

FORMULAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS DE ESTRUTURAS COMPOSTAS LAMINADAS AMORTECIDAS PASSIVAMENTE POR CIRCUITOS SHUNT

Albert Willian Faria

Universidade Federal de Uberlândia. Av. João Naves de Avila, 2160 , Bloco X, Sta. Mônica, Uberlândia, MG.
e-mail: awfaria@mecanica.ufu.br

Domingos Alves Rade

Universidade Federal de Uberlândia. Av. João Naves de Avila, nº 2160 , Bloco 1M, Sta. Mônica, Uberlândia, MG.
e-mail: rade@mecanica.ufu.br

Raquel Santini Leandro Rade

Universidade Federal de Uberlândia. Av. João Naves de Avila, nº 2160 , Bloco 1X, Sta. Mônica, Uberlândia, MG.
e-mail: rslr@ufu.br

Resumo: Este artigo apresenta a formulação por elementos finitos de estruturas compostas laminadas dotadas de materiais piezelétricos acoplados a circuitos shunt em vista ao controle passivo de vibrações. A estrutura composta laminada é formulada numericamente por meio da teoria HSDT na aproximação das quantidades mecânicas e pela teoria Layerwise na aproximação das variáveis elétricas, constituindo assim a chamada Teoria Mista. O elemento adotado na formulação numérica apresenta oito nós, onze graus de liberdade mecânicos por nó e graus de liberdade elétricos por interface de camadas do laminado. São apresentados os parâmetros ótimos de sintonização dos circuitos shunt resistivo e ressonante em série e paralelo. Uma simulação numérica é efetuada para evidenciar o amortecimento de vibrações promovido por meio da utilização dos circuitos shunt. A aplicação utiliza uma viga composta de grafite/epóxi, em balanço dotada de uma pastilha piezelétrica colada sob sua face superior. A pastilha é acoplada a um circuito shunt nas topologias resistiva e ressonante em série e paralelo. Os resultados numéricos evidenciam o aumento do amortecimento promovido pela sintonização ótima dos parâmetros de resistência e indutância elétrica dos circuitos passivos estudados.

Palavras-chave: materiais compostos laminados, efeito piezelétrico, amortecimento passivo de vibrações, circuitos elétricos shunt, elementos finitos.

1. INTRODUÇÃO

Materiais piezelétricos vêm sendo freqüentemente usados como sensores e/ou atuadores para o controle de forma e vibração de estruturas flexíveis. Os materiais piezelétricos de uso mais corrente incluem o fluoreto de polivinilideno (PVDF) que é um filme polimérico semicristalino e o titanato zirconato de chumbo (PZT) que é um material cerâmico. Estes materiais deformam-se quando expostos a uma voltagem elétrica e de maneira inversa produzem cargas elétricas quando sofrem solicitações mecânicas. Esses efeitos chamados efeitos piezelétricos direto e inverso são devidos à permanente polarização induzido durante o processo de fabricação destes materiais ao serem expostos a um forte campo elétrico.

Nas aplicações voltadas ao controle de vibrações, os materiais piezelétricos são colados à estrutura base usando um forte material adesivo. Em uma aplicação típica de controle ativo, um material piezelétrico é usado como um atuador, enquanto outro é utilizado como um sensor para medir as vibrações da estrutura base. Um sistema de controle de voltagem é então aplicado no atuador piezelétrico para minimizar as vibrações não desejáveis da estrutura base.

Uma alternativa a este tipo de controle ativo é a adoção de um sistema de controle passivo utilizando um circuito elétrico denominado circuito *shunt*, ao qual é transferida a energia de deformação da estrutura vibratória, que é parcialmente nele dissipada.

Ao longo da última década surgiu uma grande variedade de publicações sobre o controle passivo de vibração utilizando circuitos shunt, tais como, Wu e Bicos (1997), Caruso (2001), Viana (2005).

Hagood e Von Flotow (1991) interpretaram o funcionamento de um material piezelétrico acoplado a um circuito shunt ressonante em termos de uma analogia com um absorvedor dinâmico de vibrações (ADV). Eles acrescentaram um elemento resistivo ao elemento indutivo originando o circuito ressonante em série (RLs). Este circuito pode ser visto a seguir, sendo C_p a capacitância inerente da pastilha piezelétrica.

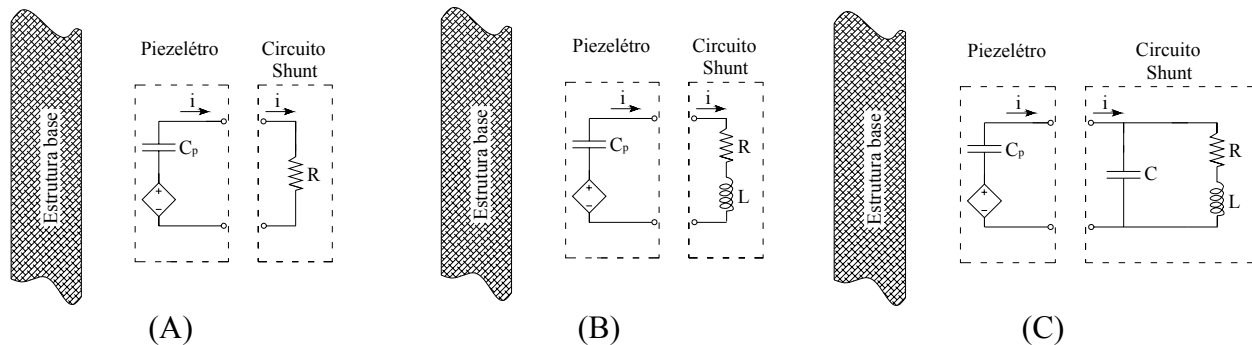


Figura 1. (A) Representação esquemática do circuito shunt resistivo, (B) do circuito shunt ressonante série e (C) do circuito shunt capacitivo.

