

APLICAÇÃO DA TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA NA ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DE CÉLULAS DE COMBUSTÍVEL NUCLEAR EM GEOMETRIAS RETANGULARES

Mateus Calegari Paulique

Thiago Antonini Alves

Cassio Roberto Macedo Maia

mateuspaulique@gmail.com

antonini@dem.feis.unesp.br

cassio@dem.feis.unesp.br

Departamento de Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia, Unesp/Ilha Solteira, Av. Brasil, 56, Centro, CEP 15385-000, Ilha Solteira, SP, Brasil

Resumo: *Problemas de difusão de calor que apresentam em seu domínio fontes distribuídas despertam grandes interesses em pesquisadores na Engenharia. As células de combustível em reatores nucleares são exemplos de uma importante aplicação de problemas desta natureza.*

Palavras-chave: *Célula de combustível nuclear, Transformada Integral, Problemas difusivos não-lineares, Prisma retangular*

1. INTRODUÇÃO

Grande parte da comunidade científica mundial busca meios de proporcionar à sociedade uma vida mais confortável, produtiva e segura. Estes pesquisadores e cientistas buscam retirar suas concepções e idéias a respeito do mundo a partir de observações da própria natureza. Entretanto, na maioria das vezes, os fenômenos que ocorrem no meio natural são de tamanha complexidade que qualquer modelagem que procure representá-los de forma mais ou menos realista se torna bastante complicado (Pelegrini, 2005).

Neste contexto, a solução de problemas difusivos transientes que apresentam fontes distribuídas em seu domínio representa um enorme desafio para a Engenharia, uma vez que, as equações diferenciais fundamentais que regem os princípios de conservação são, em regra, de natureza complexa. Uma importante aplicação de problemas desta natureza, diz respeito a células de combustível em reatores nucleares. Estas células apresentam dimensões reduzidas e liberam altas taxas de energia térmica resultante da reação de fissão nuclear do elemento físsil. Dessa forma, é de grande interesse o domínio do cálculo da potência térmica visto que há um limite suportável para estas células que corresponde à temperatura do ponto de fusão do combustível. Este limite crítico é fundamental no projeto de construção da célula e de todo o conjunto de feixe do núcleo de combustível nuclear, pois a maximização da transferência da energia gerada para o fluido de trabalho, sem ultrapassar a temperatura limite, possibilita a construção de vasos de pressão de menores dimensões, bem como o estabelecimento de um inventário de combustível menor (Maia, 2003).

2.METODOLOGIA

Para o problema da célula de reator nuclear em questão, admite-se que o termo fonte é proporcional ao fluxo neutrônico através do elemento combustível. O transporte de nêutrons é um fenômeno complexo e de difícil solução. No presente trabalho, este problema será analisado pela teoria da difusão, que é um modelo simplificado a qual está fundamentado na Lei de *Fick* (Glasstone & Sesonske, 1994). Para esta análise, considera-se que as propriedades térmicas variam com a temperatura e assume-se que a temperatura é constante no contorno do elemento combustível. Também se admite que o perfil da temperatura inicial (T_i) é uniforme. Neste modelo, a equação da difusão em meios prismáticos retangulares de domínio Ω e de contorno Γ , é dada por:

$$\nabla \cdot [k(T) \nabla T(x, y, t)] + \bar{q}''' g(x, y) = \rho c_p(T) \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t}, \quad \{(x, y) \in \Omega, \quad t > 0\}, \quad (1)$$

$$T(x, y, t) = T_p, \quad \{(x, y) \in \Gamma, \quad t > 0\}, \quad (2)$$

$$T(x, y, 0) = T_i = T_p, \quad \{(x, y) \in \Omega\}, \quad (3)$$

sendo que $k(T)$ é a condutividade térmica, $\bar{q}'''$ é o termo fonte médio, $g(x, y)$ é a densidade do fluxo neutrônico, ρ é a densidade, $c_p(T)$ é o calor específico a pressão constante e T_p é a temperatura na parede na célula de combustível.

