

SOLUÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA DE ADVECÇÃO/DIFUSÃO DE UM PULSO PARA COMPARAÇÃO DE DUAS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO

Fábio Alfaia da Cunha

Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia, Departamento de Engenharia Mecânica, 70910-900
fabioalfaia@yahoo.com.br

Carlos Alberto Gurgel Veras

Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia, Departamento de Engenharia Mecânica, 70910-900
gurgel@unb.br

Resumo: Neste trabalho a solução numérica do problema de advecção/difusão de um pulso é obtida utilizando duas funções de interpolação diferentes. A técnica numérica de volumes de controle baseada em elementos foi utilizada neste trabalho. Esta metodologia utiliza tradicionalmente uma função de interpolação exponencial, orientada na direção do escoamento, chamada FLO no termo advectivo, porém em trabalhos recentes é demonstrado que o uso de uma função de interpolação linear em tal termo produz melhores resultados no caso de escoamentos laminares. Por isso, neste trabalho, para o problema de advecção/difusão de um pulso, para diferentes valores de número de Reynolds e malhas, varias simulações foram realizadas e os resultados obtidos são comparados entre si e também com relação a uma solução analítica aproximada para o caso.

Palavras-chave: CVFEM, função de interpolação, advecção/difusão de um pulso.

1. INTRODUÇÃO

Cada vez mais problemas complexos de mecânica dos fluidos podem ser resolvidos de maneira numérica. A utilização de técnicas numéricas robustas na solução de tais problemas é imprescindível. As técnicas que utilizam malhas não estruturadas estão sendo cada vez utilizadas devido a maior flexibilidade que estas apresentam na discretização de domínios complexos (Maliska, 2004). A técnica que será utilizada neste trabalho é a técnica de volumes de controle baseada em elementos (Control Volume Finite Element Method, CVFEM). Trabalhos pioneiros com esta técnica são os de Baliga (1978) e Baliga e Patankar (1980). A partir destes trabalhos a técnica se consolidou nos anos que seguiram com a contribuição de muitos outros pesquisadores. O CVFEM é um método de volumes finitos que utiliza malhas não estruturadas, construídas com base em elementos triangulares, gerados principalmente por triangulação de Delaunay (Mavriplis, 1990).

As funções de interpolação utilizadas em CVFEM foram alvo de muitos estudos. Na proposta apresentada em Baliga e Patankar (1980) a função de interpolação considerava os efeitos de advecção/difusão e era aplicada na direção média do escoamento, tal função foi chamada de FLO (flow oriented interpolation). Com o objetivo de melhorar a função FLO para escoamentos onde os termos de fonte fossem importantes em Prakash (1986) foi proposta uma versão de esquema de interpolação que considera os efeitos dos termos de fonte, tal função foi chamada de FLOS (flow oriented interpolation with sources effects).

Até aquele momento procurava-se propor funções de interpolação gerais, que respondesse por todos os efeitos: difusivos, advectivos e de fonte. Porém, no trabalho de Saabas e Baliga (1994), onde é conduzido um estudo detalhado sobre esquemas de interpolação, verifica-se que mesmo em casos onde os efeitos dos termos de fonte são importantes, o esquema FLOS não fornece resultados melhores que o esquema FLO. Além disso, uma função de interpolação linear passa a ser utilizada nos termos difusivos e o esquema FLO é utilizado apenas nos termos advectivos. Com isso, a idéia de uma única função de interpolação para tratar de todos os termos é abandonada e a forma final do esquema FLO, utilizado apenas no termo advectivo, é consolidada.

No trabalho de Abbassi *et al* (2003) é relatado que o esquema de interpolação FLO não deveria ser utilizado em casos de escoamentos laminares. Segundo o autor a melhor escolha seria o esquema de interpolação linear nos termos advectivos, apesar deste não levar em conta a direção do escoamento. O estudo apresentado por Abbassi *et al* (2003) não poderia ser totalmente conclusivo, uma vez que um número reduzido de problemas foi considerado.

Neste trabalho o problema advecção/difusão de um pulso foi escolhido com o objetivo de comparar soluções numéricas obtidas com as funções de interpolação FLO e LI. A solução exata para o caso $Re \rightarrow \infty$ é conhecida e também uma solução analítica aproximada apresentada em Raithby (1976) será utilizada como referência.

2. EQUAÇÃO GOVERNANTE

A equação de conservação de um escalar qualquer, ϕ , considerando o caso bidimensional em um sistema de coordenadas cartesianas, pode ser escrita na forma da equação (1). O escalar neste caso pode ser temperatura ou concentração de uma determinada espécie química. A resolução de tal equação depende do conhecimento do campo de escoamento.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u\phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v\phi) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + S^\phi \quad (1)$$

Onde Γ^ϕ é o coeficiente difusivo, S^ϕ representa o termo fonte, ρ é a massa específica do fluido, t é o tempo u e v são as componentes de velocidade nas direções x e y , respectivamente.

3. DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO E FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO

Quando se utiliza uma técnica numérica os cálculos são realizados apenas em certos pontos do domínio de cálculo. No método aqui utilizado as malhas de elementos são gerada por triangulação de Delaunay e a malha de volumes de controle é obtida pela aplicação do método das medianas. Na figura 1(a) é apresentada uma malha de elementos, onde os volumes são destacados pelas linhas negras. Cada volume de controle possui um nó central. Na figura 1(b) é mostrado um elemento isolado com um sistema coordenadas localizado no centróide do elemento orientado na direção do escoamento médio, tal como utilizado no esquema de interpolação FLO.

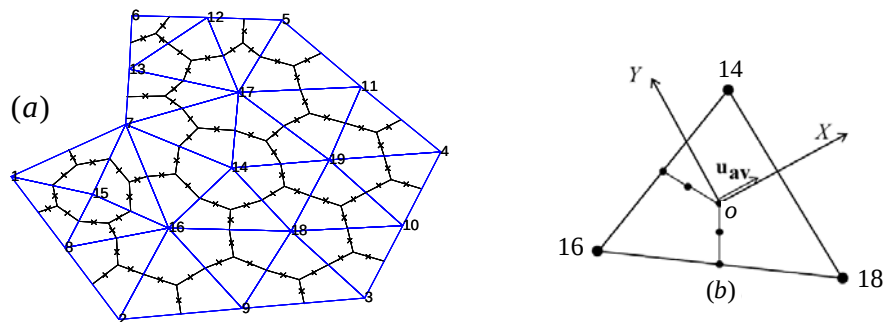


Figura 1. Malha típica obtida por triangulação (a) e um elemento destacado da malha (b).

3.1 Função de Interpolação

Quando se utiliza uma técnica numérica, os cálculos são realizados apenas em certos pontos do domínio de cálculo, dados pela malha. As funções de interpolação possibilitam que os cálculos sejam efetuados nos demais pontos do domínio. Se o problema não é unidimensional dificilmente poderá ser obtida uma função de interpolação que represente de maneira exata um certo fenômeno, logo as funções de interpolação forneceram apenas valores aproximados. Uma maneira simples de obter os valores de ϕ em qualquer pontos dentro de um elemento e através de interpolação linear. O esquema de interpolação linear, LI, pode ser escrito como:

$$\phi = AX + BY + C$$

Deve-se notar que os valores de ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 nos pontos nodais podem ser utilizados para determinação das constantes.

No caso do esquema FLO um sistema local de coordenadas é colocado no centróide do elemento, figura 1(b), cuja direção X é alinhada com o escoamento médio do elemento. O esquema de interpolação FLO é dado por:

$$\phi_c = A\xi + BY + C \quad (1)$$

Com:

$$\xi = \frac{\Gamma_\phi}{\rho u_{av}} \left\{ \exp \left[\frac{Pe(X - X_{\max})}{X_{\max} - X_{\min}} \right] - 1 \right\}$$

Pe é o número de Peclet do elemento dado por: $Pe = \rho u_{av} (X_{\max} - X_{\min}) / \Gamma_\phi$.

O comprimento característico, $X_{\max} - X_{\min}$, do elemento é dado por:

$$X_{\max} = \max(X_1, X_2, X_3) \text{ e } X_{\min} = \min(X_1, X_2, X_3)$$

A velocidade média do elemento é calculada como:

$$u_{av} = \sqrt{u_m^2 + v_m^2}$$

Onde u_m e v_m são as velocidades médias do elemento.

Para maiores detalhes, envolvendo desde a descrição geral do método até a discretização das equações, recomenda-se consultar Baliga e Patankar (1988).

3.2 Características das Malhas Utilizadas.

A título de exemplo, duas malhas são mostradas na figura 2. Os volumes são destacados pelas linhas pretas. As malhas utilizadas nas simulações do presente trabalho apresentam a mesma organização dos elementos das malhas exemplificadas. A única diferença é que as malhas utilizadas são mais finas, possuem aproximadamente 2400 volumes finitos cada uma. A malha 1 possui os volumes alinhados com o escoamento, já a malha 2 apresenta distribuição aleatória dos volumes. As malhas utilizadas rotineiramente na solução de problemas práticos são similares a malha 2.