O circuito RLs resultante é ajustado a uma específica frequência natural ω_i do sistema adotando-se valores apropriados de R e de L . Porém, devido à natureza passiva do circuito shunt a obtenção dos níveis ótimos de desempenho dos componentes do sistema é uma tarefa difícil. Assim, um método geral para a escolha desses parâmetros ótimos do shunt é proposto por Behrens e Moheimani (2000) e baseia-se na otimização H_2 .

Diversas outras publicações foram influenciadas pelo trabalho de Hagood e Von Flotow (1991). Neste contexto, por exemplo, Wu e Bicos (1997) demonstraram que se o circuito shunt RLs for substituído por um circuito shunt ressonante em paralelo (RLp) o circuito resultante terá performance semelhante, porém com performance mais sensível a mudanças na resistência do elemento resistivo para o amortecimento dos modos de vibração de baixa ordem.

Um importante problema relacionado ao uso de um circuito RLs e que foi estudo por Caruso (2001) é que altos valores de indutância L são requeridos para um eficiente amortecimento das frequências naturais correspondentes aos modos de vibração de baixa ordem. Esses indutores sintéticos aplicados a circuitos shunt ressonantes foram analisados experimentalmente por Viana (2005) sob o ponto de vista elétrico. Segundo Caruso, este problema pode ser parcialmente resolvido através do uso de um indutor sintético capaz de fornecer valores elevados de indutância. Porém, esta técnica pode necessitar do uso de resistências elétricas maiores do que o valor ótimo estabelecido na condição inicial.

Park e seus colaboradores (1998), propuseram um aprimoramento do circuito shunt RLs adicionando um capacitor em paralelo a esta ramificação, sendo então o circuito resultante conhecido como shunt capacitivo (RL-C), o qual é ilustrado através da Figura 1-C. Neste tipo de circuito, o capacitor em paralelo permite a redução do valor ótimo da indutância L por um fator $(1+\alpha)$, onde α é a taxa entre a capacitância externa C e a capacitância C_p inerente do material piezelétrico.

Caruso (2001) realizou uma análise comparativa entre três tipos de circuitos (RLp, RLs e RLC). Neste trabalho considera-se o amortecimento mecânico inerente da estrutura e obtêm-se os valores ótimos dos componentes desses circuitos.

No tocante as publicações que utilizam o *Método dos Elementos Finitos* (MEF) para a modelagem de materiais compostos laminados amortecidos passivamente por circuitos shunt, Saravanos (1999) apresentou uma formulação numérica aplicada ao estudo de vigas, placas e cascas compostas laminadas dotadas de componentes elétricos passivos do tipo shunt resistivo. Este autor utilizou a *Teoria da Deformação Cisalhante de Primeira Ordem* (FSDT) para a aproximação das variáveis mecânicas e a teoria Layerwise na aproximação das variáveis elétricas, constituindo assim a Teoria Mista. Foram apresentadas as frequências e amortecimentos modais para estruturas compostas do tipo viga, placa e casca cilíndrica dotadas de circuitos shunt resistivos. Estudos analíticos e experimentais foram apresentados ilustrando a dependência do amortecimento modal e das frequências naturais em relação aos valores da resistência do circuito shunt. Além disso, mostraram-se os efeitos da forma e curvatura da estrutura base no amortecimento estrutural.

Kusculuoglu e Royston (2005) modelaram por elementos finitos estruturas compostas laminadas dotadas de circuitos shunt ressonantes. As variáveis mecânicas e elétricas foram formuladas através da teoria *Layerwise* e usaram uma aproximação clássica, conhecida como *Teoria de Mindlin*, na aproximação dessas variáveis para cada camada do laminado. Um sistema de controle passivo de vibrações RL é implementado numericamente e um regulador quadrático linear é adicionado como técnica de controle ótimo dos parâmetros L e R. Porém, o artigo de Kusculuoglu e Royston limita-se a modelagem de uma placa isotrópica de alumínio e não propriamente de um material composto laminado.

É bem conhecido na literatura que a *Teoria Layerwise* aplicada à aproximação do campo de deslocamentos mecânicos e do potencial elétrico em materiais compostos laminados inteligentes apresenta alguns inconvenientes, sobretudo em relação ao custo computacional requerido que aumenta conforme o número de camadas (nc) do composto laminado (Faria, 2006, Chee et al., 2001).

