

ANÁLISE MATEMÁTICO DA EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA SEM A PRESENÇA DE SIMETRIA AZIMUTAL E COM FEIXE INCLINADO

CELSO LUIZ BUIAR

Departamento de Matemática - Universidade Tuiuti do Paraná – UTP
Rua: Sydnei A Rangel Santos, 238 - CEP: 82.010-330 - Curitiba Pr
celso.buiar1@utp.br

LUÍS MAURO MOURA

Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica
Pontifícia Universidade Católica do Paraná – PUCPR
Rua Imaculada Conceição, 1155 – CEP 80215-901, Curitiba – PR
luis.moura@pucpr.br

Resumo: *Este trabalho versa sobre uma metodologia empregada para a solução da transferência de calor por radiação de materiais classificados como semitransparentes (MST), isto é, materiais que absorvem, emitem e difundem a radiação, em uma geometria unidimensional sem a condição de simetria azimutal do feixe de radiação incidente. Utiliza-se o método de ordenadas discretas acoplado a um método analítico para a solução do sistema de equações diferenciais parciais para o campo de intensidades difuso. A metodologia para a análise de um problema sem a condição de simetria azimutal é a de transformar este problema em um conjunto de mini - problemas com simetria, reescrevendo o campo de intensidades em termos de uma expansão em série de Fourier e a função de fase em termos de polinômios de Legendre.*

Palavras-chave: *Soluções Formais da ETR, Equações Integro -Diferenciais, Meio Semitransparente, Método de Ordenadas Discretas.*

1. INTRODUÇÃO:

O presente trabalho se utiliza inicialmente da formulação analítica desenvolvida por Nicolau (1994) que apresenta as soluções do conjunto de equações diferenciais em termos das transmissividades e refletividades para um problema com a condição de simetria azimutal do feixe de radiação incidente. Os fenômenos físicos causados por um feixe de radiação, que de forma oblíqua incide sobre o meio, são analisados e modelados segundo as formulações de Chandrasekar

[1960] e Özisik [1973] para a transformação do problema sem simetria azimutal em um conjunto de problemas com simetria, aplicado ao caso de funções delta de Dirac, nas quais o campo de intensidades é descrito em termos de séries de Fourier e a função de fase em termos de polinômios de Legendre no caso de uma difusão anisotrópica.

2. A EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA:

Para a obtenção da ETR efetua-se, a uma frequência ν , um balanço dos mecanismos físicos de interação radiação/meio por um feixe de radiação se propagando através de um meio que absorve, emite, ou espalha, obtém-se a expressão da ETR monocromática:

$$\frac{1}{(\sigma_{a\nu} + \sigma_{d\nu})} \Omega \nabla I_\nu(\vec{s}, \vec{\Omega}) + L_\nu(\vec{s}, \vec{\Omega}) = \left(1 - \frac{\sigma_{d\nu}}{(\sigma_{a\nu} + \sigma_{d\nu})}\right) I_\nu^\circ(T) + \frac{1}{4\pi} \frac{\sigma_{d\nu}}{(\sigma_{a\nu} + \sigma_{d\nu})} \int_{\Omega'=4\pi} p_\nu(\vec{\Omega}' \cdot \vec{\Omega}) I_\nu(\vec{s}, \vec{\Omega}') d\Omega' \quad (1)$$

A ETR pode ser escrita na sua forma adimensional. Inserindo parâmetros como espessura óptica, coeficiente de extinção e albedo, τ_ν , β_ν e ω_ν teremos:

$$\frac{dI(s, \vec{\Omega})}{ds} + I(s, \vec{\Omega}) = (1 - \omega) I^\circ(T) + \frac{\omega}{4\pi} \int_{\Omega'=4\pi} p(\vec{\Omega}' \cdot \vec{\Omega}) I(s, \vec{\Omega}') d\Omega' \quad (2)$$

