentes números de Reynolds 100, 400 e 1000, respectivamente. As linhas de corrente estão de acordo com os resultados de Ghia et al. 1982, todas elas mostram a recirculação no centro da cavidade e as recirculações secundárias que aparecem nos cantos inferiores da cavidade.

Os perfis de velocidade horizontal (u) levantado em $x=0,5m$ e vertical (v), levantado em $y=0,5m$, também apresentam uma boa concordância com os perfis de Ghia et al, 1982, para os diferentes números de Reynolds simulados figuras 13, 14, 15, 16, 17 e 18.

As figuras 13 e 14 mostram a comparação feita entre os diferentes esquemas de filtragem e a utilização da função distribuição (figura 9), observa-se que para esse caso (cavidade com tampa deslizante) em que os pontos lagrangianos coincidem com os pontos eulerianos, a não utilização da função distribuição aproximou os perfis de velocidade do perfil de referência, mostrando que a filtragem é mais precisa, além de ser uma operação numérica mais barata que a função distribuição.

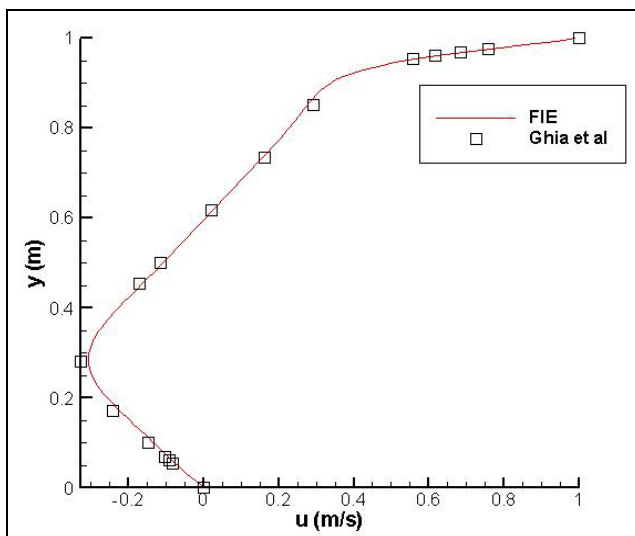


Figura 15: Perfil de velocidade "U" do presente trabalho (Fronteira Imersa Espectral - FIE) e o de Ghia et al, para $Re=400$.

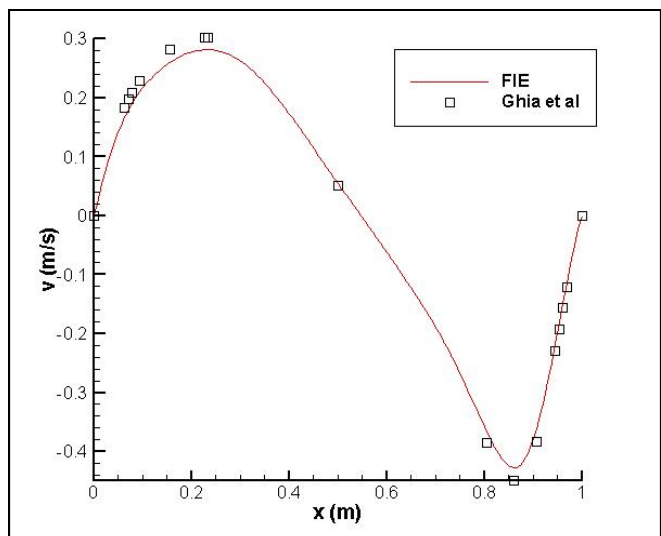


Figura 16: Perfil de velocidade "V" do presente trabalho (Fronteira Imersa Espectral - FIE) e o de Ghia et al, para $Re=400$.

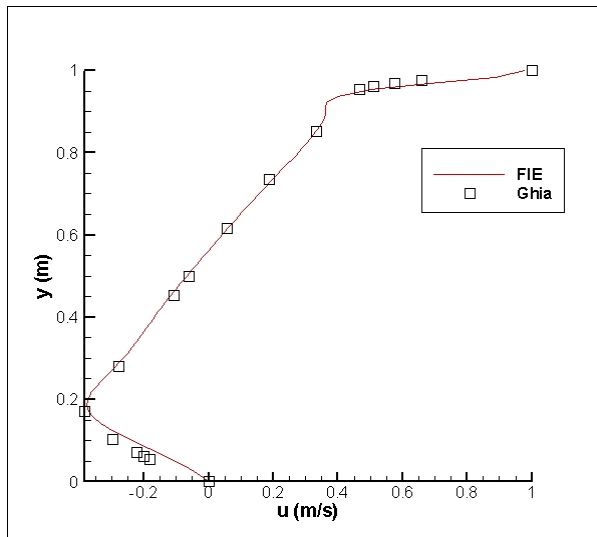


Figura 17: Perfil de velocidade "U" do presente trabalho (Fronteira Imersa Espectral - FIE) e o de Ghia et al, para $Re=1000$.