2.1 Linearização da equação da difusão

Para facilitar o procedimento analítico, a equação diferencial será adequadamente linearizada utilizando-se da Técnica da Transformada de *Kirchhoff*. Define-se assim, uma nova variável T^* como:

$$T^*(x, y) = \frac{1}{k_0} \int_{T_0}^{T(x, y)} k(T') dT', \quad (4)$$

sendo que $k_0 = k(T_0)$ e T_0 é a temperatura de referência. Desta definição, segue que o gradiente da nova variável T^* é dado por:

$$\nabla T^*(x, y) = \frac{1}{k_0} k(T) \nabla T(x, y). \quad (5)$$

A equação da difusão é reescrita, então, como:

$$\nabla^2 T^*(x, y) + \frac{\bar{q}'''}{k_0} g(x, y) = \frac{1}{\alpha(T)} \frac{\partial T^*(x, y)}{\partial t}, \quad \{(x, y) \in \Omega\}, \quad (6)$$

$$T^*(x, y) = T_p^* = \frac{1}{k_0} \int_{T_0}^{T_p} k(T') dT', \quad \{(x, y) \in \Gamma\}, \quad (7)$$

$$T^*(x, y, 0) = T_i^* = T_p^*, \quad \{(x, y) \in \Omega\}, \quad (8)$$

sendo que T_i^* e T_p^* são, respectivamente, as temperaturas inicial e de parede transformadas por *Kirchhoff* e $\alpha(T)$ é a difusividade térmica. A forma adimensional da Equação (6) é escrita como:

$$\nabla^2 \theta(X, Y, \tau) + g(X, Y) = \frac{L_{ref}^2}{\alpha(T)} \frac{\partial \theta(X, Y, \tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t}, \quad \{(X, Y) \in \Omega, t > 0\}, \quad (9)$$

$$X = \frac{x}{L_{ref}}, \quad Y = \frac{y}{L_{ref}}, \quad \tau = \frac{t \alpha(T)}{L_{ref}^2}, \quad \alpha(T) = \frac{k(T)}{\rho c_p(T)}, \quad (10, 11, 12, 13)$$

$$\theta(X, Y) = \frac{[T^*(X, Y) - T_p^*] k_0}{L_{ref}^2 \bar{q}'''}, \quad L_{ref} = \frac{A_s}{Per}. \quad (14, 15)$$

sendo que L_{ref} é o comprimento característico, A_s é a área da seção transversal e Per é o perímetro do prisma.

Como pode ser observada, a difusividade térmica possui uma dependência com a temperatura. Consequentemente, a variável tempo adimensional também é função da temperatura. No entanto, será admitido aqui que a influencia de T em τ no intervalo de tempo dt seja pequena. Portanto, não será considerada a influência de T em τ . Assim, a equação da difusão de calor pode ser linearizada da forma como segue:

$$\nabla^2 \theta(X, Y, \tau) + g(X, Y) = \frac{\partial \theta(X, Y, \tau)}{\partial \tau}, \quad \{(X, Y) \in \Omega, t > 0\}, \quad (16)$$

Os parâmetros geométricos de interesse são visualizados na Figura 1. Observa-se que o problema proposto apresenta simetria em relação ao eixo X e ao eixo Y de forma que é suficiente considerar somente o domínio em um quadrante.

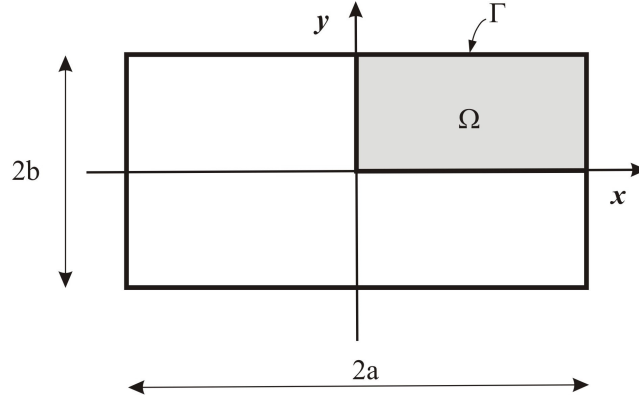


Figura 1 - Parâmetros geométricos da célula de combustível estudada.

