

CONTROLE DE UM PÊNDULO INVERTIDO UTILIZANDO O MODELO FUZZY TAKAGI-SUGENO

Maria Adriana Tavares
matavares@aluno.feis.unesp.br

Rodrigo Borges Santos
rborges@dem.feis.unesp.br

Camilo Mesquita Neto
camilomn@dem.feis.unesp.br

Vicente Lopes Júnior
vicente@dem.feis.unesp.br
Departamento de Engenharia Mecânica – GMSINT – Grupo de Materiais e Sistemas Inteligentes
Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – UNESP, Av. Brasil n.º 56, centro, CEP 15385-000

Resumo: *O presente trabalho envolve a montagem e testes de um pêndulo invertido de uso didático da área de controle e automação do DEM-UNESP/Ilha Solteira. Este trabalho tem como objetivo projetar um sistema de controle de realimentação de estados baseado no controle com Lógica Fuzzy, modelo Takagi-Sugeno para equilibrar o pêndulo na posição vertical. O pêndulo consiste em uma vara montada em um carro linear cujo eixo de rotação é perpendicular à direção do movimento do carro. Neste artigo será mostrado o modelo dinâmico do pêndulo, a linearização das equações do movimento; a simulação em Matlab® e Simulink® e uma introdução ao modelo fuzzy Takagi-Sugeno. Os testes experimentais são realizados no equipamento da QUANSER IP02, disponível no laboratório do DEM.*

Palavras-chave: *pêndulo invertido, controle LMI, lógica fuzzy, modelo Takagi-Sugeno.*

1. INTRODUÇÃO

Geralmente, em muitas situações práticas, ou que exijam certo grau de precisão é necessário o controle de um sistema, de modo a adequá-lo para que este se comporte de forma conveniente ao que é desejado. Os objetivos mais importantes no controle automático de um sistema real são melhorar a qualidade, a funcionalidade e também a redução de custos. A importância da aplicação do controle automático em sistemas reais pode ser verificada através de alguns exemplos, tais como os robôs utilizados em indústrias. Estes robôs melhoram a qualidade dos produtos, aumentam a produtividade e podem ser utilizados em ambientes não suportáveis aos seres humanos.

No controle automático de sistemas, o objetivo é obter uma lei de controle que forneça as entradas de um processo, de modo que o sistema tenha um desempenho dinâmico aceitável.

Em muitos sistemas de controle aeroespaciais, que requerem precisão elevada, o projeto de sistemas de controle ótimo tem apresentado um papel muito importante (Filatyev, 2000; Betts, 2000; Mclean, 1999; Horie, 1999). Dentre eles, o projeto de sistemas de controle ótimos baseados na minimização de índices quadráticos de desempenho (Gao et al., 2000; Geromel et al., 1998). Em (Ogata, 1997) foi observado que a condição inicial do sistema controlado influencia o índice de desempenho quadrático.

Em sistemas onde a planta ou o sistema é não-linear, complexo, apresenta múltiplas variáveis ou for pouco compreendido é recomendada a utilização de controle com lógica Fuzzy. A teoria de

sistemas baseadas em lógica Fuzzy proporciona a possibilidade de supervisão inteligente, baseada apenas em informações qualitativas sobre a operação do sistema.

O objetivo deste trabalho é projetar um controlador com lógica Fuzzy via LMIs para equilibrar um pêndulo na posição vertical. O pêndulo invertido será montado em um equipamento da Quanser IP02. Esta prática experimental permitirá conhecer o modelo matemático do pêndulo, a linearização das equações do movimento, a aplicabilidade do método proposto para este sistema e, principalmente, os problemas normais relacionados à implementação prática de projeto de controladores..

2. MODELAGEM MATEMÁTICA DO SISTEMA PÊNDULO INVERTIDO

2.1. Apresentação da Planta do Pêndulo Invertido

O sistema designado por IP02 é um modelo com características importantes para experiências de movimento linear e controle. O sistema é formado por um carro de alumínio movimentado por motor DC de alta qualidade equipado com uma caixa planetária. O carro desliza ao longo de uma barra cilíndrica de aço e através de um trilho por um mecanismo de pinhão, o que assegura tração consistente e contínua.