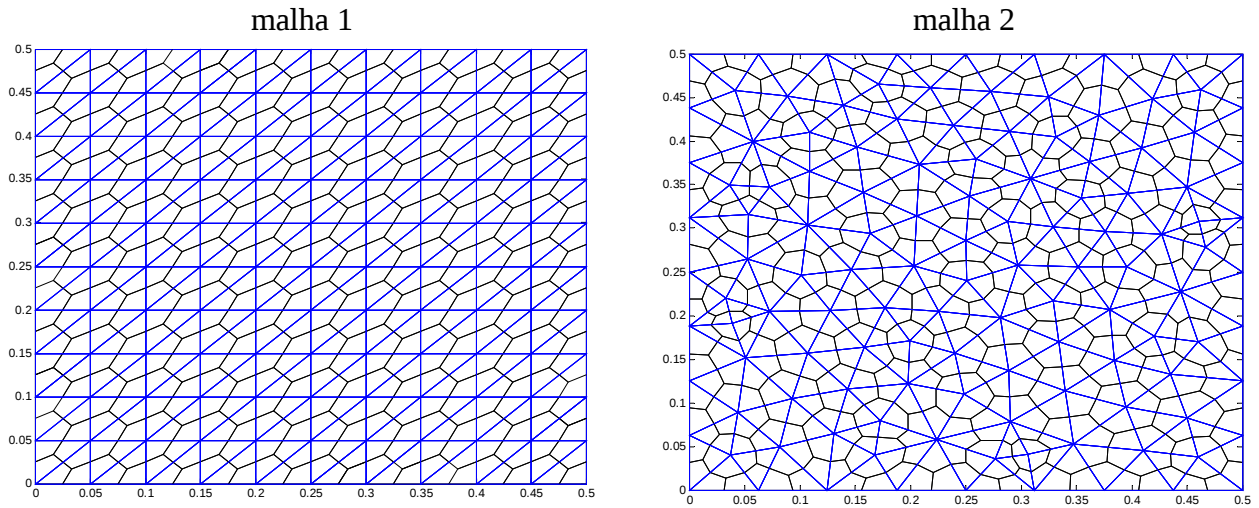


Figura 2. Malhas utilizadas nos cálculos.

4. RESULTADOS

O problema de advecção/difusão de um pulso é ilustrado na figura 3. A equação (1) modela o problema em questão, neste trabalho ela foi resolvida desconsiderando os termos de variação temporal e de fonte. Todos os casos foram simulados em duas malhas diferentes, porém com igual número de volumes. O ângulo de inclinação do vetor velocidade igual a 45° . As condições de contorno são identificadas na figura 3. Foi adotado $L=0,5$ e Γ^ϕ e ρ unitários. A linha de resultados possui $x=0,25$ e y variando de 0 a 0,5.

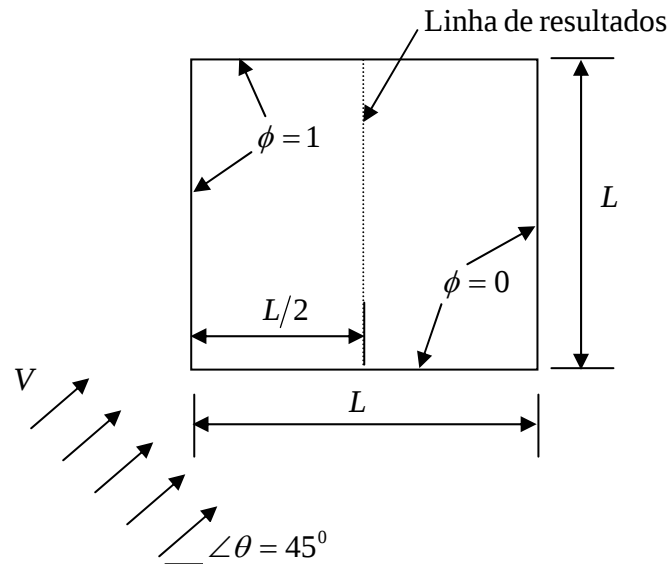


Figura 3. Ilustração do problema de advecção/difusão de um pulso.

Vários casos foram simulados. Foram considerados $Re = 250$, $Re = 1000$, $Re = 2000$ e $Re \rightarrow \infty$. Os resultados serão apresentados na ordem crescente de número de Reynolds.

Na figura 4, para $Re = 250$, os resultados para as duas malhas são mostrados. Verifica-se uma concordância muito boa das soluções numéricas com a solução analítica de Raithby (1976). Para que se possa comparar as diferenças entre os resultados, a figura 5 apresenta as diferenças entre os resultados numéricos com o analítico.

