

ANÁLISE TEÓRICA DA INTERAÇÃO FLUIDO ESTRUTURA EM UMA VIGA EM BALANÇO (PARTE 2 – VALIDAÇÃO E ANÁLISE FINAIS DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DA ESTRUTURA)

Giordhanne Bruno Carpaneda Gimenes

giordhanne@yahoo.com.br

Aristeu da Silveira Neto

aristeus@mecanica.ufu.br

Universidade Federal de Uberlândia – UFU, Faculdade de Engenharia Mecânica – FEMEC

Laboratório de Transferência de Calor e Massa e Dinâmica dos Fluidos – LTCM.

Av. João Naves de Ávila, 2160 - Campus Santa Mônica – Bloco 1M – Uberlândia/MG

CEP: 38400-902 – Fone: (34) 3239 4148/4192/4150 /4147- Fax: (34) 3239 4206.

Resumo: Após o estudo da vibração livre, necessita-se aproximar ainda mais o modelo matemático do modelo físico, por este motivo deve-se introduzir ao modelo os efeitos de amortecimento viscoso, bem como uma excitação externa. Nota-se a partir deste ponto que a solução analítica torna-se ainda mais trabalhosa. Por este motivo o problema será resolvido apenas de forma numérica. O modelo numérico foi validado utilizando como referência um conhecido software de elementos finitos (ANSYS). Os resultados obtidos foram fieis aos resultados fornecidos pelo software, validando assim o modelo proposto.

Palavras-chave: Interação fluido estrutura, comportamento dinâmico, viga em balanço, Runge Kutta.

1. INTRODUÇÃO

A proposta inicial do trabalho é desenvolver uma metodologia que possa ser utilizada em problemas de interação fluido-estrutura. Tais problemas envolvem o amortecimento causado pelas forças viscosas do fluido e também forças de pressão e velocidade, que excitam a estrutura em uma determinada frequência.

Até o presente momento, o modelo matemático foi desenvolvido pelos seguintes métodos: Euler na dimensão temporal e Diferenças Finitas no domínio espacial. Em virtude de uma maior flexibilidade será utilizado a partir de agora o método de Runge Kutta de 4^a Ordem no domínio temporal. O método de Runge Kutta possibilita a utilização de uma malha espacial 15,94% mais refinada em comparação com Euler. Outra vantagem: além de devolver como resultado a deflexão vertical da viga em cada ponto, também fornece a velocidade em cada ponto, enquanto Euler fornece apenas a deflexão vertical. Estes dois parâmetros são importantes para a solução dos problemas em interação fluido-estrutura, pois estas informações devem ser fornecidas na solução das Equações de Navier-Stokes.

2. MODELO MATEMÁTICO

Seja a equação diferencial completa do movimento vertical de uma viga qualquer:

$$m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = f(x, t) \quad (1)$$

Onde:

$m(x)$ = massa da estrutura por unidade de comprimento;

c = amortecimento da estrutura por unidade de comprimento;

E = módulo de elasticidade do material (Pa);

I = momento de inércia da seção transversal da viga (m^4);

$f(x,t)$ = força de excitação.

Dividindo ambos os lados da igualdade por $m(x)$ e reorganizando os termos:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \gamma - \beta \frac{\partial y}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \quad (2)$$

Sendo:

$$a^2 = \frac{EI}{m(x)} = \frac{EI}{\rho A}, \quad \beta = \frac{c}{m(x)} \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{f(x,t)}{m(x)}.$$

Onde:

ρ = é a densidade do material da viga (Kg/m^3);

A = área da seção transversal (m^2).

2.1 Discretização Espacial

Seja o termo: $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$ da Equação 2 (termo espacial do modelo).

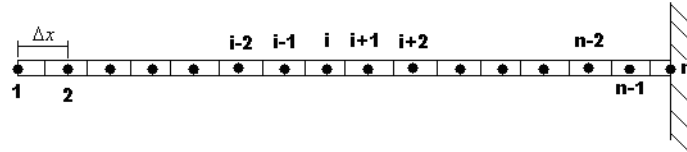


Figura 1. Malha utilizada na discretização espacial.