A *Teoria Mista*, que representa as variáveis mecânicas em uma única camada equivalente e as variáveis elétricas em camadas discretas ao longo da espessura do estratificado e que foi utilizada por Saravanos (1999), supera a desvantagem do elevado custo computacional apresentado pela *Teoria Layerwise*. No entanto, Saravanos utiliza a teoria FSDT para aproximar as variáveis mecânicas. Esta teoria, segundo Chee et al. (2001), apresenta o inconveniente da necessidade de correção dos cisalhamentos transversais (ε_{xz} , ε_{yz}) e conduz a uma rigidez excessiva (*shear locking*) na modelagem de placas compostas laminadas finas. Uma alternativa para superar esses inconvenientes é o uso da *Teoria da Deformação Cisalhante de Ordem Superior* (HSDT) na aproximação das variáveis mecânicas. No entanto, até o presente momento não foi encontrado na literatura trabalhos que utilizem essa teoria para a modelagem de estruturas compostas inteligentes amortecidas passivamente por circuitos shunt. Em vista disso, este trabalho busca ao longo do seu desenvolvimento a apresentação da formulação mista, incorporando a teoria HSDT, acoplada a circuitos shunt nas topologias: resistivo, ressonante em série e paralelo, para o amortecimento das vibrações de vigas ou placas compostas laminadas.

A idéia principal do estudo reportado neste artigo é a aplicação de diferentes topologias de circuitos shunt a estruturas constituídas de material composto laminado, o que vem complementar os estudos anteriores realizados pelo grupo de pesquisa do LMEst dedicados a estruturas formadas por materiais metálicos isotrópicos.

2. FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS

2.1. Campo de Deslocamentos Mecânicos da Teoria Mista

Na Teoria Mista o comportamento mecânico da estrutura é modelado por um campo de deslocamento de terceira ordem (HSDT) ou de primeira ordem (FSDT). A seguir é expresso o campo de deslocamentos da HSDT.

$$\begin{aligned}
u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\psi_x(x, y, t) + z^2\zeta_x(x, y, t) + z^3\Phi_x(x, y, t) \\
v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\psi_y(x, y, t) + z^2\zeta_y(x, y, t) + z^3\Phi_y(x, y, t) \\
w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) + z\psi_z(x, y, t) + z^2\zeta_z(x, y, t)
\end{aligned} \quad (1)$$

onde: u_0 , v_0 , e w_0 são os deslocamentos nas direções coordenadas (x - y - z) de um ponto material do plano médio de referência (x - y), ψ_x , ψ_y e ψ_z são rotações dos segmentos normais à superfície de referência em torno dos eixos y , x e z respectivamente. As funções ζ_x , ζ_y , ζ_z , Φ_x e Φ_y são funções que não apresentam significado físico evidente, mais podem ser vistas como rotações de ordem superior que descrevem a deformação de uma linha normal ao plano referência (Faria, 2006).

As vantagens da teoria HSDT são: (i) ela é apropriada para a modelagem placas compostas finas e espessas, (ii) dispensa o uso de fator de correção das deformações de cisalhamento transversais (γ_{xz} , γ_{yz}), (iii) não requer funções pertencentes ao espaço C_0 , ou seja, funções contínuas (iv) a deformação normal transversal também é incluída no modelo.

As variáveis mecânicas apresentadas na Equação 1 são convertidas para sua formulação em elementos finitos usando funções de forma e variáveis mecânicas nodais apropriadas.

O elemento considerado é um elemento de placa que apresenta três nós por aresta, num total de 8 nós, conhecido como elemento Serendipity (Reddy, 1997).

A matriz de transformação linear entre as coordenadas globais (x - y) e locais (ξ - η) elementares é indicada por Reddy (1997), sendo as oito funções de interpolação (funções de forma) N_i , com $i = 1$ a 8, são fornecidas também por Faria (2006).

O campo de deslocamentos mecânicos da teoria HSDT é reescrito em coordenadas locais elementares como sendo:

$$\{U(\xi, \eta, z, t)\}_{1 \times 3} = [A_u(z)]_{3 \times 11} [N_u(\xi, \eta)]_{11 \times 88} \{u_e(t)\}_{88 \times 1} \quad (2)$$

onde: $\{U(\xi, \eta, z, t)\} = \{u(\xi, \eta, z, t) \ v(\xi, \eta, z, t) \ w(\xi, \eta, z, t)\}^T$, $\{u_e\}$ é o vetor que contém as 88 variáveis mecânicas nodais e $[N_u(\xi, \eta)]$ é a matriz de funções de forma mecânica.

As deformações mecânicas são apresentadas em termos das funções de forma e dos deslocamentos mecânicos nodais, a partir da Equação 2, sob a forma:

$$\{\varepsilon(\xi, \eta, z, t)\}_{6 \times 1} = [D(z)]_{6 \times 11} [N_u(\xi, \eta)]_{11 \times 88} \{u_e(t)\}_{88 \times 1} = [B_u(\xi, \eta, z)]_{6 \times 88} \{u_e(t)\}_{88 \times 1} \quad (3)$$

onde as matrizes $[D(z)]$, $[B_u(\xi, \eta, z)]$, $[N_u(\xi, \eta)]$ e $[A_u(z)]$ são indicadas no trabalho de Faria (2006).