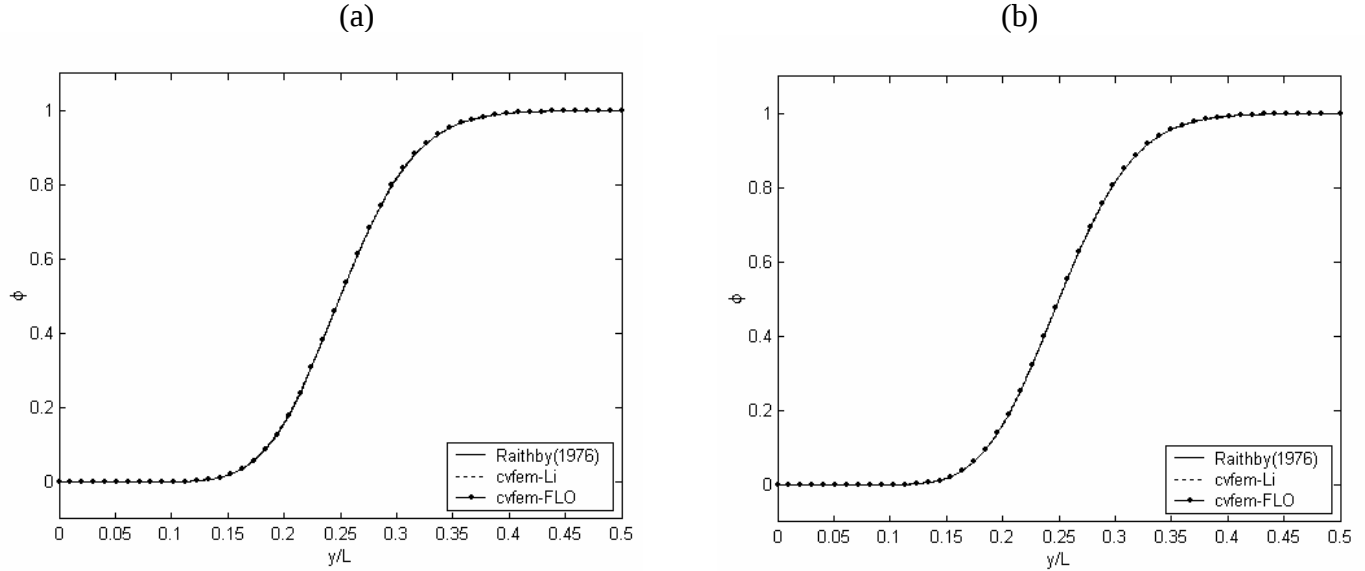


Figura 4. Perfil de ϕ , $Re=250$, malha 1(a) malha 2 (b).

Como pode ser percebido na figura 5, as maiores diferenças, considerando a malha 1, foram as do esquema FLO. Para a malha 2 as diferenças são equivalentes entre os esquemas utilizados. Assim, para este número de Reynolds considera-se que os dois esquemas são igualmente precisos.