3. Condição de Simetria Azimutal:

A condição de simetria azimutal é normalmente utilizada devido a facilidade de resolução que ela fornece a ETR. Utilizando esta condição, as variáveis tornam-se independentes do ângulo de azimute, ϕ e são constantes em torno de um cone de ângulo sólido Ω centrado no eixo x . Neste caso:

$$I(s, \vec{\Omega}) = I(x, \mu, \phi) = I(x, \mu) \quad (3)$$

$$\int_{\Omega=4\pi} \dots d\Omega = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta d\theta d\phi = 2\pi \int_{-1}^1 \dots d\mu$$

A ETR, Eq. (2), torna-se:

$$\mu \frac{\partial I(\tau, \mu)}{\partial \tau} + I(\tau, \mu) = (1 - \omega) I_o(T) + \frac{\omega}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu') p(\mu', \mu) d\mu' \quad (4)$$

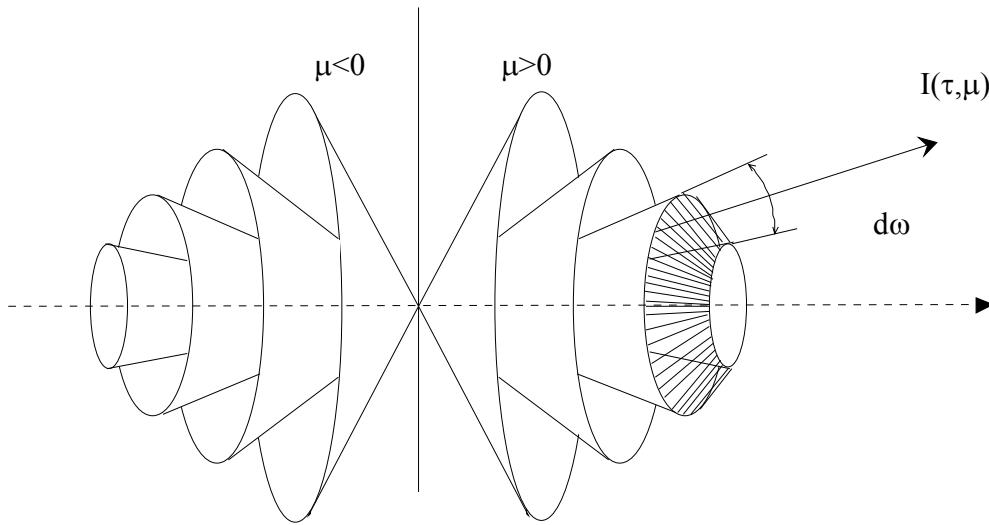


Figura 1: Discretização polar do espaço em vários anéis (Ruperti, 1996).

4 – Formulação Matemática Do Problema Sem Simetria:

Como o feixe de radiação incide de forma oblíqua ao meio semitransparente, é necessário resolver a equação de transferência radiativa sem a condição de simetria azimutal do feixe de radiação incidente. Como a dificuldade de resolução da ETR se torna maior, procura-se então uma forma de minimizar estas dificuldades.

Uma forma de se contornar esta dificuldade é transformar um problema sem a condição de simetria azimutal do campo de intensidades radiativas, em um conjunto de vários problemas com simetria. Para tanto serão analisados dois casos, a saber:

4.1 - Difusão Isotrópica

Na difusão isotrópica a função de fase é unitária para todas as direções sendo considerados:

- Geometria Unidimensional
- Sem interface.
- É submetida em uma face a um feixe colimado de radiação incidente.

A equação de transferência radiativa que representa tais condições pode ser escrita como:

$$\mu \frac{\partial I(\tau, \mu, \theta)}{\partial \tau} + I(\tau, \mu, \theta) = g(\tau) + \frac{\omega}{4\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\mu'=-1}^{+1} I(\tau, \mu', \theta') d\mu' d\phi' \quad (5)$$

Na qual g representa o termo não homogêneo e as condições de contorno são apresentadas como:

$$\begin{aligned} I(0, \mu, \phi) &= F_1(\mu, \phi) \text{ com } \mu > 0 \\ I(\tau_0, \mu, \phi) &= F_2(\mu, \phi) \text{ com } \mu < 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Utilizando um problema auxiliar para facilitar a solução da Eq.(4), a formulação será dada por:

$$\mu \frac{\partial I_0(\tau, \mu, \theta)}{\partial \tau} + I_0(\tau, \mu, \theta) = g(\tau) \quad (7)$$

As condições de contorno são as mesmas descritas na Eq.(13).