2.2. Potencial Elétrico Linear Distribuído por Camadas

Para a aproximação do potencial elétrico na Teoria Mista a coordenada z na direção da espessura da placa é desacoplada das coordenadas na superfície média (x - y) de referência, como expresso a seguir.

$$\phi(x, y, z, t) = \sum_{j=1}^{nc+1} L_j(z) \phi_j(x, y, t) \quad (4)$$

onde $L_j(z)$ é chamada de função em camadas equivalentes (*layerwise function*) e $\phi_j(x, y, t)$ são funções de interface da j -ésima interface do composto laminado constituído por nc camadas.

O potencial elétrico em coordenadas locais para a k -ésima camada elementar do e -ésimo elemento é expresso na formulação em elementos finitos sob a forma:

$$\phi(\xi, \eta, z, t)_e^k = [N_\phi(\xi, \eta, z)]_{1 \times 8(nc+1)} \{\phi_e(t)\}_{8(nc+1) \times 1} \quad (5)$$

onde $[N_\phi(\xi, \eta, z)]$ é a matriz de funções de forma elétrica que incorpora as funções de forma Serendipity e as funções de interpolação Lagrangeana.

Usando a definição usual do campo elétrico como o gradiente negativo do potencial elétrico e a Equação 5, a expansão em camadas do campo elétrico é expressa da seguinte forma:

$$\{E(\xi, \eta, z, t)_e\}_{3 \times l} = -\vec{\nabla}([N_\phi(\xi, \eta, z)]_{l \times \delta(n+1)} \{\varphi_e(t)\}_{\delta(n+1) \times l}) = -[B_\phi(\xi, \eta, z)_k]_{3 \times \delta(n+1)} \{\varphi_e(t)\}_{\delta(n+1) \times l} \quad (6)$$

3. FORMULAÇÃO DAS MATRIZES ELEMENTARES

Como uma estrutura é composta de materiais ativos (sensores e atuadores) e passivos (estrutura-base), o acoplamento entre esses elementos deve ser incluído no modelo via Princípio Variacional de Hamilton, que incorpora todas as contribuições energéticas presentes na estrutura.

Segundo procedimento detalhado por Chee et al. (2001) são obtidas as seguintes matrizes em nível elementar:

$$\begin{bmatrix} [K_{uu}^e] & [K_{u\phi}^e] \\ [K_{\phi u}^e] & [K_{\phi\phi}^e] \end{bmatrix} = \sum_{k=l}^{nc} \int_{\xi=-l}^{+l} \int_{\eta=-l}^{+l} \int_{z=z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} [B_u]^T [c] [B_u] & [B_u]^T [e]^T [B_\phi] \\ [B_\phi]^T [e] [B_u] & -[B_\phi]^T [\chi] [B_\phi] \end{bmatrix} J d\eta d\xi dz \quad (7)$$

$$[m^e] = \int_{V^e} \rho [N_u]^T [A_u]^T [A_u] [N_u] dV^e \quad (8)$$

$$\{F^e\} = \int_{V^e} [N_u]^T [A_u]^T \{F^V\} dV^e + \int_{S^e} [N_u]^T [A_u]^T \{F^S\} dS^e + [N_u]^T [A_u]^T \{F^P\} \quad (9)$$

$$\{Q^e\} = \int_{S^e} [N_\phi]^T \{Q^S\} dS^e \quad (10)$$

onde $[K_{uu}^e]$ é conhecida como matriz de rigidez elástica em nível elementar, as matrizes $[K_{u\phi}^e]$ e $[K_{\phi u}^e]$ são as matrizes de rigidez ao acoplamento eletromecânico em nível elementar e $[K_{\phi\phi}^e]$ é conhecida como matriz dielétrica elementar. $[m^e]$ é a matriz de massa elementar e ρ é a densidade do material. $[c]$, $[e]$ e $[\chi]$ são, respectivamente, as matrizes das constantes de rigidez elástica, das constantes piezelétrica de tensão e permissividade elétrica. $\{F^e\}$ e $\{Q^e\}$ são respectivamente os vetores de forças e cargas nodais generalizadas em nível elementar, V^e e S^e são definidos respectivamente com volumes e áreas elementares. J é o jacobiano da matriz.

Utilizando o procedimento padrão em elementos finitos de montagem das matrizes globais o modelo matemático do sistema é expresso a seguir pelo sistema de equações global do sistema eletromecânico acoplado (o subscrito g indica quantidades globais).

$$\begin{bmatrix} [M_g] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_g(t) \\ \ddot{\phi}_g(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{uu}] & [K_{u\phi}] \\ [K_{\phi u}] & [K_{\phi\phi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_g(t) \\ \phi_g(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_g(t) \\ Q_g(t) \end{Bmatrix} \quad (11)$$

4. ACOPLAMENTO DO CIRCUITO SHUNT

Como as superfícies do material piezelétrico são superfícies equipotenciais, para a incorporação do circuito shunt no sistema eletromecânico acoplado deve-se introduzir uma matriz de transformação $[T]$ a fim de estabelecer um único $g.d.l$ elétrico mestre para cada superfície equipotencial. Assim, $[T]$ é definida por:

$$\{\phi_g(t)\}_{(ne(nc+1)) \times I} = [T]_{(ne(nc+1)) \times (ne(nc+1))} \{\bar{\phi}_g(t)\}_{ne(nc+1) \times I} \quad (12)$$

onde: $\{\phi_g(t)\}$ é o vetor dos *g.d.l* elétricos, $\{\bar{\phi}_g(t)\}$ é o vetor que contém todos os *g.d.l* escolhidos como mestres, *ne* é o número total de *g.d.l* elétricos e *nc* é o número de camadas dos elementos piezelétricos.