Inicia-se o processo discretizando a derivada de ordem quatro, através do Método das diferenças finitas, utilizando a malha descrita na Figura 1. Como a derivada possui uma ordem elevada, o domínio de nós utilizados a cada iteração deve ser aumentado, por este motivo utilizou-se cinco nós na discretização.

$$\begin{array}{ll}
 \frac{y_{i-2} - y_{i-1}}{\Delta x} \Leftrightarrow \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x} \Leftrightarrow \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} \Leftrightarrow \frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{\Delta x} & 1^{\text{a}} \text{ Derivada} \\
 \Downarrow & \\
 \frac{y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}}{\Delta x^2} \Leftrightarrow \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} \Leftrightarrow \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{\Delta x^2} & 2^{\text{a}} \text{ Derivada} \\
 \Downarrow & \\
 \frac{y_{i+1} - 3y_i + 3y_{i-1} - y_{i-2}}{\Delta x^3} \Leftrightarrow \frac{y_{i+2} - 3y_{i+1} + 3y_i - y_{i-1}}{\Delta x^3} & 3^{\text{a}} \text{ Derivada} \\
 \Downarrow & \\
 \frac{y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}}{\Delta x^4} & 4^{\text{a}} \text{ Derivada}
 \end{array}$$

*Para $3 \leq i \leq n-2$.

Para determinar os nós n e $n-1$ utiliza-se das duas primeiras condições de contorno (deflexão e rotação nulas no engaste).

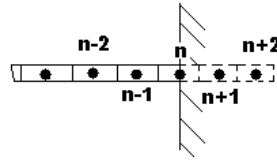


Figura 2. Malha utilizada na discretização dos dois últimos nós.

$y_n = 0$ Deflexão nula no engaste.

$$\frac{y_{n-2} - y_{n-3}}{\Delta x} \Leftrightarrow \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{\Delta x} \Leftrightarrow \frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta x} \xrightarrow{(-)} \frac{-y_n + y_{n-1}}{\Delta x} \quad 1^a \text{ Derivada}$$

$$\frac{y_{n-1} - 2y_{n-2} + y_{n-3}}{\Delta x^2} \Leftrightarrow \frac{y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}}{\Delta x^2} \Leftrightarrow \frac{-2y_{n-2} + 2y_{n-1}}{\Delta x^2} \quad 2^a \text{ Derivada}$$

$$\frac{y_n - 3y_{n-1} + 3y_{n-2} - y_{n-3}}{\Delta x^3} \Leftrightarrow \frac{-3y_n + 4y_{n-1} - y_{n-2}}{\Delta x^3} \quad 3^a \text{ Derivada}$$

$$\frac{-4y_n + 7y_{n-1} - 4y_{n-2} + y_{n-3}}{\Delta x^4} \quad 4^a \text{ Derivada}$$

*Para $y = n-1$

Para os nós 1 e 2 utiliza-se a seguinte malha sendo as condições de contorno momento e cisalhamento nulos na extremidade livre (nó 1):

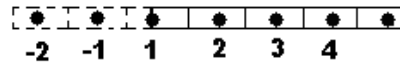


Figura 3. Malha utilizada na discretização dos dois primeiros nós.

Iniciando-se pelo nó 2:

$$\frac{y_1 - y_{-1}}{\Delta x} \Leftrightarrow \frac{y_2 - y_1}{\Delta x} \Leftrightarrow \frac{y_3 - y_2}{\Delta x} \Leftrightarrow \frac{y_4 - y_3}{\Delta x} \quad 1^a \text{ Derivada}$$

$$0 \Leftrightarrow \frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{\Delta x^2} \Leftrightarrow \frac{y_4 - 2y_3 + y_2}{\Delta x^2} \quad 2^a \text{ Derivada}$$

$$\frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{\Delta x^3} \Leftrightarrow \frac{y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1}{\Delta x^3} \quad 3^a \text{ Derivada}$$

$$\frac{y_4 - 4y_3 + 5y_2 - 2y_1}{\Delta x^4} \quad 4^a \text{ Derivada}$$

Discretização para o nó 1:

$$\frac{y_{-1} - y_{-2}}{\Delta x} \Leftrightarrow \frac{y_1 - y_{-1}}{\Delta x} \Leftrightarrow \frac{y_2 - y_1}{\Delta x} \Leftrightarrow \frac{y_3 - y_2}{\Delta x} \quad 1^a \text{ Derivada}$$

$$\begin{array}{rcl}
\frac{y_1 - 2y_{-1} + y_{-2}}{\Delta x^2} \Leftrightarrow 0 \Leftrightarrow \frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{\Delta x^2} & & 2^{\text{a}} \text{ Derivada} \\
\Downarrow \quad \Downarrow & & \\
\frac{-y_3 + 2y_2 - y_1}{\Delta x^3} \xleftarrow{(-)} \frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{\Delta x^3} & & 3^{\text{a}} \text{ Derivada} \\
\Downarrow & & \\
\frac{2y_3 - 4y_2 + 2y_1}{\Delta x^4} & & 4^{\text{a}} \text{ Derivada}
\end{array}$$

Tabela 1. Resumo das expressões obtidas para a derivada de 4ª ordem (termo espacial do modelo).

Posição	$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$
Nó 1	$\frac{2y_3 - 4y_2 + 2y_1}{\Delta x^4}$
Nó 2	$\frac{y_4 - 4y_3 + 5y_2 - 2y_1}{\Delta x^4}$
Nós $3 \leq i \leq n-2$	$\frac{y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}}{\Delta x^4}$
Nó $n-1$	$\frac{-4y_n + 7y_{n-1} - 4y_{n-2} + y_{n-3}}{\Delta x^4}$
Nó n	0

2.2. Discretização Temporal

No presente trabalho, será utilizado o método de Runge Kutta de 4ª ordem. Este método possui maior flexibilidade e precisão, além de fornecer como resultado a deflexão e a velocidade no mesmo cálculo. Estes dois parâmetros são importantes para a solução de problemas de interação fluido-estrutura.

Nota-se que a equação diferencial de domínio temporal da Equação 2 é de segunda ordem. Para resolvê-la pelo método de Runge Kutta deve-se fazer uma substituição de variável:

$$\frac{dy}{dt} = v(x, t) \quad (3)$$

$$\frac{dv}{dt} = \gamma - \beta \frac{\partial y}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \quad (4)$$

Onde: $v(x, t)$ é a velocidade em (m/s).
Aplicando Runge Kutta na Equação 3:

$$y_i^{n+1} = y_i^n + \frac{1}{6} (k_{1y}^i + 2k_{2y}^i + 2k_{3y}^i + k_{4y}^i)$$

Onde k são os coeficientes de Runge Kutta determinados pelas seguintes equações:

$$k_{1y}^i = \Delta t v_i^n$$

$$k_{2y}^i = \Delta t \left(v_i^n + \frac{k_{1v}^i}{2} \right)$$

$$k_{3y}^i = \Delta t \left(v_i^n + \frac{k_{2v}^i}{2} \right)$$

$$k_{4y}^i = \Delta t (v_i^n + k_{3v}^i)$$

Para a Equação 4 com discretização espacial nos nós centrais:

$$v_i^{n+1} = v_i^n + \frac{1}{6} (k_{1v}^i + 2k_{2v}^i + 2k_{3v}^i + k_{4v}^i)$$

$$k_{1v}^i = \Delta t \left[\gamma_i^n - \beta v_i^n - a^2 \left(\frac{y_{i+2}^n - 4y_{i+1}^n + 6y_i^n - 4y_{i-1}^n + y_{i-2}^n}{\Delta x^4} \right) \right]$$

$$k_{2v}^i = \Delta t \left[\gamma_i^n - \beta \left(v_i^n + \frac{k_{1v}^i}{2} \right) - a^2 \left(\frac{\left(y_{i+2}^n + \frac{k_{1y}^{i+2}}{2} \right) - 4 \left(y_{i+1}^n + \frac{k_{1y}^{i+1}}{2} \right) + 6 \left(y_i^n + \frac{k_{1y}^i}{2} \right) - 4 \left(y_{i-1}^n + \frac{k_{1y}^{i-1}}{2} \right) + \left(y_{i-2}^n + \frac{k_{1y}^{i-2}}{2} \right)}{\Delta x^4} \right) \right]$$