Para o domínio compreendido em um quadrante, a equação da difusão e as condições iniciais e de contorno neste sistema de coordenadas são dadas por:

$$\left[\frac{\partial^2 \theta(X, Y, \tau)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta(X, Y, \tau)}{\partial Y^2} \right] + g(X, Y) = \frac{\partial \theta(X, Y, \tau)}{\partial \tau}, \quad \{0 \leq X \leq X_0, \quad 0 \leq Y \leq Y_0\}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \theta(X, Y, \tau)}{\partial X} = 0, \quad \{X = 0, \quad 0 \leq Y \leq Y_0\}, \quad (18)$$

$$\theta(X, Y, \tau) = 0, \quad \{X = X_0, \quad 0 \leq Y \leq Y_0\}. \quad (19)$$

$$\frac{\partial \theta(X, Y, \tau)}{\partial Y} = 0, \quad \{0 \leq X \leq X_0, \quad Y = 0\}, \quad (20)$$

$$\theta(X, Y, \tau) = 0, \quad \{0 \leq X \leq X_0, \quad Y = Y_0\}. \quad (21)$$

com

$$X_0 = \frac{L}{L_{ref}}, \quad Y_0 = \frac{l}{L_{ref}}. \quad (22, 23)$$

2.2 Aplicação da TTIG

Os perfis de temperatura característicos do problema proposto serão obtidos a partir da aplicação da transformada integral sobre sua equação característica. Devido a sua propriedade bidimensional, o potencial $\theta(X, Y, \tau)$ será escrito em termos de uma expansão em autofunções normalizadas obtidas de problemas auxiliares de autovalor, do tipo de *Sturm-Liouville*, para cada coordenada espacial. Assim, a aplicação da transformada integral, para cada um dos problemas propostos, será feita em partes. Considere o seguinte problema auxiliar de autovalor:

$$\frac{d^2 \psi(X)}{dX^2} + \mu^2 \psi(X) = 0, \quad \{0 < X < X_0\}, \quad (24)$$

$$\frac{d\psi(0)}{dX} = 0, \quad \frac{d\psi(X_0)}{dX} = 0. \quad (25, 26)$$

As autofunções e os autovalores associados deste problema são:

$$\psi_i(X) = \cos(\mu_i X), \quad \mu_i = \frac{(2i-1)\pi}{2X_0}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (27, 28)$$

As autofunções acima são ortogonais e permitem o desenvolvimento do seguinte par transformada-inversa:

$$\bar{\theta}_i(Y, \tau) = \int_0^{X_0} K_i(X) \theta(X, Y, \tau) dX, \quad \text{transformada}, \quad (29)$$

$$\theta(X, Y, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} K_i(X) \bar{\theta}_i(Y, \tau), \quad \text{inversa}, \quad (30)$$

$$K_i(X) = \frac{\psi_i(X)}{N_i^{1/2}}, \quad N_i = \int_0^{X_0} \psi_i^2(X) dX = \frac{X_0}{2}. \quad (31, 32)$$

Efetuada o produto interno das autofunções normalizadas $K_i(X)$ com a equação da difusão e fazendo uso das condições de contorno e da equação que definem o problema auxiliar de autovalor, obtém-se:

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_{ij}(Y) \frac{\partial \bar{\theta}_j(Y, \tau)}{\partial \tau} + \mu_i^2 \bar{\theta}_i(Y, \tau) = \frac{\partial^2 \bar{\theta}_i(Y, \tau)}{\partial Y^2} + C_i(Y), \quad (33)$$

$$A_{ij}(Y) = \int_0^{X_0} K_i(X) K_j(X) dX, \quad C_i(Y) = \int_0^{X_0} K_i(X) g(X, Y) dX. \quad (34, 35)$$