Assim, a matriz de transformação $[T]$, relaciona os $ne(nc+1)$ *g.d.l* elétricos a somente dois *g.d.l* elétricos mestres por camada piezelétrica, um localizado em sua superfície superior e o outro na inferior. Então, $[K]$, $\{U\}$ e $\{F\}$ são modificados como segue.

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{uu}] & [K_{u\phi}][T] & 0 \\ [T]^T [K_{\phi u}] & [T]^T [K_{\phi\phi}][T] & [I] \\ 0 & [I] & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{uu}] & [\bar{K}_{u\phi}] & 0 \\ [\bar{K}_{\phi u}] & [\bar{K}_{\phi\phi}] & [I] \\ 0 & [I] & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\{U(t)\} = [\{u_g(t)\} \quad [T]\{\phi_g(t)\}]^T = [\{u_g(t)\} \quad \{\bar{\phi}_g(t)\}]^T \quad (14)$$

$$\{F(t)\} = [\{F_g(t)\} \quad [T]\{Q_g(t)\}]^T = [\{F_g(t)\} \quad \{\bar{Q}_g(t)\}]^T \quad (15)$$

onde: $[\bar{K}_{u\phi}]$, $[\bar{K}_{\phi u}]$ e $[\bar{K}_{\phi\phi}]$ são as matrizes de rigidez transformadas pela matriz de transformação $[T]$ e $[I]$ é a matriz identidade.

Utilizando as Equações (13), (14) e (15), o sistema eletromecânico acoplado apresentado em (11) é reescrito sob a forma:

$$\begin{bmatrix} [M_g] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_g(t) \\ \ddot{\phi}_g(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{uu}] & [\bar{K}_{u\phi}] \\ [\bar{K}_{\phi u}] & [\bar{K}_{\phi\phi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_g(t)\} \\ \{\bar{\phi}_g(t)\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_g(t)\} \\ \{\bar{Q}_g(t)\} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

Este sistema pode ser reescrito no domínio de Laplace com auxílio das seguintes transformações:

$$\begin{bmatrix} \{\ddot{u}_g(t)\}^T & \{\ddot{\phi}_g(t)\}^T \end{bmatrix}^T \Rightarrow s^2 [\{u_g(s)\}^T \quad \{\phi_g(s)\}^T]^T \quad (17)$$

$$[\{u_g(t)\}^T \quad \{\phi_g(t)\}^T]^T \Rightarrow [\{u_g(s)\}^T \quad \{\phi_g(s)\}^T]^T \quad (18)$$

$$\{\bar{Q}_g(t)\} = \left[\int idt \quad - \int idt \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right]^T \Rightarrow \frac{1}{s} \{I_g(s)\} \quad (19)$$

$$\{F_g(t)\} \Rightarrow \{F_g(s)\} \quad (20)$$

onde $i(t)$ é a corrente elétrica no domínio do tempo e $I_g(s)$ a corrente elétrica no domínio de Laplace.

Utilizando as Equações (17), (18), (19) e (20), a Equação (16) transformada para o domínio de Laplace é reescrita da forma seguinte:

$$\begin{bmatrix} (s^2[M_g] + [K_{uu}]) & [\bar{K}_{u\phi}] \\ [\bar{K}_{\phi u}] & [\bar{K}_{\phi\phi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_g(s)\} \\ \{\bar{\phi}_g(s)\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_g(s)\} \\ \frac{1}{s}\{I_g(s)\} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

A corrente elétrica pode ser escrita, segundo Santana (2005), como:

$$\{I_g(s)\} = Z^{-1}(s)[L]\{\bar{\phi}_g(s)\} \quad (22)$$

onde $[L]$ é a matriz de transformação, definida de tal forma que:

$$\begin{Bmatrix} \phi^s(s) - \phi^i(s) \\ \phi^i(s) - \phi^s(s) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}_{(ne(nc+1)) \times 1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi^s(s) \\ \phi^i(s) \\ 0 \\ \vdots \\ \phi(s) \end{Bmatrix}_{(ne(nc+1)) \times 1} \quad (23)$$

onde ϕ^s e ϕ^i são respectivamente os potenciais elétricos escolhidos como os mestres nas interfaces superior e inferior da pastilha piezelétrica.

Substituindo a Equação(22) na Equação (21), o sistema eletromecânico apresentado em (16) no domínio do tempo pode ser reescrito no domínio de Laplace como:

$$\begin{bmatrix} (s^2[M_g] + [K_{uu}]) & [\bar{K}_{u\phi}] \\ [\bar{K}_{\phi u}] & [\bar{K}_{\phi\phi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_g(s)\} \\ \{\bar{\phi}_g(s)\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_g(s)\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

sendo que:

$$[\bar{K}_{\phi\phi}^*] = [\bar{K}_{\phi\phi}] - \frac{1}{s} Z^{-1}(s)[L] \quad (25)$$

Desenvolvendo o sistema matricial da Equação (24) em duas equações e substituindo a segunda equação na primeira, a equação resultante fornece a função de resposta em frequência (FRF) do sistema eletromecânico acoplado com o circuito shunt. Assim:

$$\{u_g(s)\} = [s^2[M_g] + [K_{uu}] - [\bar{K}_{u\phi}][\bar{K}_{\phi\phi}^*]^{-1}[\bar{K}_{\phi u}]]^{-1} \{F_g(s)\} \quad (26)$$

De posse da equação anterior resta definir os parâmetros ótimos de sintonia dos circuitos em estudo os quais foram enunciados no trabalho de Viana (2005) e estão tabeladas a seguir.