Separando o campo de intensidades em I_0^+ e I_0^- e resolvendo a Eq.(14), tem-se:

$$\begin{aligned} I_0^+(\tau, \mu, \phi) &= F_1(\mu, \phi) \exp\left(-\tau/\mu\right) + \int_0^\tau \left[g(\tau') \frac{\exp\left(-(\tau-\tau')/\mu\right)}{\mu} \right] d\tau' \\ I_0^-(\tau, \mu, \phi) &= F_2(\mu, \phi) \exp\left((\tau_0-\tau)/\mu\right) + \int_\tau^{\tau_0} \left[g(\tau') \frac{\exp\left(-(\tau-\tau')/\mu\right)}{\mu} \right] d\tau' \end{aligned} \quad (8)$$

O termo fonte é representado na Eq.(5) e pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} G_0(\tau) &= \int_0^{2\pi+1} \left(F_1(\mu, \phi) \exp\left(-\tau/\mu\right) + F_2(\mu, \phi) \exp\left((\tau_0-\tau)/\mu\right) \right) d\mu' d\phi' + \\ &+ 2\pi \left[\int_0^\tau g(\tau') E_1(\tau-\tau') d\tau' + \int_\tau^{\tau_0} g(\tau') E_1(\tau-\tau') d\tau' \right] \end{aligned} \quad (9)$$

Como o campo de intensidades pode ser definido como a soma da intensidade não espalhada utilizada no problema auxiliar e a intensidade espalhada dentro do meio semitransparente e utilizando o termo fonte descrito na Eq.(9), a equação de transferência se torna:

$$\mu \frac{\partial I(\tau, \mu)}{\partial \tau} + I(\tau, \mu) = \frac{\omega}{4\pi} G_0(\tau) + \frac{\omega}{2} \int_{\mu'=-1}^{+1} I(\tau, \mu') d\mu' \quad (10)$$

Com as condições de contorno:

$$\begin{aligned} I(0, \mu) &= 0 \text{ com } \mu > 0 \\ I(\tau_0, \mu) &= 0 \text{ com } \mu < 0 \end{aligned} \quad (11)$$

4.2 - Difusão Anisotrópica

Para realizar esta análise são condições necessárias:

- Geometria Unidimensional.
- Não possui termo de Geração.
- Incidência inclinada em $\tau = 0$ de um feixe inclinado.
- Não apresenta incidência em $\tau = \tau_0$.
- A função de fase seja representada em termos de polinômios de Legendre.

A equação de transferência radiativa que representa tais condições pode ser escrita como:

$$\mu \frac{\partial I(\tau, \mu, \theta)}{\partial \tau} + I(\tau, \mu, \theta) = \frac{\omega}{4\pi} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \int_{\mu'=-1}^{+1} p(\mu_0) I(\tau, \mu', \theta') d\mu' d\phi' \quad (12)$$

De forma que o termo $p(\mu_0)$ representa a função de fase em termos de polinômios de Legendre, dada por:

$$p(\mu_0) = \sum_{n=0}^N a_n P_n(\mu_0), \quad a_0 = 1 \quad (13)$$

Na qual μ_0 é o ângulo formado entre as direções Ω e Ω' , e as condições de contorno são apresentadas como:

$$\begin{aligned} I(0, \mu, \phi) &= F_1(\mu, \phi) \text{ com } \mu > 0 \\ I(\tau_0, \mu, \phi) &= 0 \text{ com } \mu < 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Utilizando de um problema auxiliar homogêneo para facilitar a solução da Eq.(12), a formulação será dada por:

$$\mu \frac{\partial I_0(\tau, \mu, \theta)}{\partial \tau} + I_0(\tau, \mu, \theta) = 0 \quad (15)$$

As condições de contorno são as mesmas descritas na Eq.(14).