O ângulo da inclinação da vara do IP02 sobre o eixo vertical é medido usando um sensor óptico e a posição do IP02 é medida através de um sensor óptico ligado a um pinhão adicional. O IP02 possui uma junta rotativa pela qual uma vara livre oscilante pode ser fixada e suspensa em frente ao carro funcionando como um pêndulo invertido. O pêndulo pode ser montado ou removido do carro. Além disso, uma massa pode ser presa ao carro de forma que a inércia oscilante do pêndulo não desloque o carro do trilho. A figura 1 representa o sistema IP02 e a tabela 1 descreve a nomenclatura usada na modelagem do sistema.



Figura 1: Sistema pêndulo invertido, designado por IP02.

Tabela 1 - Nomenclatura usada no modelo IP02

Símbolo	Descrição
B_{eq}	Coeficiente equivalente de amortecimento viscoso (Pinhão do motor)
B_p	Coeficiente de amortecimento viscoso (Eixo do pêndulo)
F_c	Força de controle
g	Constante gravitacional
l_p	Comprimento do pêndulo
I_p	Momento de inércia do pêndulo
M_p	Massa do pêndulo
M_c	Massa do carro
x_c	Posição do carro
α	Ângulo de inclinação do pêndulo
V_m	Voltagem do motor

2.2. Modelo Matemático Pêndulo Invertido

A figura 2 mostra um pêndulo invertido, com massa M_p e comprimento l_p , montado sobre um suporte móvel acionado por um motor, com massa M_c . A posição vertical do pêndulo é instável pelo fato de que ele tende a se afastar desta posição, para um lado ou para outro, ao menos que seja aplicada uma força de controle adequada. A força de controle F_c é aplicada ao suporte móvel. Considera-se aqui somente o problema em duas dimensões. Admitindo-se que o centro de gravidade da haste do pêndulo está em seu centro geométrico. Como uma observação, as exigências de projeto afetam as duas saídas do sistema: x_c e α . Então o sistema de pêndulo invertido e carro consistem em duas saídas, para uma entrada.

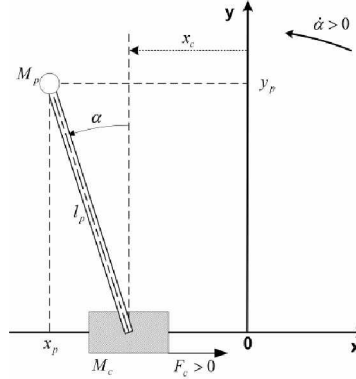


Figura 2 – Pêndulo invertido montado em um carro com massa M_c .

As equações de movimento do sistema representado na figura 2 são dadas por:

$$\frac{d^2}{dt^2} x_c(t) = \left[- (I_p + M_p l_p^2) B_{eq} \left(\frac{d}{dt} x_c(t) \right) - (M_p^2 l_p^3 + I_p M_p l_p) \sin(\alpha(t)) \left(\frac{d}{dt} \alpha(t) \right)^2 - M_p l_p \cos(\alpha(t)) B_p \left(\frac{d}{dt} \alpha(t) \right) + (I_p + M_p l_p^2) F_c + M_p^2 l_p^2 g \cos(\alpha(t)) \sin(\alpha(t)) \right] / \left((M_c + M_p) I_p + M_c M_p l_p^2 + M_p^2 l_p^2 \sin^2(\alpha(t)) \right) \quad (1)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \alpha(t) = \left[(M_c + M_p) M_p g l_p \sin(\alpha(t)) - (M_c + M_p) B_p \left(\frac{d}{dt} \alpha(t) \right) - M_p^2 l_p^2 \cos(\alpha(t)) \sin(\alpha(t)) \left(\frac{d}{dt} \alpha(t) \right)^2 - M_p l_p \cos(\alpha(t)) B_{eq} \left(\frac{d}{dt} x_c(t) \right) + F_c M_p l_p \cos(\alpha(t)) \right] / \left((M_c + M_p) I_p + M_c M_p l_p^2 + M_p^2 l_p^2 \sin^2(\alpha(t)) \right) \quad (2)$$