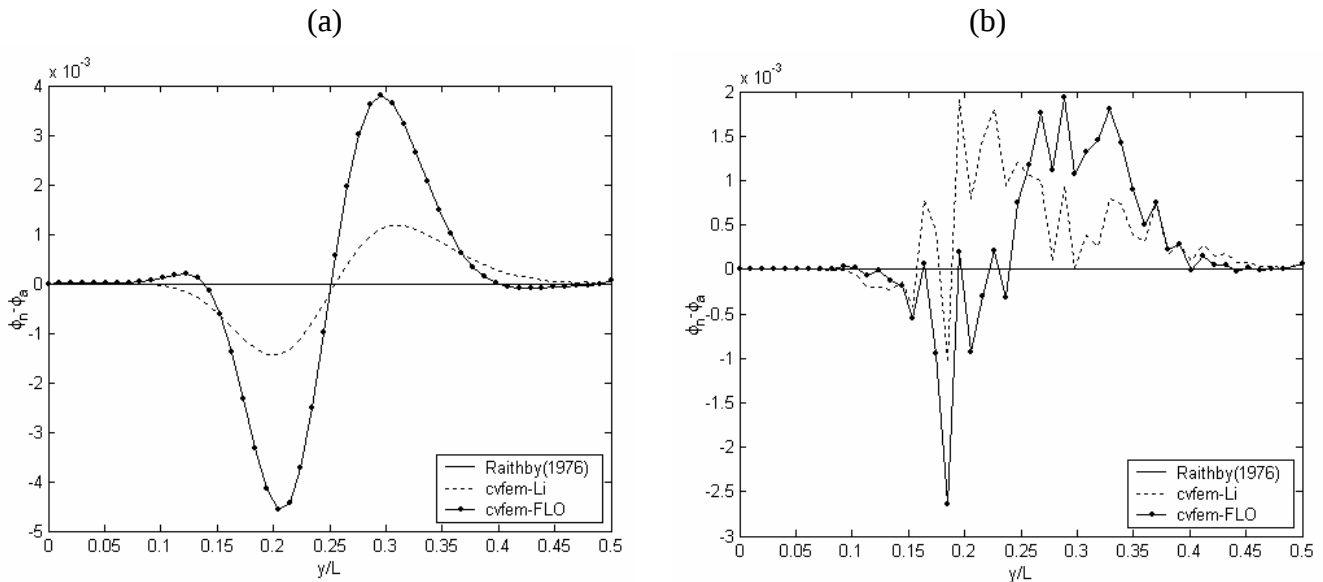


Figura 5. Perfil de $\phi_n - \phi_a$, $Re=250$, malha 1 (a) e malha 2 (b).

Para $Re = 1000$, os resultados para as duas malhas são mostrados na figura 6. Mesmo com o aumento do número de Reynolds as diferenças entre as soluções ainda são muito pequenas.

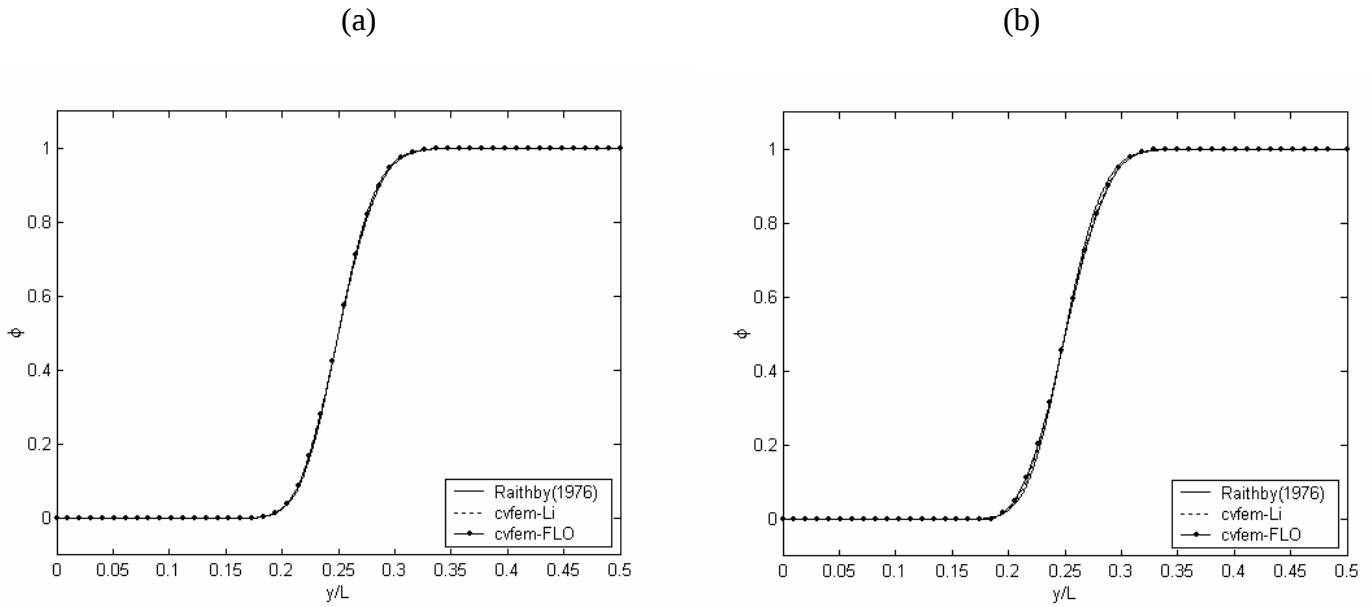


Figura 6. Perfil de ϕ , $Re=1000$, malha 1 (a) e malha 2 (B)

As soluções obtidas com a malha 1 novamente são muito boas, figura 7, pois as diferenças continuam muito pequenas. Já com relação aos resultados obtidos com a malha 2, as diferenças entre as soluções numéricas são pequenas. Já as diferenças entre as soluções numéricas e a solução analítica são bem maiores que as obtidas com a malha 1.