Para proceder a transformação integral relativo a coordenada Y , considere o seguinte problema de autovalor:

$$\frac{d^2 \phi(Y)}{dY^2} + \lambda_j^2 \phi(Y) = 0, \quad \{0 < Y < Y_0\}, \quad (36)$$

$$\frac{d\phi(0)}{dY} = 0, \quad \phi(Y_0) = 0. \quad (37, 38)$$

As autofunções e os autovalores para este novo problema auxiliar são:

$$\phi_m(Y) = \cos(\lambda_m Y), \quad \lambda_m = \frac{(2m-1)\pi}{2Y_0}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (39, 40)$$

As autofunções acima são ortogonais e permitem o desenvolvimento do seguinte par transformada-inversa:

$$\tilde{\theta}_{im}(\tau) = \int_0^{Y_0} \int_0^{X_0} K_i(X) Z_m(Y) \theta(X, Y, \tau) dX dY, \quad \text{transformada}, \quad (41)$$

$$\theta(X, Y, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} K_i(X) Z_m(Y) \tilde{\theta}_{im}(\tau), \quad \text{inversa}, \quad (42)$$

$$Z_m(Y) = \frac{\phi_m(Y)}{M_m^{1/2}}, \quad M_m = \int_0^{Y_0} \phi_m^2(Y) dY = \frac{Y_0}{2}. \quad (43, 44)$$

A transformação integral sobre a coordenada Y é feita efetuando-se o produto interno das autofunções normalizadas $Z_j(Y)$ com a equação diferencial transformada na coordenada X . Em seguida, fazendo uso das condições de contorno e das propriedades de ortogonalidade das autofunções correspondentes ao problema auxiliar de autovalor em Y , obtém-se a seguinte relação para o potencial transformado:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} B_{ijnm} \frac{d\tilde{\theta}_{im}(\tau)}{d\tau} + [\mu_i^2 + \lambda_m^2] \tilde{\theta}_{im}(\tau) + D_{im} = 0, \quad i, m = 1, 2, 3, \dots \quad (45)$$

sendo que:

$$B_{ijnm} = \int_0^{Y_0} Z_m(Y) Z_n(Y) A_{ij}(Y) dY = \int_0^{X_0} \int_0^{Y_0} K_i(X) K_j(X) Z_m(Y) Z_n(Y) dX dY, \quad (46)$$

$$D_{im} = - \int_0^{Y_0} Z_m(Y) C_i(Y) dY = - \int_0^{X_0} \int_0^{Y_0} K_i(X) Z_m(Y) g(X, Y) dX dY. \quad (47)$$

que deve satisfazer a condição inicial transformada, que é dada por:

$$\tilde{\theta}_{im}(0) = \int_0^{Y_0} \int_0^{X_0} K_i(X) Z_m(Y) \theta_i(X, Y, \tau) dX dY \quad (48)$$

O potencial transformado dado pela Equação (48) pode ser obtido numericamente quando se trunca a expansão para uma dada ordem M e N :

$$\sum_{n=1}^M \sum_{j=1}^N B_{ijnm} \frac{d\tilde{\theta}_{im}(\tau)}{d\tau} + [\mu_i^2 + \lambda_m^2] \tilde{\theta}_{im}(\tau) + D_{im} = 0. \quad (49)$$

O potencial temperatura para a célula de combustível prismática retangular é obtido, então, através da fórmula de inversão:

$$\theta(X, Y, \tau) = \sum_{i=1}^M \sum_{m=1}^N K_i(X) Z_m(Y) \tilde{\theta}_{im}(\tau). \quad (50)$$

3.RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os coeficientes B_{ijnm} e D_{im} , necessários para o cálculo do potencial transformado, são obtidos a partir de integração pelo método de quadratura de Gauss (36 pontos de quadratura). Para coerência na formulação numérica, os valores das autofunções são também calculados nos pontos de quadratura. O potencial transformado é calculado resolvendo-se o sistema de equações diferenciais ordinárias com o auxílio da rotina computacional *DIVPAG* da Biblioteca *IMSL FORTRAN*.