2.3. Linearização das Equações de Movimento

A obtenção de um modelo matemático linear de um sistema não-linear é feita supondo que os valores das variáveis mudam ou variam muito pouco em relação a uma condição de operação. Essas duas equações precisam ser linearizadas em torno do ponto de operação. No pêndulo invertido, a faixa operacional corresponde a ângulos bem pequenos, α , a partir da posição vertical. Após a linearização, as duas equações do movimento ficam:

$$\frac{d^2}{dt^2} x_c(t) = \left[- (I_p + M_p l_p^2) B_{eq} \left(\frac{d}{dt} x_c(t) \right) - M_p l_p B_p \left(\frac{d}{dt} \alpha(t) \right) + (I_p + M_p l_p^2) F_c + M_p^2 l_p^2 g \alpha(t) \right] / \left((M_c + M_p) I_p + M_c M_p l_p^2 \right) \quad (3)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \alpha(t) = \left[(\mathbf{M}_c + \mathbf{M}_p) \mathbf{M}_p g l_p \alpha(t) - (\mathbf{M}_c + \mathbf{M}_p) \mathbf{B}_p \left(\frac{d}{dt} \alpha(t) \right) - \mathbf{M}_p l_p \mathbf{B}_{eq} \left(\frac{d}{dt} \mathbf{x}_c(t) \right) + \mathbf{F}_c \mathbf{M}_p l_p \right] / \left((\mathbf{M}_c + \mathbf{M}_p) \mathbf{I}_p + \mathbf{M}_c \mathbf{M}_p l_p^2 \right) \quad (4)$$

2.4. Representação no Espaço de Estados

A representação no espaço de estados é a mais indicada para o projeto e implementação de um regulador LQR para um sistema real; ou seja, determinando as equações lineares, pode-se representar o sistema no espaço de estados, e logo, determinar as matrizes **A** e **B** que verificam a seguinte relação:

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{q}(t) + \mathbf{B} u(t) \quad (5)$$

onde **q**(t) é o vetor de estado, **u**(t) é a força de controle do carro linear e **A** é a matriz dinâmica, **B** é a matriz de controle.

Neste caso, **q**(t) é definido como:

$$\mathbf{q}(t) = \left[\mathbf{x}_c(t) \quad \alpha(t) \quad \frac{d}{dt} \mathbf{x}_c(t) \quad \frac{d}{dt} \alpha(t) \right]^T \quad (6)$$

A matriz dinâmica **A** é dada por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{g \mathbf{M}_p^2 l_p^2}{\mathbf{M}_{eq}} & \frac{\mathbf{B}_{eq} (\mathbf{M}_p^2 l_p^2 + \mathbf{I}_p)}{\mathbf{M}_{eq}} & \frac{\mathbf{M}_p l_p \mathbf{B}_p}{\mathbf{M}_{eq}} \\ 0 & \frac{\mathbf{M}_p g l_p (\mathbf{M}_c + \mathbf{M}_p)}{\mathbf{M}_{eq}} & \frac{\mathbf{M}_p l_p \mathbf{B}_{eq}}{\mathbf{M}_{eq}} & \frac{(\mathbf{M}_c + \mathbf{M}_p) \mathbf{B}_p}{\mathbf{M}_{eq}} \end{bmatrix} \quad (7)$$

A matriz **B** é dada por:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(\mathbf{I}_p + \mathbf{M}_p l_p^2)}{\mathbf{M}_{eq}} \\ \frac{\mathbf{M}_p l_p}{\mathbf{M}_{eq}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_{eq} = (\mathbf{M}_c + \mathbf{M}_p) \mathbf{I}_p + \mathbf{M}_c \mathbf{M}_p l_p^2 \quad (8)$$

3. MONTAGEM DO SETUP EXPERIMENTAL

3.1. Componentes Utilizados

Nos testes experimentais foram utilizados os seguintes componentes:

- Módulo de Potência: Quanser UPM 1503
- Placa de Aquisição de Dados: Quanser MultiQ PCI
- Planta de Movimento Linear: Quanser IP02
- Pêndulo: Quanser 609,6 mm
- Softwares de Controle em Tempo Real: WinCon-Simulink-RTX.

4. CONCEITOS BÁSICO DE LMIS

O uso de desigualdades matriciais lineares (*LMI*) em problemas de análise dinâmica começou por volta de 1890 quando Lyapunov publicou seu trabalho, surgindo a Teoria de Lyapunov (Boyd *et al.*, 1994a). A idéia de seu trabalho foi mostrar que um sistema dinâmico é estável, se e somente se existe uma matriz **P** positiva definida tal que $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} < \mathbf{0}$, onde **A** é a matriz dinâmica do sistema. Esta equação é conhecida como desigualdade de Lyapunov e é resultado direto do 2º teorema de Lyapunov (Ogata, 1997).