Tabela 1 - Parâmetros ótimos dos circuitos shunt resistivo e ressonante em série/paralelo.

Tipo de circuito shunt	L^*	R^*
Ressonante em série	$\frac{I}{C_{pzt} \omega_n^2} (I + k_{3l}^2)^{-1}$	$\frac{I}{C_{pzt} \omega_n} \left(\frac{\sqrt{2} k_{3l}}{I + k_{3l}^2} \right)$
Ressonante em paralelo	$\frac{I}{C_{pzt} \omega_n^2} \left(I - \frac{k_{13}^2}{2} \right)^{-1}$	$\frac{I}{C_{pzt} \omega_n} \left(\frac{I}{k_{13} \sqrt{2}} \right)$
Resistivo	-	$\frac{I}{C_{pzt} \omega_n} \left(I - \frac{d_{3l}^2 E_{pzt}}{\chi_{33}} \right)^{\frac{1}{2}}$

O coeficiente de acoplamento eletromecânico k_{3l} apresentado na Tabela 1 é obtido, segundo Viana (2005), por meio da seguinte expressão:

$$k_{3l} = \frac{(w_n^o)^2 - (w_n^c)^2}{(w_n^c)^2} \quad (27)$$

onde w_n^o é a frequência natural em circuito aberto e w_n^c é a frequência natural em curto circuito.

5. APLICAÇÃO NUMÉRICA

A formulação desenvolvida foi avaliada através de uma aplicação numérica cujo propósito era evidenciar o amortecimento passivo de vibrações de uma viga composta laminada engastada dotada de uma pastilha piezocerâmica acoplada a diferentes topologias de shunt. As topologias implementadas foram a resistiva, ressonante em série e em paralelo e a modelagem numérica do sistema viga-pzt foi realizada na plataforma Matlab®.

A viga composta laminada possui 234mm de comprimento, 25,4mm de largura e 4,192mm de espessura e é dotada de uma pastilha de cerâmica piezelétrica de dimensões 50,8x25,4mm² colada em sua face superior a 20 mm de distância do engaste. O composto laminado possui um total de quatro camadas fabricadas de grafite/epóxi e orientadas a $[0^\circ/90^\circ]_s$. A direção das fibras das camadas orientadas a 0° é paralela ao eixo x , a espessura de cada camada do composto é de 0,1048cm, enquanto que a espessura da pastilha piezocerâmica é 0,762mm.

Os valores das constantes elásticas do composto laminado T300/934 adotados são: $E_{11} = 132,4$ GPa; $E_{22} = E_{33} = 10,8$ GPa; $G_{23} = 3,6$; $G_{13} = G_{12} = 5,6$ GPa; $\mu_{12} = \mu_{13} = 0,24$; $\mu_{23} = 0,49$. As do PZT-4 são: $E_{11} = E_{22} = 81,3$ GPa; $E_{33} = 64,5$ GPa; $G_{23} = G_{13} = 25,6$ GPa; $G_{12} = 30,6$ GPa; $\mu_{12} = 0,33$; $\mu_{13} = \mu_{23} = 0,43$. Já os coeficientes piezelétricos das pastilhas piezelétricas são em (10^{-12} m/V): $d_{31} = d_{32} = -122$; $d_{24} = d_{15} = 495$ e os coeficientes de permissividade elétrica normalizados pela constante dielétrica do ar χ^0 (igual a $8,85 \times 10^{-12}$ F/m) são: $\chi_{11} = \chi_{22} = 1475$ e $\chi_{33} = 1300$. A densidade, em kg/m³, do material composto e das pastilhas são, respectivamente, iguais a 1578 e 7600.

A viga foi discretizada em 5x1 elementos e foram adotados os parâmetros ótimos de sintonia dos diferentes circuitos shunt definidos na Tabela 1.

A Tabela 2 apresenta as cinco primeiras frequências naturais do sistema viga-PZT obtidas nas condições de *curto circuito*. Em um circuito fechado uma voltagem nula é imposta simultaneamente aos eletrodos superior e inferior do material piezelétrico, e num *circuito aberto* o eletrodo mestre inferior é aterrado e o superior permanece livre.

Tabela 2 - Frequências naturais em circuito aberto e fechado do sistema viga-PZT.

Frequência natural em circuito aberto (Hz)	Frequência natural em circuito fechado (Hz)
119,47	118,72
516,02	516,02
699,66	697,80
766,92	766,92
1876,90	1876,32

Utilizando a Equação (27), as Tabelas 1 e 2, os parâmetros ótimos de resistência e indutância para as diferentes topologias shunt são obtidos e tabelados a seguir.

Tabela 3 - Parâmetros ótimos dos circuitos shunt resistivo e ressonante.