$$k_{3v}^i = \Delta t \left[\gamma_i^n - \beta \left(v_i^n + \frac{k_{2v}^i}{2} \right) - a^2 \left(\frac{\left(y_{i+2}^n + \frac{k_{2y}^{i+2}}{2} \right) - 4 \left(y_{i+1}^n + \frac{k_{2y}^{i+1}}{2} \right) + 6 \left(y_i^n + \frac{k_{2y}^i}{2} \right) - 4 \left(y_{i-1}^n + \frac{k_{2y}^{i-1}}{2} \right) + \left(y_{i-2}^n + \frac{k_{2y}^{i-2}}{2} \right)}{\Delta x^4} \right) \right]$$

$$k_{4v}^i = \Delta t \left[\gamma_i^n - \beta (v_i^n + k_{3v}^i) - a^2 \left(\frac{\left(y_{i+2}^n + k_{3y}^{i+2} \right) - 4 \left(y_{i+1}^n + k_{3y}^{i+1} \right) + 6 \left(y_i^n + k_{3y}^i \right) - 4 \left(y_{i-1}^n + k_{3y}^{i-1} \right) + \left(y_{i-2}^n + k_{3y}^{i-2} \right)}{\Delta x^4} \right) \right]$$

Para os nós 1, 2 e n-1, o procedimento é o mesmo descrito acima, porém a parte da discretização espacial (termos que multiplicam o coeficiente “a”) deve ser substituída no cálculo dos coeficientes de Runge Kutta da Equação 4. As equações espaciais discretizadas dos nós supracitados encontram-se no item 2.1 (Discretização Espacial). Nota-se que para o cálculo da deflexão é necessário conhecer a velocidade e vice-versa, por isto as velocidades e deflexões são calculados simultaneamente em cada ponto e em cada passo de tempo.

3. PROCEDIMENTO DE TESTE

Utilizando uma viga com as seguintes características:

$$L = 0,1m$$

$$A = 0,051 \times 0,001m = 51 \times 10^{-6} m^2$$

$$E = 206,8GPa$$

$$I = 4,25 \times 10^{-12} m^4$$

$$\rho = 7,8 \times 10^3 Kg / m^3$$

Para a validação do modelo numérico completo, utilizou-se o seguinte procedimento:

- Com a viga em sua posição de equilíbrio, aplica-se um carregamento distribuído estático qualquer (o carregamento será liberado suavemente sobre a viga de forma que não haja impacto);
- Mantendo-se o carregamento, a viga irá oscilar e com a ação do amortecimento, a mesma irá se estabilizar na posição de máxima deflexão estática;
- O procedimento foi simulado com o modelo descrito neste trabalho e comparado com a simulação feita no software de elementos finitos.

Utilizou-se os seguintes carregamentos distribuídos com deflexão estática máxima da extremidade livre conhecidos: Carregamento distribuído constante, carregamento distribuído variável linear e carregamento distribuído variável senoidal.

Na figura seguinte observa-se os carregamentos analisados com suas respectivas deflexões estáticas máximas.

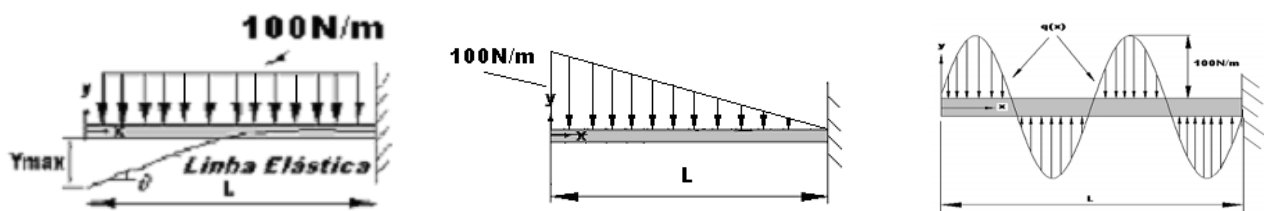


Figura 4. Carregamentos estáticos utilizados. Deflexões máximas da extremidade livre:

$$y_{const} = 1,4 \times 10^{-3} \text{ m}, \quad y_{triang} = 1,05 \times 10^{-3} \text{ m}, \quad y_{sen} = 3,03 \times 10^{-4} \text{ m}.$$

4. RESULTADOS

A seguir estão os resultados para os diversos carregamentos utilizados (carregamento distribuído constante, carregamento distribuído variável linear e carregamento distribuído variável senoidal), para simulações feitas no software de elementos finitos e no modelo apresentado neste trabalho respectivamente.