O próximo grande passo ocorreu nos anos 40 quando Lur'e, Postnikov e outros na antiga União Soviética aplicaram o método de Lyapunov para alguns problemas práticos de engenharia de controle, especialmente em problemas de estabilidade de sistemas de controle com não-linearidade no atuador. Apesar de não resolverem explicitamente na forma de *LMI*, o critério utilizado tinha a forma de uma desigualdade matricial. Esta desigualdade era reduzida a uma inequação polinomial que podia ser resolvida à "mão" e foi à primeira demonstração de que a teoria de Lyapunov poderia ser utilizada em problemas práticos de engenharia (Boyd *et al.*, 1994a).

Anteriormente à década de 70, grande parte dos problemas com restrições *LMI* requeria soluções via métodos analíticos, como método direto para sistemas de ordem pequena, métodos gráficos e soluções de equações de Riccati. No entanto, verificou-se que as *LMIs* que apareciam na teoria de controle poderiam ser formuladas como problemas de otimização convexa e solucionadas via algoritmos numéricos, como mostraram Pyatnitskii e Skorodinskii ao formularem a solução de uma *LMI* pelo algoritmo do elipsóide (Boyd *et al.*, 1994b).

Nesterov e Nemirovskii em 1988 desenvolveram o método de pontos interiores, que se aplica diretamente nos problemas de programação convexa que envolve *LMIs* (Assunção e Teixeira, 2001; Boyd *et al.*, 1994a). A partir de então, a utilização de técnicas baseadas em *LMIs* tem aumentado constantemente, principalmente devido a grande disponibilidade de rotinas em softwares comerciais, como o *LMI toolbox* do Matlab (Gahinet *et al.*, 1995) ou o software *LMISol* de domínio público (Oliveira *et al.*, 1997).

Alguns autores utilizaram *LMIs* para o projeto de controladores. Devido a fatores como possíveis erros no modelo estrutural (como o truncamento de altas frequências), as *LMIs* são poderosas ferramentas que permitem o projeto de controladores otimizados e robustos (Gonçalves, 2002).

Para finalidade de controle, em geral, a ordem do controlador é pré-definida pelo projetista e tais controladores são de difíceis projetos devido à presença de uma condição de *rank* que torna o problema não-convexo e numericamente difícil de ser tratado (Apkarian *et al.*, 2003). Logo, a redução da ordem do modelo permite o projeto do controlador baseado no modelo reduzido.

5. LÓGICA FUZZY

A Lógica Fuzzy é uma técnica que incorpora a forma humana de pensar em um sistema de tomada de decisões. Um controlador *fuzzy* típico pode ser projetado para se comportar conforme o raciocínio dedutivo, isto é, o processo que as pessoas utilizam para inferir conclusões baseadas em informações que elas já conhecem. A Lógica Fuzzy pode capturar esse conhecimento em um controlador *fuzzy*, possibilitando a implementação de um controlador computacional com desempenho equivalente ao do operador humano.

No projeto de controladores *fuzzy* pode ser usado também o raciocínio indutivo, onde seria possível o aprendizado e generalização através de exemplos da observação do comportamento do processo numa situação variante no tempo. Esse enfoque é geralmente referido como controle *fuzzy* adaptativo. Os sistemas *fuzzy* adaptativos podem se ajustar às mudanças no ambiente devido à sua habilidade de aprender e explicar seu raciocínio, além de poderem ser modificados e estendidos. O equilíbrio entre a aprendizagem por exemplos e a codificação do conhecimento humano explícito, fazem que tais sistemas sejam muito robustos, extensíveis e passíveis de serem aplicados em uma ampla gama de problemas.

5.1. Modelo Fuzzy Takagi Sugeno

O método de projeto de uma dada planta não-linear é representado pelo modelo fuzzy TS (Takagi e Sugeno, 1985). O modelo fuzzy TS é uma abordagem alternativa para a modelagem fuzzy; este modelo possui uma estrutura baseada em regras. A principal característica de um modelo TS é a descrição das dinâmicas locais de cada implicação fuzzy (regra) por um modelo de sistema linear. O modelo fuzzy global do sistema é obtido pela combinação fuzzy dos modelos do sistema linear (Assunção e Teixeira, 2001).