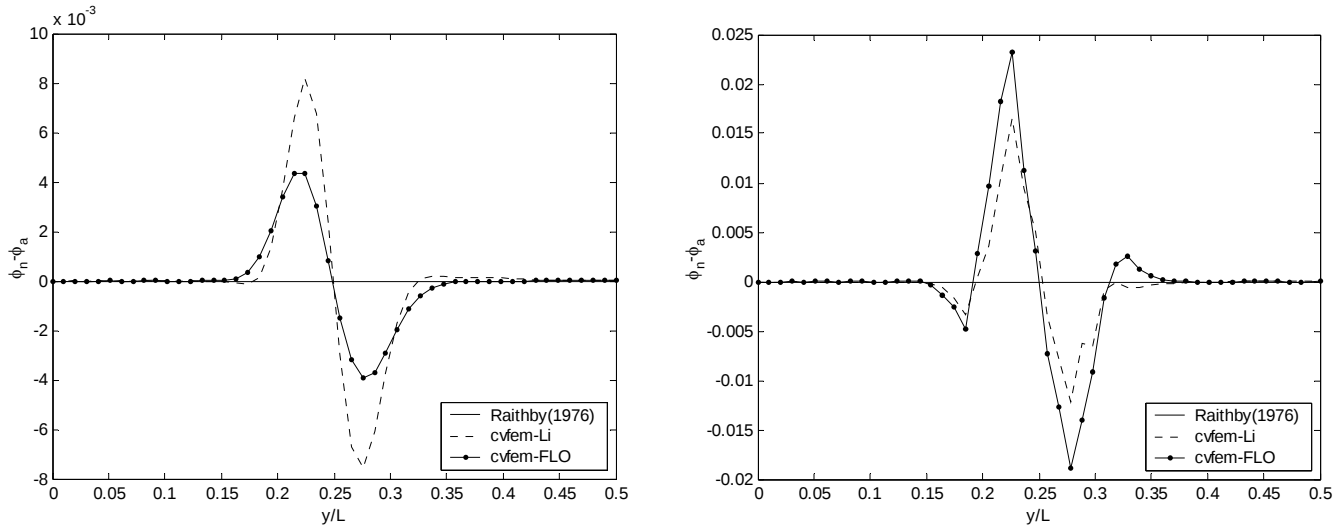


Figura 7. Perfil de $\phi_n - \phi_a$, $Re=1000$, malha 1 (a) e malha 2 (b).

Na medida que o número de Reynolds cresce as diferenças entre as soluções numéricas crescem proporcionalmente. As mesmas tendências podem ser notadas neste caso, figuras 8 e 9.

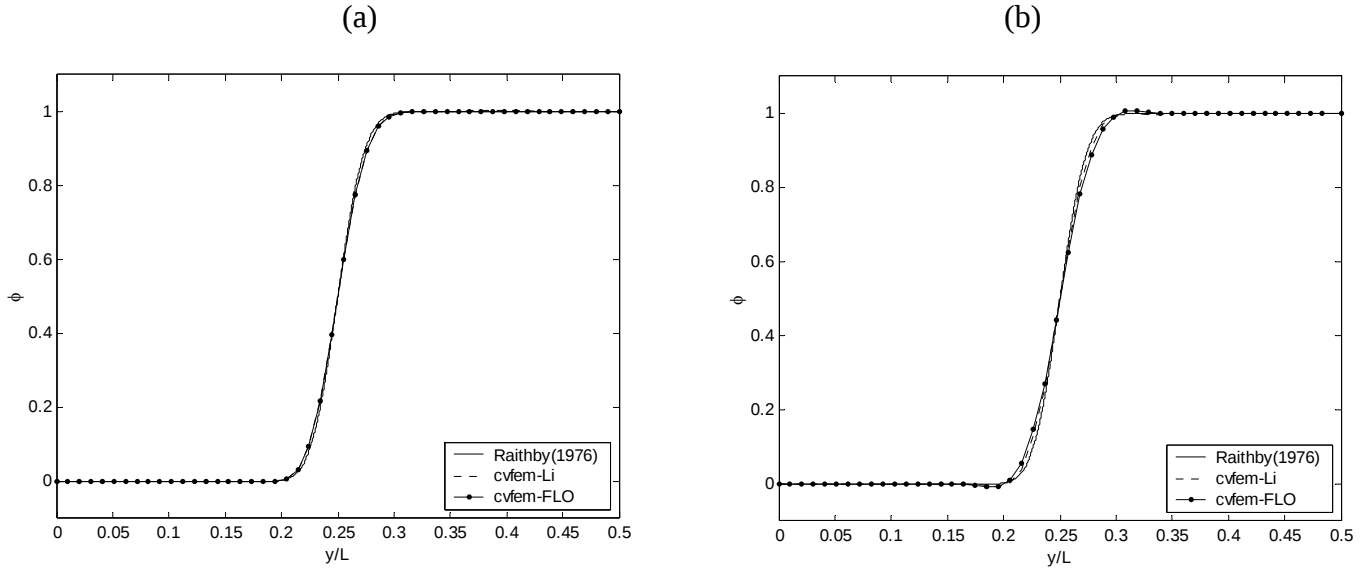


Figura 8. Perfil de ϕ , $Re=2000$, malha 1 (a) e malha 2 (B)

Ainda que existam diferenças de previsões entre os esquemas, como pode ser verificado na figura 9, ambos esquemas possuem mesma ordem precisão e nenhum dos dois se destaca muito em relação ao outro.