Circuito shunt	Parâmetros ótimos	
	Resistência (k Ω)	Indutor (H)
Resistivo	45,77	-
Ressonante em série	7,61	64,05
Ressonante em paralelo	303,80	65,27

A seguir, ilustra-se o amortecimento na amplitude de vibração nas vizinhanças da primeira frequência natural do sistema viga-pzt obtido por meio da realização da análise harmônica e com o emprego da Equação (26).

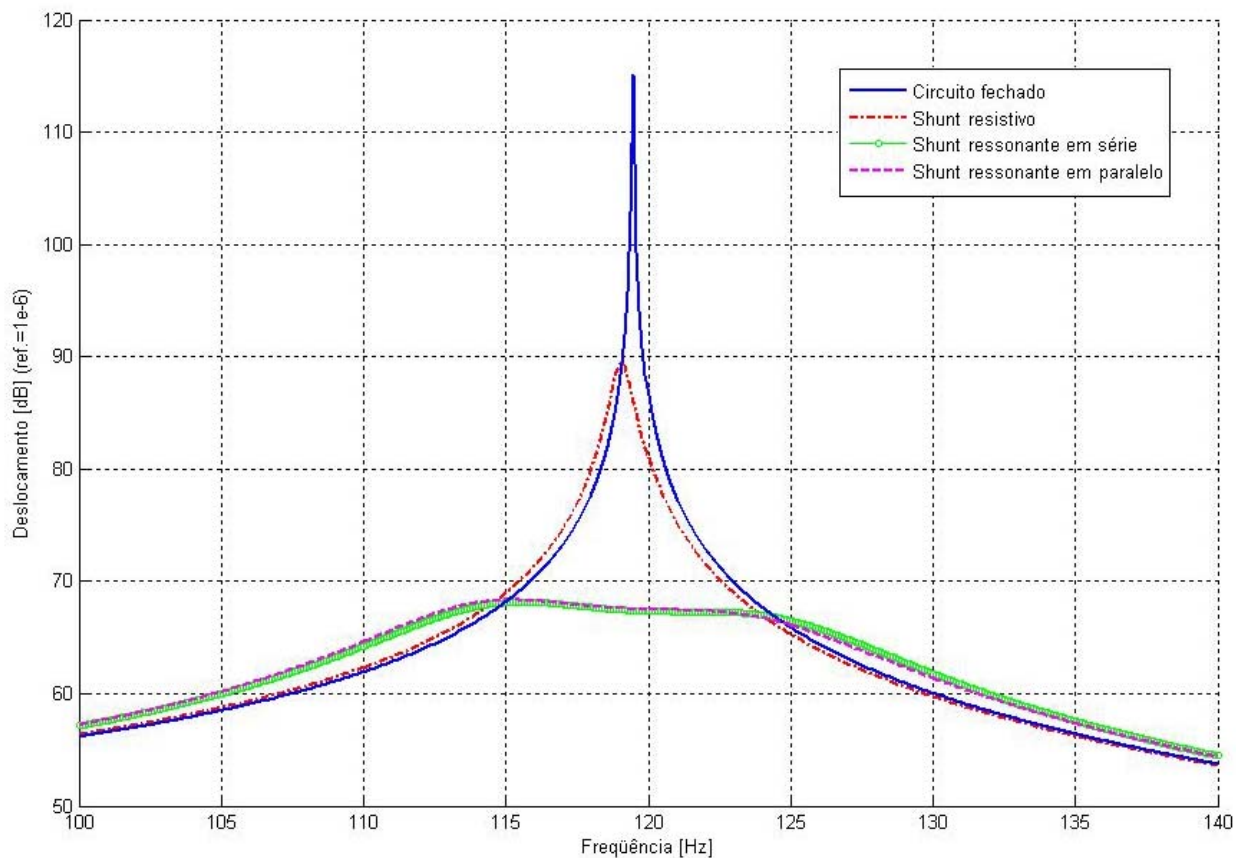


Figura 2 - Amortecimento da amplitude de vibração da primeira frequência natural utilizando circuitos shunt resistivo e ressonante em série/paralelo.

Observa-se pela Figura 2 que o amortecimento promovido pelo shunt ressonante em série e em paralelo é bem superior ao promovido pelo shunt resistivo. Já os desempenhos do circuito shunt ressonante em série e em paralelo são muito semelhantes. No entanto, comparando os parâmetros ótimos de resistência e indutância requeridos pelo circuito para a obtenção do máximo amortecimento da primeira frequência natural, observa-se que, a resistência elétrica ótima do ressonante em série é inferior à requerida pelo circuito em paralelo e suas indutâncias elétricas ótimas são praticamente iguais.

5. CONCLUSÕES

Os procedimentos de modelagem numérica por elementos finitos de estruturas compostas laminadas dotadas de sensores e atuadores piezelétricos permitem avaliar a eficiência de sistemas de controle passivo constituído por circuitos elétricos passivos de diversos tipos, acoplados aos elementos piezelétricos de forma bastante abrangente. Neste sentido, a teoria mista empregada permite considerar um posicionamento arbitrário dos elementos piezelétricos ao longo da espessura do estratificado, o que se traduz em uma grande flexibilidade de projeto.

Foi constatado que, para cada modo de vibração existe um valor ótimo de sintonia dos parâmetros do circuito shunt (indutor, resistor e capacitor) para obtenção da maior taxa de amortecimento modal.