O sistema fuzzy TS é descrito pelas regras fuzzy Se-Então, que representam localmente relações lineares entre a entrada e a saída de um sistema. A descrição local da planta dinâmica a ser controlada está disponível em termos dos modelos lineares locais:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{aligned}\quad (9)$$

Sendo $i = 1, 2, \dots, r$ (regras) o vetor de estado $\mathbf{x}(t) \in R^n$, o vetor de entrada $\mathbf{u}(t) \in R^m$, o vetor de saída $\mathbf{y}(t) \in R^q$, $\mathbf{A}_i \in R^{n \times n}$, $\mathbf{B}_i \in R^{n \times m}$ e $\mathbf{C}_i \in R^{q \times n}$. A informação acima é então fundida com as regras Se-Então disponíveis, onde a i -ésima regra pode ter a forma:

$$\begin{aligned}\text{Regra } i: \quad & \text{SE } z_1(t) \text{ é } M_1^i \text{ E } \dots \text{ E } z_p(t) \text{ é } M_p^i, \\ & \text{ENTÃO } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases}\end{aligned}\quad (10)$$

$M_j^i, j = 1, 2, \dots, p$ é o conjunto fuzzy j da regra i e $z_1(t), \dots, z_p(t)$ são as variáveis premissas. Seja $\mu_j^i(z_j(t))$ a função de pertinência do conjunto fuzzy M_j^i , $\varpi^i(z(t))$ e $\mathbf{z}(t) = [z_1(t) z_2(t) \dots z_p(t)]$. E seja:

$$\varpi^i(\mathbf{z}(t)) = \prod_{j=1}^p \mu_j^i(z_j(t)) \quad (11)$$

Como $\mu_j^i(z_j(t)) \geq 0$ tem-se, para $i = 1, 2, \dots, r$,

$$\varpi^i(\mathbf{z}_j(t)) \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^r \varpi^i(\mathbf{z}(t)) > 0. \quad (12)$$

5.2. Projeto de Reguladores com Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno

Para projetar controladores fuzzy para estabilizar sistemas não-lineares descritos por modelos fuzzy foi utilizado o conceito de Compensação Distribuída Paralela (CDP). Para cada regra do controlador fuzzy será projetado um compensador e são utilizadas técnicas de projeto de controle linear. O controlador fuzzy global obtido, geralmente não-linear é uma combinação fuzzy de cada controlador linear individual.

A CDP oferece um procedimento para projetar um controlador para o modelo fuzzy Takagi-Sugeno, onde cada regra de controle é projetada a partir da correspondente regra de um modelo Takagi-Sugeno da planta. O controlador fuzzy projetado compartilha os mesmos conjuntos de regras com o modelo fuzzy nas partes premissas. Para o modelo fuzzy da equação (9), sendo $i = 1; 2; \dots; r$, o regulador fuzzy via CDP tem a seguinte estrutura:

Regra i : SE $z_1(t)$ é M_1^i E....E $z_p(t)$ é M_p^i
 ENTÃO: $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_i \mathbf{x}(t)$. (13)

Portanto, o controlador fuzzy é dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= -\frac{\sum_{i=1}^r \varpi^i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{K}_i \mathbf{x}(t)}{\sum_{i=1}^r \varpi^i(\mathbf{z}(t))} \\ &= -\sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{K}_i \mathbf{x}(t) \\ &= -\mathbf{K}(\alpha) \mathbf{x}(t). \end{aligned} \quad (14)$$

onde $\alpha_i(\mathbf{z}(t))$ é uma função de pertinência para i regras fuzzy e $\mathbf{K}(\alpha)$ é o ganho de realimentação para o conjunto de regras fuzzy.

O objetivo do projeto do regulador fuzzy é determinar os ganhos de realimentação locais $\mathbf{K}_i$ nas partes conseqüentes.

Sistema Controlado Fuzzy Contínuo (SCFC) (Machado, 2003).

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j(\mathbf{z}(t)) \{ \mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j \} \mathbf{x}(t) \\ &= \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(\mathbf{z}(t)) \mathbf{G}_{ii} \mathbf{x}(t) + 2 \cdot \sum_{i < j}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j(\mathbf{z}(t)) \left\{ \frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right\} \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (15)$$

Sendo

$$\mathbf{G}_{ij} = \mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j \quad (16)$$

5.3. Condições para Estabilidade de Reguladores Fuzzy

As condições suficientes para a estabilidade de sistemas fuzzy contínuos e discretos no tempo são calculadas usando funções de Lyapunov quadráticas do tipo $\mathbf{V}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{x}(t)$ (Tanaka e Sugeno, 1992). Os principais resultados para o SCFC estão descritos abaixo.