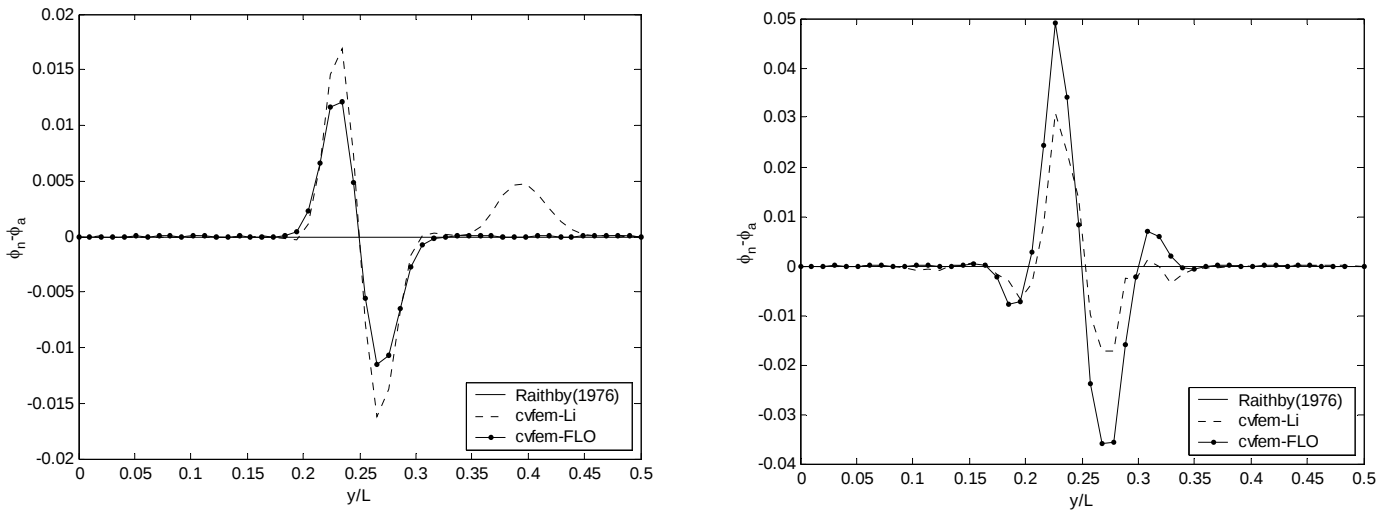


Figura 9. Perfil de $\phi_n - \phi_a$, $Re=2000$, malha 1 (a) e malha 2 (b).

No caso extremo, onde $Re \rightarrow \infty$, a solução exata é conhecida. O esquema FLO apresenta bons resultados, especialmente com relação a malha 1. Já o esquema LI falha totalmente no caso onde a malha 2 é utilizada, por isso a curva para este esquema não foi apresentada na figura 10(b).