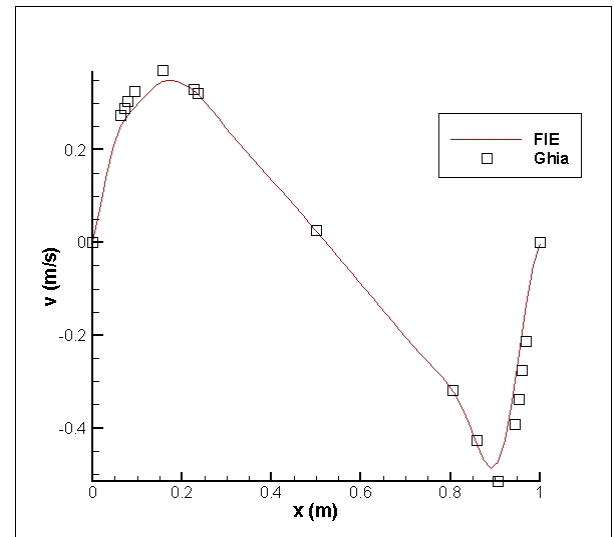


Figura 18: Perfil de velocidade "V" do presente trabalho (Fronteira Imersa Espectral - FIE) e o de Ghia et al, para $Re=1000$.

4. CONCLUSÃO

Os resultados obtidos com os vórtices de Green-Taylor mostram a excelente precisão numérica dos métodos pseudo-espectrais, chegando a apresentar erros da ordem de 10^{-16} . Além de ser um método de fácil implementação. É importante observar que o esquema de avanço temporal deve ser de ordem elevada, para não interferir na resolução espacial. Neste caso utilizou-se Adams-Bashfort de terceira ordem.

No caso da cavidade com tampa deslizante também atingiu-se bons resultados quando comparados com os da referência. As condições de contorno foram impostas através da metodologia da fronteira imersa, ou seja, através de um termo forçante adicionado às equações de Navier-Stokes, porém deve ficar claro que é possível resolver esse problema impondo diretamente as condições de contorno no escoamento. A vantagem de impor as condições de contorno via campo de força é a estabilidade numérica, os cálculos com Reynolds maiores que 100 se tornaram muito instáveis com a imposição direta das condições de contorno. Outro ponto importante é a não utilização da função distribuição quando os nós lagrangianos coincidem com os eulerianos, este procedimento melhora de sobremaneira os resultados além de tornar os cálculos mais rápidos.

É interessante destacar também o tempo de gasto no cálculo, para os casos da cavidade com 128×128 pontos do domínio interno, foram gastos aproximadamente 36 horas, tempo relativamente baixo quando comparado com métodos de alta ordem de resolução.

5. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a CAPES e a FAPEMIG pelo apoio financeiro e a FEMEC e ao LTCM pela infra-estrutura dada para a realização desse trabalho.

6. REFERÊNCIAS

- Briggs, W. L. and Henson, V. E., 1995, "The DFT", Siam, Philadelphia, USA.
- Canuto, C, Hussaini, M. Y., Quarteroni, A. and Zang, T. A., 1986, "Spectral Methods in Fluid Dynamics", Springer Verlag, Berlin, AL.
- Don, W. S., Gottlieb, D., Shu, C. W., 2002, "Numerical Convergence Study of Nearly-Incompressible, Inviscid Taylor-Green Vortex Flow", Providence, USA.

- Ghia, U., Ghia, K. N. and Shin, C. T., 1982, "High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method", Cincinnati, USA.
- Goldstein, D., Handler, R. and Sirovich, L., 1992, "Modeling a No-Slip Flow Boundary with an External Force Field", Brown, USA.
- Huang, X. and Zhang, X., 2004, "A Fourier Pseudospectral Method for Some Computational Aeroacoustic Problems", Southampton, UK.
- Lima e Silva, A. L. F., 2002, "Desenvolvimento e Implementação de uma Nova Metodologia para Modelagem de Escoamentos Sobre Geometrias Complexas: Método da Fronteira Imersa com Modelo Físico Virtual", Uberlândia, BR.
- Peskin, C. S., 2002, "The Immersed Boundary Method", New York, USA.
- Silveira Neto, A., 2002, "Turbulência nos Fluidos Aplicada", Uberlândia, BR.
- Souza, A. M., 2005, "Análise Numérica da Transição à Turbulência em Escoamentos de Jatos Circulares Livres", Uberlândia, BR.

RESOLUTION OF NON-PERIODICS FLOWS USING THE PSEUDO SPECTRAL METHODS AND THE IMMERSED BOUDANRY METHODS

Felipe Pamplona Mariano

Universidade Federal de Uberlândia

Av. João Naves de Ávila, 2160 - Campus Santa Mônica - Bloco 1M - Uberlândia/MG

CEP: 38400-902

fpmariano@mecanica.ufu.br

Leonardo de Queiroz Moreira

lqmoreira@mecanica.ufu.br

Aristeu da Siveira Neto

aristeus@mecanica.ufu.br

Abstract: *Pseudo spectral methods provide an excellent numerical accuracy and with the development of the Fast Fourier Transform algorithm, it presents a low computational cost in comparison to others high-order methods. Nevertheless this method can be only applied in periodic boundaries flows. Aiming to solve this restriction, the immersed boundary method was linked to the pseudo spectral method. It will be approached in this work the Green-Taylor Vortex, testing problem highly used to validate computational code, and the Driven Cavity Flow with different Reynolds' numbers, demonstrating the possibility of solving non-periodic flows through the Fourier pseudo spectral method.*

Keywords: *Pseudo Spectral Method, Immersed Boundary Method, Green-Taylor Vortex, Driven Cavity.*