***Obs.: O amortecimento fornecido é arbitrário, porém constante em todos os testes.

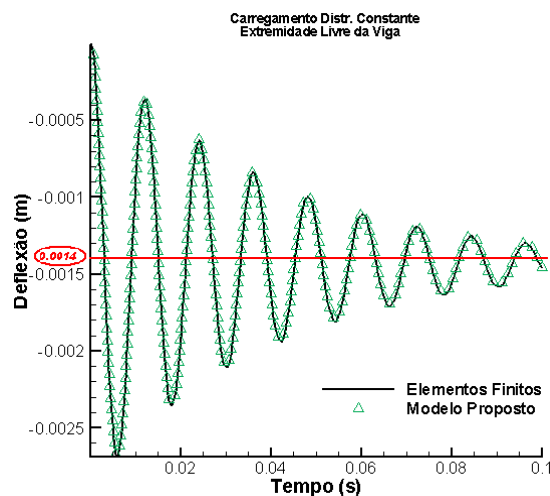


Figura 5. Comparação de resultados da deflexão da extremidade livre Elementos Finitos X Modelo Proposto

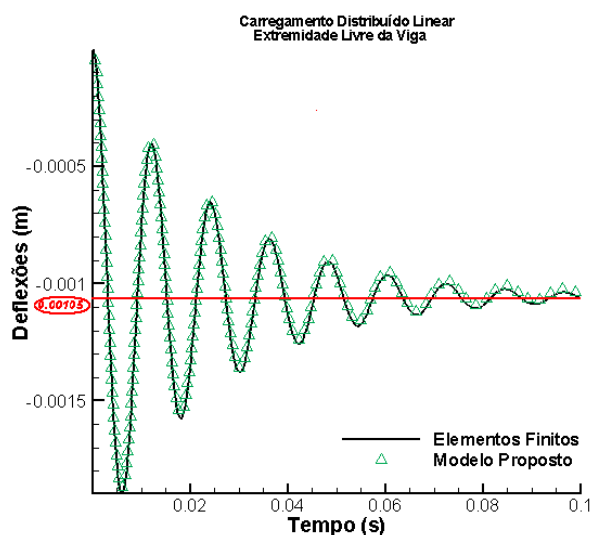


Figura 6. Comparação para o Carregamento Distribuído linear.