Lema 1 O ponto de equilíbrio $\mathbf{x} = 0$ do sistema fuzzy contínuo é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz simétrica positiva definida comum $\mathbf{P}$ tal que:

$$\mathbf{A}_i^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_i < 0 \quad (17)$$

para $i = 1, 2, \dots, r$; isto é, para todos os subsistemas.

Prova: Segue diretamente da aplicação da função de Lyapunov $\mathbf{V}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{x}(t)$.

Para a apresentação dos resultados para a estabilidade do sistema forçado, será utilizada a definição do número de regras ativas: o sistema fuzzy (15) possui r regras e para certo $z(t) = z_0$ o número de regras ativas é igual ao número de termos $\alpha_1(z_0), \dots, \alpha_r(z_0)$ não nulos. Por exemplo, na figura 3, as regras ativas para $z_1(t) \leq a, z_1(t) \in (a, b), z_1(t) = b, z_1(t) \in (b, c), z_1(t) = c, z_1(t) \in (c, d), z_1(t) \geq d$, são respectivamente as regras 1; 1 e 2; 2; 2 e 3; 3; 3 e 4; 4. Assim o número de regras ativas é menor ou igual a dois.

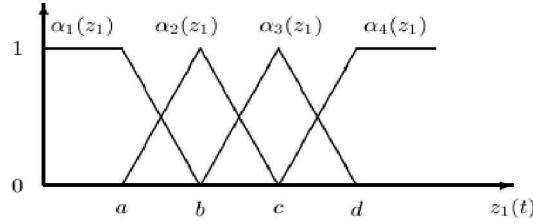


Figura 3: Exemplo de 4 regras fuzzy: $\alpha_1(z_1(t)), \alpha_2(z_1(t)), \alpha_3(z_1(t)), \alpha_4(z_1(t)) \in [0,1]$ e $\alpha_1(z_1(t)) + \alpha_2(z_1(t)) + \alpha_3(z_1(t)) + \alpha_4(z_1(t)) = 1$.

Lema 2: O ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema de controle fuzzy contínuo descrito por (15) é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz simétrica positiva definida comum $\mathbf{P}$ tal que

$$\mathbf{G}_{ii}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{G}_{ii} < 0 \quad (18)$$

para todo $i = 1, \dots, r$ e

$$\left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right) \leq 0, \quad i < j \quad (19)$$

Lema 3: Assuma que o número de regras que estão ativas para todo t é menor ou igual a s , sendo $1 < s \leq r$. O ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema de controle fuzzy contínuo descrito por (15) é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz simétrica positiva definida comum $\mathbf{P}$ e uma matriz simétrica semipositiva definida comum $\mathbf{Q}$ tais que

$$\mathbf{G}_{ii}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{G}_{ii} + (s-1)\mathbf{Q} < 0 \quad (20)$$

para todo $i = 1, \dots, r$ e

$$\left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right) - \mathbf{Q} \leq 0, \quad i < j \quad (21)$$

para todo $i, j = 1, \dots, r$ executando-se os pares (i, j) tais que $\alpha_i(z(t))\alpha_j(z(t)) = 0, \quad \forall z(t)$.

6. RESULTADOS NUMÉRICOS

A Figura 4 mostra a localização dos pólos do sistema a malha aberta e a malha fechada. De acordo com localização dos pólos a malha aberta observa-se a instabilidade do sistema, isto é, pólo no eixo real positivo. Neste caso, o sistema torna-se estável, pois o pólo a malha fechada está localizado no eixo real negativo, como mostra a figura 4.