Observa-se que a convergência da série que determina o potencial temperatura fica mais lenta no início do transiente ($\tau < 0,01$). Para estes casos é necessário truncar a série que determina o potencial temperatura $\theta(X, Y, \tau)$ em uma ordem N, M superior a 25 termos para se obter um mínimo de 4 ou 5 dígitos de precisão. À medida que τ aumenta, observa-se que a série converge com um número menor de termos, por exemplo o utilizado no presente trabalho, $M = N = 15$. Entretanto, mesmo considerando um número maior de termos no truncamento da série, o tempo de processamento gasto é pequeno, cerca de 10 a 15 segundos em um computador pessoal comum (512MB RAM e 2.0 GHz).

Na Figura 2, a evolução da temperatura máxima em função do tempo para $L_d^{*2} = 1,00$ é mostrada para diversos valores b/a , enquanto que a Figura 3 mostra-se esta evolução para $b/a = 0,50$ e diversos valores L_d^{*2} .

Na Tabela 1, são apresentados os resultados obtidos para a temperatura adimensional máxima em regime permanente para diversos valores de b/a e alguns valores de L_d^{*2} . Já as Figuras 4, 5, 6 e 7, mostram a distribuição desta temperatura para $b/a = 0,50$ e $L_d^{*2} = \infty$; $b/a = 0,50$ e $L_d^{*2} = 0,50$; $b/a = 0,70$ e $L_d^{*2} = \infty$; $b/a = 0,90$ e $L_d^{*2} = \infty$, respectivamente.

A Tabela 2 apresenta os resultados obtidos para a constante de tempo máxima e o fator de intensificação para diversos valores de b/a e L_d^{*2} . A Figura 8 ilustra o comportamento do fator de intensificação em função de b/a para alguns valores de L_d^{*2} . Já a Figura 9 ilustra o comportamento da constante de tempo máxima em função de b/a para vários L_d^{*2} .

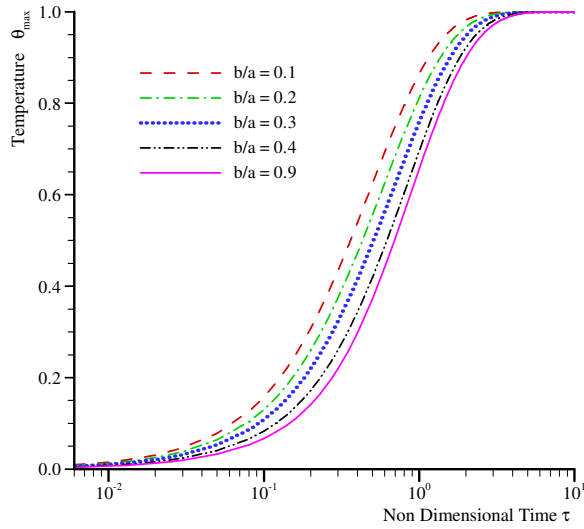


Figura 2 - Evolução da temperatura máxima em função do tempo para $L_d^{*2} = 1,00$ e diversos valores b/a .

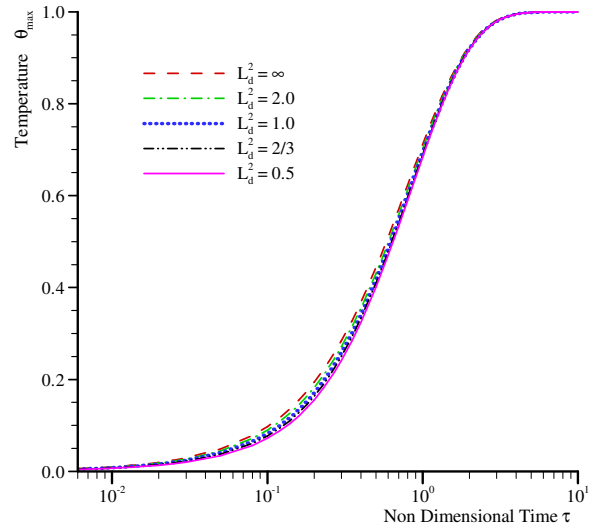


Figura 3 - Evolução da temperatura máxima em função do tempo para $b/a = 0,50$ e diversos valores L_d^{*2} .