Separando o campo de intensidades em I_0^+ e I_0^- e resolvendo a Eq.(12), tem-se:

$$\begin{aligned} I_0^+(\tau, \mu, \phi) &= F_1(\mu, \phi) \exp\left(-\tau/\mu\right) \\ I_0^-(\tau, \mu, \phi) &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

O termo fonte é representado na Eq.(12), por:

$$G_0(\tau) = \frac{\omega}{4\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\mu=-1}^{+1} p(\mu_0) I(\tau, \mu', \phi') d\mu' d\phi' \quad (17)$$

E pode ser reescrito como:

$$G_0(\tau) = \int_0^{2\pi+1} \left(p(\mu_0) F_1(\mu, \phi) \exp\left(-\tau/\mu\right) \right) d\mu' d\phi' \quad (18)$$

Como o campo de intensidades pode ser definido como a soma da intensidade não espalhada utilizada no problema auxiliar e a intensidade espalhada dentro do meio semitransparente e utilizando o termo fonte descrito na Eq.(18), a equação de transferência se torna:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial I_1(\tau, \mu, \phi)}{\partial \tau} + I_1(\tau, \mu, \phi) &= \frac{\omega}{4\pi} \left[\int_0^{2\pi+1} \left(p(\mu_0) F_1(\mu, \phi) \exp\left(-\tau/\mu\right) \right) d\mu' d\phi' \right] + \\ &+ \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\mu'=-1}^{+1} p(\mu_0) I_1(\tau, \mu', \phi') d\mu' d\phi' \end{aligned} \quad (19)$$

Com as condições de contorno:

$$\begin{aligned} I(0, \mu, \phi) &= 0 \text{ com } \mu > 0 \\ I(\tau_0, \mu, \phi) &= 0 \text{ com } \mu < 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Para separar a Eq.(19) em um conjunto de problemas com simetria azimutal a função de fase deve estar representada em termos de polinômios de Legendre e o campo de intensidades deve ser escrito em termos de série de Fourier. Utilizando-se de um caso especial para a formulação, ou seja, utilizando funções delta com incidência externa de intensidade f_1 , ângulo de incidência θ_1 e ângulo de azimute ϕ_1 .

5 – Aplicação As Funções Delta De Dirac:

Utilizando-se de um caso especial para a formulação, ou seja, utilizando funções delta com incidência externa de intensidade f_1 , ângulo de incidência θ_1 e ângulo de azimute ϕ_1 , podemos descrever a função prescrita F_1 como:

$$F_1(\mu, \phi) = f_1 \delta(\mu_1 - \mu) \delta(\phi_1 - \phi) \quad (21)$$

O termo em seno na série de Fourier representa uma condição de contorno difusa. Assim as intensidades radiativas podem ser escritas em termos apenas do co-seno do ângulo de azimute e do campo de intensidades, em função de uma coordenada de posição e do ângulo de incidência. Tomando a Eq.(19) e nesta substituindo o campo de intensidades e as condições de contorno, teremos: [Özisik, 1973]

$$\begin{aligned} & \mu \frac{\partial \left[\sum_{k=0}^{\infty} I^k(\tau, \mu) \cos k(\phi_1 - \phi) \right]}{\partial \tau} + \sum_{k=0}^{\infty} I^k(\tau, \mu) \cos k(\phi_1 - \phi) = \\ & = \frac{\omega}{4\pi} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \int_{\mu'=-1}^{+1} F_1(\mu', \phi') \exp\left(-\tau/\mu\right) \left[\sum_{m=0}^N \sum_{n=m}^N (2-\delta_{0m}) a_n^m P_n^m(\mu) P_n^m(\mu') \cos m(\phi - \phi') \right] d\mu' d\phi' + \\ & + \frac{\omega}{4\pi} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \int_{\mu'=-1}^{+1} d\mu' d\phi \left[\sum_{m=0}^N \sum_{n=m}^N (2-\delta_{0m}) a_n^m P_n^m(\mu) P_n^m(\mu') \cos m(\phi - \phi') \right] \left[\sum_{k=0}^{\infty} I^k(\tau, \mu) \cos k(\phi_1 - \phi) \right] \end{aligned} \quad (22)$$