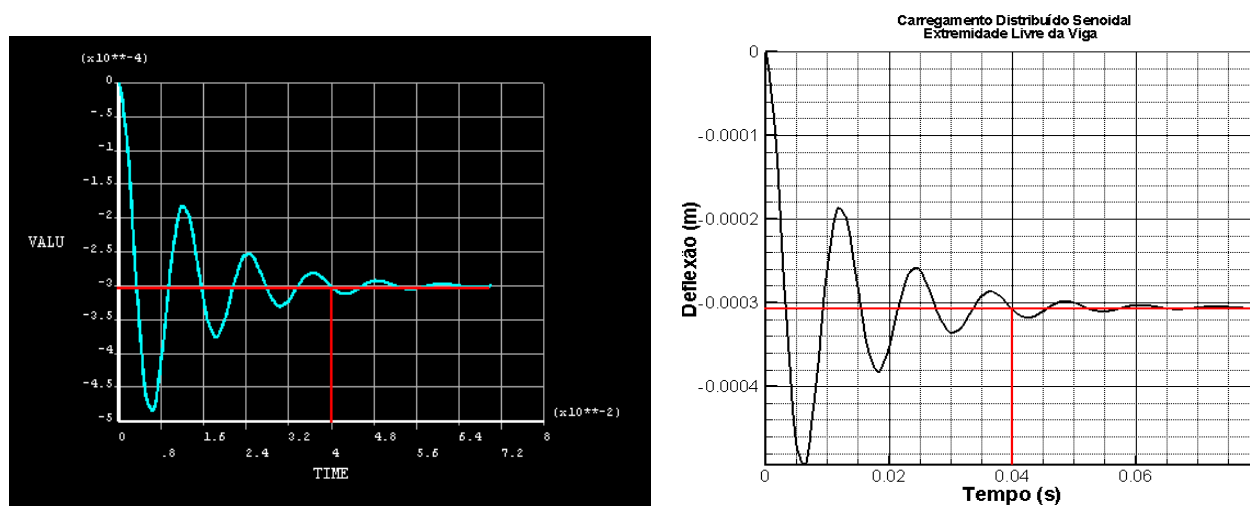


Figura 7. Comparação para o Carregamento Distribuído Senoidal.

Observando as figuras anteriores, nota-se que o modelo apresentado fornece resultados equivalentes aos resultados fornecidos pelo software de elementos finitos.

- A deflexão máxima após a estabilização (regime permanente) se dá exatamente na deflexão máxima estática para todos os casos analisados (ver linhas vermelhas horizontais nas Figuras 5, 6 e 7).
- Os resultados apresentados pelo modelo apresentado neste trabalho estão perfeitamente em fase com o resultado fornecido pelo software de elementos finitos conforme Figura 7.

Com base nos gráficos apresentados, conclui-se que a solução do modelo apresentada para a vibração forçada amortecida é válida. A partir deste ponto é possível aperfeiçoar o modelo (variação dinâmica das condições de contorno). As variações dinâmicas de condição de contorno representam fisicamente o caso em que a viga em seu movimento oscilatório encontre um obstáculo qualquer, por exemplo, um batente como ocorre no movimento das válvulas de um compressor.

5. AGRADECIMENTOS

Ao Professor Aristeu da Silveira Neto, mentor e incentivador; aos professores Antônio Pedro Cláps, Domingos Alves Rade, Marcelo Braga dos Santos, Valder Steffen Júnior, Francisco Paulo Lépre Neto e José Francisco Ribeiro pela colaboração; e ao CNPq.

6. REFERÊNCIAS

- B. Flannery, S. Teukolsky, W. Press, W. Vetterling, “Numerical Recipes Fortran”; Thomson, William T. “Teoria da Vibração com Aplicações”; tradução de Cássio Sigaud. – Rio de Janeiro: Interciência, 1978.
- Wylie Ray C., Barrett Louis C. “Advanced Engineering Mathematics”; Fifth edition, International Student Edition, McGraw-Hill International Book Company, 1982.

THEORETICAL ANALYSIS OF THE INTERACTION FLUID-STRUCTURE IN A CANTILEVER BEAM (PART 2 – FINAL VALIDATION AND ANALYSIS OF THE DYNAMIC BEHAVIOR OF THE STRUCTURE)

Giordhanne Bruno Carpaneda Gimenes

giordhanne@yahoo.com.br

Aristeu da Silveira Neto

aristeus@mecanica.ufu.br

Universidade Federal de Uberlândia – UFU, Faculdade de Engenharia Mecânica – FEMEC

Laboratório de Transferência de Calor e Massa e Dinâmica dos Fluidos – LTCM.

Av. João Naves de Ávila, 2160 - Campus Santa Mônica – Bloco 1M – Uberlândia/MG

CEP: 38400-902 – Fone: (34) 3239 4148/4192/4150 /4147- Fax: (34) 3239 4206.

Abstract: *After the study of the free vibration, it's necessary to approximate the mathematical model of the physical model, for this reason should be introduced to the model the effects of viscous damping, as well as an external excitement. It is noticed from this point that the analytical solution becomes still more laborious. For this reason the problem will just be solved in a numerical form. The numeric model was validated using as reference known software of finite elements (ANSYS). The gotten results had been faithful to the results supplied for software, validating the proposed model.*

Keywords: *Interaction fluid-structure, dynamic behavior, cantilever beam, Runge Kutta.*