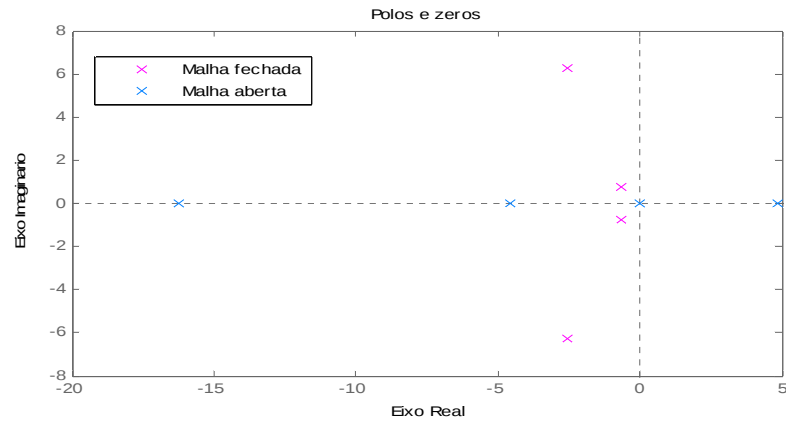
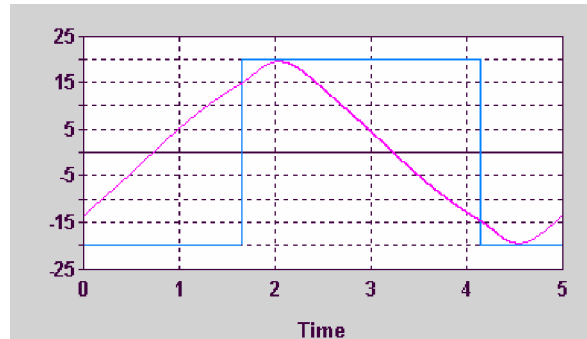


Figura 4: Pólos a malha aberta e a malha fechada

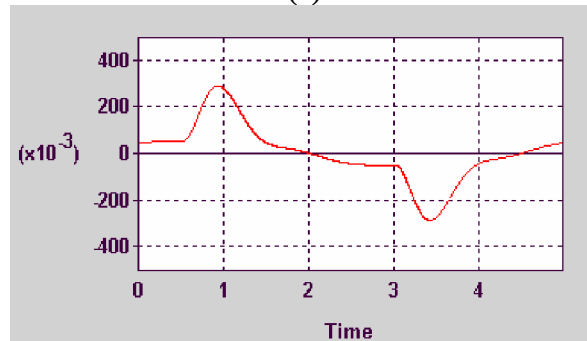
O vetor de ganho $\mathbf{K}$ foi obtido através de um algoritmo no programa Matlab; e o valor obtido para este caso é:

$$\mathbf{K} = [-0.9432 \quad 16.0481 \quad -8.3021 \quad 1.7881]$$

A análise numérica foi feita através do programa Simulink. As Figuras 5 mostram os resultados obtidos. Na figura 5(a), a cor azul representa o sinal de entrada do sistema, onde o limite é de ± 20 mm para a posição do carro e o sinal rosa representa a posição obtida do carro e na figura 5(b) o sinal de cor vermelha é o ângulo do pêndulo. Na figura 5(c) o sinal de cor verde é à força de controle atuante no sistema. Nesta simulação foi possível observar que o limite de 20 mm para o deslocamento do carro não foi ultrapassado.



(a)



(b)

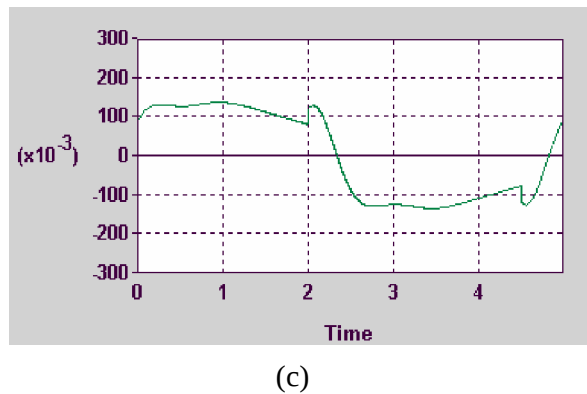


Figura 5: Resultados obtidos para (a) posição do carro x_c [mm], (b) ângulo do pêndulo α [graus] e (c) força de controle F_c [V].

7. CONCLUSÃO

Grande parte dos trabalhos de controle moderno utiliza uma representação no espaço de estados considerando um modelo dinâmico de segunda ordem e linear. Várias aplicações são bem sucedidas ao se utilizar estas considerações, no entanto, em geral, os problemas reais de engenharia são não lineares. Por este fato, pesquisadores e engenheiros concentram esforços na obtenção de técnicas de controle que permitam se utilizar modelos mais representativos. Neste contexto, a lógica Fuzzy é bastante aplicada em automação de processos industriais, robótica e tomada de decisões complexas.