No estudo do shunt resistivo o amortecimento é observado numa larga banda de frequência, enquanto que, no circuito shunt ressonante ele é mais pronunciado em um modo específico de vibração. O amortecimento do sistema estrutura-pzt sob sintonia ótima dos parâmetros do circuito shunt são maiores quando o circuito é ressonante em vez de resistivo.

Os resultados sugerem a realização de experimentos para a validação da modelagem numérica efetuada para estruturas compostas laminadas amortecidas passivamente pelo emprego de circuitos shunt.

Até o presente momento raros trabalhos utilizaram a teoria HSDT aplicada na modelagem de materiais compostos laminados amortecidos passivamente por circuitos shunt, o que motivou o estudo aqui reportado.

9. AGRADECIMENTOS

Ao CNPq pela bolsa de Doutorado de Faria, A. W. e pelo apoio financeiro dos projetos de pesquisa de Rade, D. A e ao Programa de Pós-Graduação em Eng. Mecânica pela oportunidade.

10. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Behrens, S. e Moheimani, O. R., 2000, "Optimal Resistive Elements for Multiple Shunt-damping of a Piezoelectric Laminate Beam", IEEE Conf. Decision Control, Sydney, Austrália.

Caruso, G. 2001, "A Critical Analysis of Electric Shunt Circuits Employed in Piezoelectric Passive Vibration Damping", Journal of Smart Mater. Struct., pp. 1059-1068.

Chee, C.; Tong, L.; Steven, G. P., 2001, "Static Shape Control of Composite Plates Using a Curvature-displacement Based Algorithm", International Journal of Solid and Structures, Vol. 38, pp. 6381-6403.

Faria, A. W., 2006, "Modelagem por Elementos Finitos de Placas Compostas Dotadas de Sensores e Atuadores Piezelétricos: Implementação Computacional e Avaliação Numérica", Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.

Hagood, N. W. e Von. Flotow, A., 1991, "Damping of Structural Vibrations with Piezoelectric Materials and Passive Electrical Network", Journal of Sound and Vibration", Vol. 146, n.2, pp. 243-268.

Kusculuoglu, Z. K. e Royston, T. J., 2005, "Finite Element Formulation for Composite Plates with Piezoceramic Layers for Optimal Vibration Control Applications", Journal of Smart Mater. Struct., pp. 1139-1153.

Park, C. H.; Kabeya, k. e Inman, D. J., 1998, "Enhanced Piezoelectric Shunt Design", Adapt. Struct. Smart Mater. Syst. Trans. ASME., Vol. 57, pp. 149-155.

Reddy, J. N., 1997, "Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis", Florida: CRC Press, 2.ed.

Santana, D. C., 2005, "Contribuição ao Desenvolvimento de Técnicas de Controle de Vibrações Empregando Piezocerâmicas Combinadas com Circuitos Shunt", Qualificação do Doutorado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.

Saravanos, D. A., 1999, "Passively Damped Laminated Piezoelectric Shell Structures with Integrated Electric Networks", National Aeronautics and Space Administration -NASA, pp. 1-19.

Viana, F. A. C. 2005, "Amortecimento de Vibrações usando Pastilhas Piezelétricas e Circuitos Shunt Ressonantes", Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Uberlândia.

Wu, S. Y. e Bicos, A. S., 1997, "Structural Vibration Damping Experiments Using Improved Piezoelectric Shunts" In Proc. SPIE Conf. Passive Damping Isolation: SPI. Vol. 3045, pp. 40-50.

11. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso.

ELEMENT FINITE FORMULATION OF COMPOSITE LAMINATED STRUCTURES DAMPING WITH PASSIVE ELECTRICAL NETWORKS

Albert Willian Faria

Federal University of Uberlândia. Av. João Naves de Avila, nº 2160 , Bloco X, Sta. Mônica, Uberlândia, MG.
e-mail: awfaria@mecanica.ufu.br

Domingos Alves Rade

Federal University of Uberlândia. Av. João Naves de Avila, nº 2160 , Bloco M, Sta. Mônica, Uberlândia, MG.
e-mail: rade@mecanica.ufu.br

Raquel Santini Leandro Rade

Universidade Federal de Uberlândia. Av. João Naves de Avila, nº 2160 , Bloco 1X, Sta. Mônica, Uberlândia, MG.
e-mail: rslr@ufu.br

Abstract: *This paper reports the finite element formulation of composite laminated structures with distributed shunted piezoelectric layers. The approximation of mechanical and electrical displacements of the composite structure is numerically formulated by means of Higher-order Shear Deformation (HSDT) combined with a Layerwise Theory for the electrical degrees-of-freedom. Both theories result in the so-called Mixed Theory. The finite element used in the formulation presents eight nodes, eleven mechanical degrees-of-freedom per node and a single electrical degree-of-freedom per node per piezoelectric layer. This article includes the optimal values of tuning of the electrical resistances and inductors. A numerical simulation is presented to put in evidence the damping enhancement promoted by of the circuits shunt. Numerical results for a cross-ply graphite/epoxy cantilever beam with shunted piezoceramic layers are presented. The resistive, resonant in series and parallel shunt circuits are studied.*

Keywords: *composite laminated structures, piezoelectric effect, damped vibration, shunted circuit, finite elements.*