Após alguns arranjos a Eq.(22) pode ser transformada em um conjunto de equações em função das intensidades pois o termo em cossenos presente no somatório é linearmente independente. Usando as funções delta, Eq.(21), pode-se escrever este conjunto de equações como:

$$\begin{aligned}
\mu \frac{\partial [I^k(\tau, \mu)]}{\partial \tau} + I^k(\tau, \mu) &= 0 \text{ para } k > N \\
\mu \frac{\partial [I^k(\tau, \mu)]}{\partial \tau} + I^k(\tau, \mu) &= \frac{\omega}{4\pi} f_1 \exp\left(-\tau/\mu_1\right) \left[\sum_{n=k}^N (2 - \delta_{0k}) a_n^k P_n^k(\mu) P_n^k(\mu_1) \right] + \\
&+ \frac{\omega}{2} \sum_{n=k}^N a_n^k P_n^k(\mu) \int_{\mu'=-1}^{+1} P_n^k(\mu') I^k(\tau, \mu') d\mu' \text{ para } k \leq N
\end{aligned} \tag{23}$$

As condições de contorno da Eq.(23), serão:

$$\begin{aligned}
I(0, \mu) &= 0 \text{ com } \mu > 0 \\
I(\tau_0, \mu) &= 0 \text{ com } \mu < 0
\end{aligned} \tag{24}$$

Variando-se os índices k e n de modo que $k = 0, 1, 2, \dots, N$ e $n = k, k+1, k+2, \dots, N$.

A resolução da Eq.(23) ainda apresenta dificuldades devido ao termo integral, desta forma esta integral é discretizada pelo método de ordenadas discretas, isto é, substituindo o termo integral por um somatório variando em cada direção discreta. Assim a equação de transferência radiativa ETR, se torna:

$$\begin{aligned}
\mu \frac{\partial [I^k(\tau, \mu)]}{\partial \tau} + I^k(\tau, \mu) &= \frac{\omega}{4\pi} f_1 \exp\left(-\tau/\mu_1\right) \left[\sum_{n=k}^N (2 - \delta_{0k}) a_n^k P_n^k(\mu) P_n^k(\mu_1) \right] + \\
&+ \frac{\omega}{2} \sum_{n=k}^N a_n^k P_n^k(\mu) \left[\sum_{j=1}^N C_j (P_n^k(\mu_j) + I^k(\tau, \mu_j) + P_n^k(-\mu_j) + I^k(\tau, -\mu_j)) \right] \text{ para } k \leq N
\end{aligned} \tag{25}$$

Usando na equação anterior a direção discreta μ_i e dividindo a equação por este termo, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial [I^k(\tau, \mu_i)]}{\partial \tau} + \frac{I^k(\tau, \mu_i)}{\mu_i} &= \frac{\omega}{4\pi} f_1 \frac{\exp\left(-\tau/\mu_1\right)}{\mu_i} \left[\sum_{n=k}^N (2 - \delta_{0k}) a_n^k P_n^k(\mu_i) P_n^k(\mu_1) \right] + \\
&+ \frac{\omega}{2\mu_i} \sum_{k=0}^N a_n^k P_n^k(\mu_i) \left[\sum_{j=1}^N C_j (P_n^k(\mu_j) + I^k(\tau, \mu_j) + P_n^k(-\mu_j) + I^k(\tau, -\mu_j)) \right]
\end{aligned} \tag{26}$$

Reescrevendo a constante f_1 como a intensidade colimada $I_0 d\omega_0$, podemos utilizar a formulação geral da Eq.(34) em termos de transmitâncias, apresentando – a como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial [T(\tau)]}{\partial \tau} = T(\tau) & \left[\frac{-1}{\mu_I} + \frac{\omega}{2\mu_I} \sum_{k=0}^N a_n^k P_n^k(\mu_I) \left[\sum_{j=1}^N C_j (P_n^k(\mu_j) + P_n^k(-\mu_j)) \right] \right] \\ + \frac{\omega}{4\pi} & \frac{\exp\left(-\tau/\mu_I\right)}{\mu_I} \left[\sum_{k=0}^N (2-\delta_{0k}) a_n^k P_n^k(\mu_I) P_n^k(\mu_1) \right] \end{aligned} \quad (35)$$

Sendo a formulação geral para este caso.