Em particular, neste trabalho se utilizou o modelo Fuzzy Takagi-Sugeno devido à descrição das dinâmicas locais de cada implicação fuzzy (regra) por um modelo de sistema linear. O modelo fuzzy global do sistema é obtido pela combinação fuzzy dos modelos do sistema linear. Por ser um trabalho introdutório o modelo dinâmico foi considerado linear para se verificar a potencialidade da técnica. Neste caso o desempenho do controle foi qualitativamente satisfatório por posicionar os pólos do sistema à esquerda do semiplano complexo, sendo limitado quantitativamente para pequenos deslocamentos angulares da haste do pêndulo. Buscando se obter um controlador robusto, ou seja, capaz de manter o sistema estável mesmo para consideráveis amplitudes de perturbação, a seqüência natural deste trabalho será utilizar a equação de movimento em sua forma não linear.

8. REFERÊNCIAS

- Apkarian, P., Tuan, H. e Noll, D., 2003, "Fixed-order H_∞ Control Design via a Partially Augmented Lagrangian Method". *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 13, 1137-1148.
- Assunção, E. e Teixeira, M., C., M., 2001, "Projeto de Sistema de Controle via LMIs usando o MATLAB", In: *Escola Brasileira de Aplicações em Dinâmica e Controle – APLICON*, USP – São Carlos – SP, 2001. (CD-Room).
- Boyd, S., Balakrishnan, V., Feron, E. e El Ghaoui, L., 1994a, "History of Linear Matrix Inequalities in Control Theory". In: *American Control Conference*, Baltimore, Maryland, 1994a.
- Boyd, S., Balakrishnan, V., Feron, E. e El Ghaoui, L., 1994b, "Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory", *Siam Studies in Applied Mathematics*, USA, 1994b, 193p.
- Betts, J.T. (2000). Very low-thrust trajectory optimization using a direct SQP method. *J. Comput Appl math* 120(1-2):27-40.
- Filat'yev, A. S. (2000). "Paradoxes" of optimal solutions in problems of space vehicle injection and reentry. *Acta Astronaut* 47(1):11-18.
- Machado, E.R.M.D. (2003) *Modelagem e Controle de Sistemas Fuzzy Takagi-Sugeno*; Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP, Ilha Solteira-SP. Tese de Doutorado.

McLean, D., Zaludin, Z. A. (1999) Stabilization of longitudinal motion of a hipersonic transport aircraft. TI Meas Control 21(2-3): 99-105.

Ogata, K., 2000, “Engenharia de Controle Moderno”, Terceira Edição, Prentice-Hall do Brasil, RJ.

Oliveira, M. C., Farias, D. P. and Geromel, J. C., 1997, “LMISol, User’s Guide”, UNICAMP, Campinas-SP, Brasil.

Quanser Innovate Educate. IP01 and IP02., 2003., “Single Inverted Pendulum User Manual”, MultiQ User Manual, MultiQ User Manual.

Takagi, T. and Sugeno, M. (1985). Fuzzy Identification of Systems and Its Applications to Modeling and Control, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics.

Tanaka, K. and Sugeno, M. (1992). Stability Analysis and Design of Fuzzy Control Systems, Fuzzy Sets and Systems.

9. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são responsáveis por todo conteúdo deste trabalho.

CONTROL DESIGN FOR AN INVERTED PENDULUM USING FUZZY TAKAGI-SUGENO MODEL

Maria Adriana Tavares

matavares@aluno.feis.unesp.br

Rodrigo Borges Santos

rborges@dem.feis.unesp.br

Camilo Mesquita Neto

camilomn@dem.feis.unesp.br

Vicente Lopes Júnior

vicente@dem.feis.unesp.br

Department of Mechanical Engineering, GMSINT – Group of Intelligent Materials and Systems
Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – UNESP, Av. Brazil n.º 56, ZIP CODE 15385-000

Abstract: *The present work involves the assembly and tests of an inverted pendulum of didactic use of the control area and automation of the Single DEM-UNESP/Ilha Solteira. This work has as objective to project a system of control of feedback of states based in the control with Fuzzy Logic, model Takagi-Sugeno to balance the pendulum in the vertical position. The pendulum consists of a pole mounted in a linear car whose axle of rotation is perpendicular to the direction of the movement of the car. In this article the dynamic model of the pendulum, the linearização of the equations of the movement will be shown; the simulation in Matlab® and Simulink® and an introduction to the model fuzzy Takagi-Sugeno. The experimental tests are carried through in the equipment of QUANSER IP02, available in the laboratory of the DEM.*

Keywords: *inverted pendulum, LMI control, fuzzy logic, model Takagi-Sugeno.*