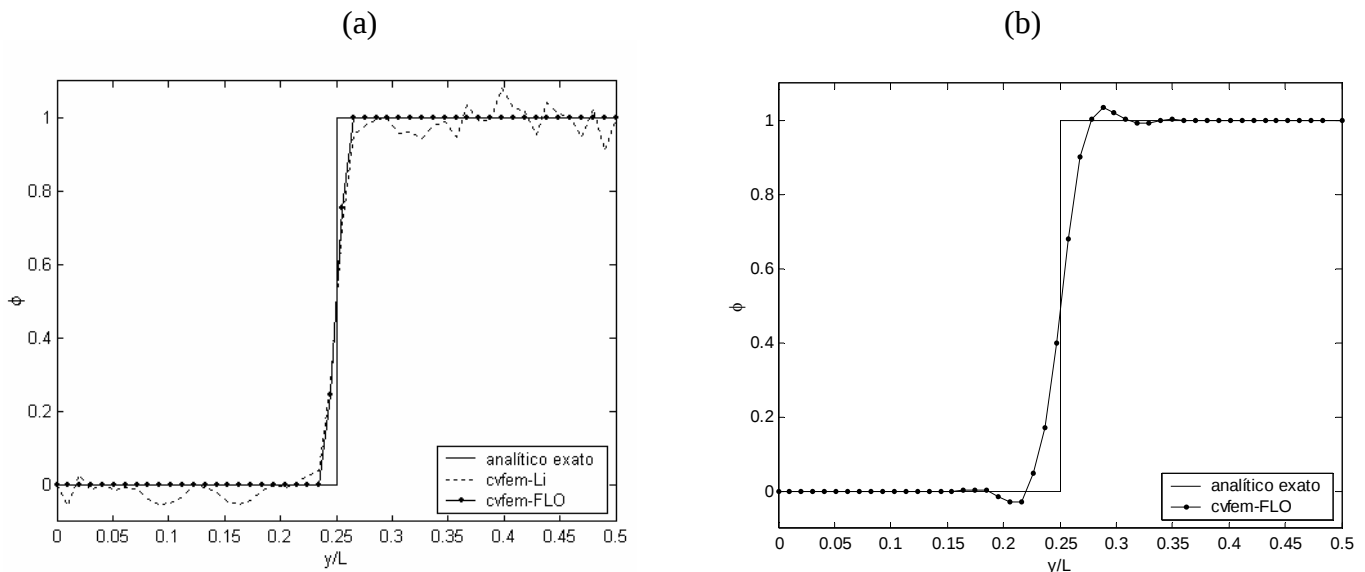


Figura 10. Perfil de ϕ , $Re \rightarrow \infty$, malha 1 (a) e malha 2 (b)

5. CONCLUSÃO

As funções de interpolação apresentaram resultados similares para todos os casos simulados. Como esperado, no caso extremo onde $Re \rightarrow \infty$, a função de interpolação linear falha totalmente. Com relação ao último resultado apresentado, como as malhas utilizadas possuíam igual número de volumes, constata-se que os resultados obtidos com ambos esquemas dependem fortemente da forma como os volumes estão distribuídos no domínio. Para o caso onde a malha 2 foi utilizada, os resultados para ambos os esquemas apresentaram oscilação numérica. Quanto ao esquema FLO, apesar da função de interpolação estar aplicada na direção do escoamento médio do elemento, ainda existe dependência dos resultados com o alinhamento da malha com o campo de escoamento. Ainda que os resultados obtidos com a função de interpolação linear estejam próximos do analítico para baixos números de Reynolds, esta função de interpolação deve ser utilizada com cautela no termo advectivo, uma vez que esta não considera a direção do escoamento para o cálculo dos valores interpolados.

6. REFERÊNCIAS

- Abbassi H, Turki S, Ben Nasrallah S, 2003, Interpolation functions in control volume finite element method, Computational Mechanics, vol. 30, pp. 303–309.
- Baliga, B. R., A Control-Volume Based Finite Element Method for Convective Heat and Mass Transfer, Ph-D. Thesis, University of Minnesota, Minneapolis, U.S.A., 1978.
- Baliga, B. R. and Patankar, S. V., Elliptic Systems: Finite-Element Method II, in Handbook of Numerical Heat Transfer, (eds. Minkowycz, W. J. et al.), Chap. 11, John Wiley and Sons, New York, pp. 421-461, 1988.

Maliska, C. R., (2004), Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional, LTC – Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Mavriplis, D. J.. Adaptive Mesh Generation for Viscous Flows Using Delaunay Triangulation, Journal of Comp. Physics, Vol. 90, pp. 27 1-29 1, 1990.

Prakash C., 1986, An improved control volume finite-element method for heat and mass transfer, and for fluid flow using equal-order velocity–pressure interpolation. Numer. Heat Transfer 9: 253–276.

Raithby, G.D.,1976, Skew Upstream Differencing Schemes for Problems Involving Fluid Flow, Computational Method Applied Mechanical Engineering, vol. 9, pp. 153-164.

Saabas HJ, Baliga BR, 1994, Co-located equal-order control volume finite-element method for multidimensional, incompressible, fluid flow part I: formulation. Numer. Heat Transfer, Part B 26: 381–407.

NUMERICAL SOLUTION OF AN ADVECTION-DIFFUSION PROBLEM OF STEP JUMP TO COMPARISON OF TWO INTERPOLATION FUNCTIONS

Fábio Alfaia da Cunha

University of Brasília, Faculty of Technology, Mechanical Engineering Department, 70910-900
fabioalfaia@yahoo.com.br

Carlos Alberto Gurgel Veras

University of Brasília, Faculty of Technology, Mechanical Engineering Department, 70910-900
gurgel@unb.br

Abstract: *This work presents the numerical solution of an advection-diffusion problem of a step jump to comparison of two interpolation functions. The Control Volume Finite Element Method (CVFEM) is used in this case. Traditionally, in such method a flow oriented interpolation function (FLO) is used in the advection term. However in recent works it is demonstrated that the use of a linear interpolation function (LI) in the advection term produces better results in the case of laminar fluid flow. To evaluation the LI and FLO interpolation functions the advection-diffusion problem cited is numerically solved. The numerical results are compared with analytical solution.*

Keywords: *CVFEM, interpolation function, step jump problem*