6 – CONCLUSÃO:

Através da metodologia apresentada neste trabalho, define-se um método para ser empregado na resolução da equação de transferência radiativa de materiais classificados como semitransparentes (MST), em uma geometria unidimensional, sem simetria azimutal e inclinação do feixe de radiação incidente.

7 – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

1. Abramowitz, M., Stegun, I.A., 1972. Handbook of mathematical functions. New York: Dover Publications, Inc.- 1046p.
2. Barichello, L. B., Garcia, R. D. M., Siewert, C. E., 1996. The Fourier decomposition for a radiative-transfer problem with an asymmetrically reflecting ground. Journal Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, pp. 363-371.
3. Brewster, M.Q., 1992. Thermal radiative transfer and properties. New York: John Wiley and Sons, 543p.
4. Buair, C. L. e Moura, L. M., 2003. Uma formulação analítica para a solução da equação de transferência radiativa sem simetria azimutal. 58 SBA, Campinas, Brasil.
5. Buair, C. L., Moura, L. M. e Nicolau, V. de P. A comparison between analytical and finite volume discrete ordinates radiative transfer equation. CILAMCE 2004, Recife, Brasil.
6. Chandrasekhar, S., Radiative Transfer., 1960. New York : Dover Publication, 393p.
7. Godsolve, C., 1995. The inclusion of reflectances with preferred direction in radiative transfer calculations, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, Vol. 53, No. 3, pp. 289-305
8. Nicolau, V.P., 1994, Identification des Propriétés Radiatives des Matériaux Semi-Transparents Diffusants. Thèse de doctorat n° 94ISAL0001. INSA, Lyon 234p.
9. Modest, M.F., 1993. Radiative Heat Transfer, New York: McGraw-Hill, 832p
10. Moura, L. M., Baillis, D., Sacadura, J. F., 2001. Determinação de Propriedades Radiativas: Incidência Difusa sobre a amostra, Uberlândia. 16th Brazilian Congress of Mechanical Engineering.
11. Moura, L. M., Baillis, D., Sacadura, J. F. 2001. Estudo da transferência de calor por radiação em um meio unidimensional sem simetria azimutal. Campinas, SP. XXII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering.

12. Moura, L.M. *Identification des propriétés radiatives des matériaux semi-transparentes diffusants en situation de non-symétrie azimutale du champ radiatif*. Thèse de doctorat 98ISAL0059, INSA Lyon, 15 de julho 1998b.
13. Özisik, M. N. , 1973. Radiative Transfer and interaction with conduction and convection. John Wiley and Sons, New York
14. Ruperti JR., N.J., 1996. Etude du problème inverse de conduction-rayonnement de la chaleur. Thèse de doctorat n° 96ISAL0041, INSA de Lyon, Lyon, 152p.,

TITLE: MATHEMATICAL ANALYSIS APPLIED NON AZIMUTHAL SYMMETRY WITH RADIATIVE INCIDENT BEAM IN RADIATIVE TRANSFER EQUATION

Celso Luiz Buiar

Tuiuti University of Paraná – UTP-PR
Mathematics Course
Rua Sydnei Rangel Santos, 238 - CEP 82.010.-330, Curitiba, PR.
celso.buiar1@utp.br

Luís Mauro Moura

Mechanical Engineering Post Graduate Program
Pontifical Catholic University of Paraná – PUCPR
Rua Imaculada Conceição, 1155 – CEP 80215-901, Curitiba, PR
luís.moura@pucpr.br

Abstract. *A methodology for solved the Radiative Transfer Equation (RTE) is presented, applied in diffuse semi transparent materials (MST), or either, absorbing, scattering and emitting the thermal radiation. Utilized a one-dimensional geometry without azimuthally symmetry condition in function by inclination incident beam and to convert the without azimuthally symmetry problem in a azimuthally symmetry with problems set, where the radiation intensity field is described as Fourier series expansion and the phase function is described as Legendre's polynomial.*

Keywords: *Formal Solution by RTE, Differential – Integral Equations, Semitransparent Material, Discrete Ordinates Method.*