Tabela 1. Temperatura adimensional máxima em regime permanente para b/a e L_d^{*2} .

b/a	$L_d^{*2} = \infty$	$L_d^{*2} = \infty^{(1)}$	$L_d^{*2} = 2,00$	$L_d^{*2} = 1,00$	$L_d^{*2} = 0,50$
0,10	0,15706	0,15708	0,14797	0,14022	0,12755
0,20	0,31392	0,31391	0,28917	0,26937	0,23901
0,30	0,46605	0,46606	0,42022	0,38504	0,33364
0,40	0,60277	0,60278	0,53492	0,48383	0,41121
0,50	0,71547	0,71548	0,62815	0,56299	0,47173
0,60	0,80134	0,80134	0,69860	0,62231	0,51635
0,70	0,86167	0,86168	0,74783	0,66355	0,54706
0,80	0,89984	0,89985	0,77888	0,68948	0,56625
0,90	0,91989	0,91990	0,79515	0,70304	0,57627
1,00	0,92577	0,92578	0,79992	0,70702	0,57919

⁽¹⁾ Cálculo através da Separação de Variáveis (Özisik, 1993).

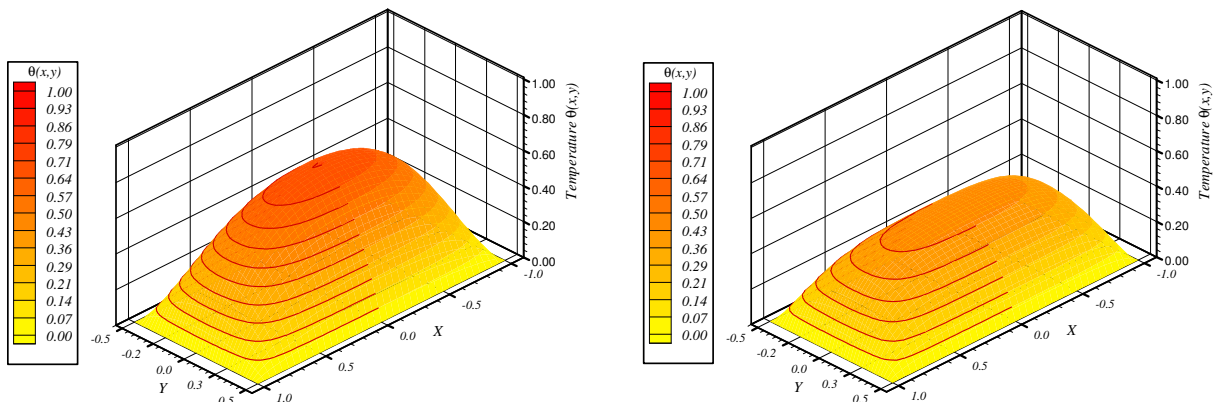


Figura 4 - Distribuição da temperatura em regime permanente para $b/a = 0,50$ e

$$L_d^{*2} = \infty.$$

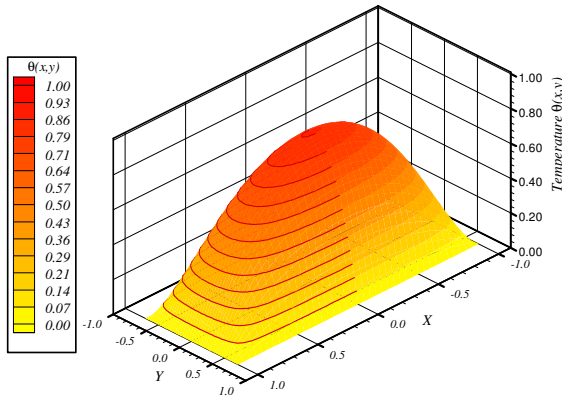


Figura 5 - Distribuição da temperatura em regime permanente para $b/a = 0,50$ e

$$L_d^{*2} = 0,50.$$

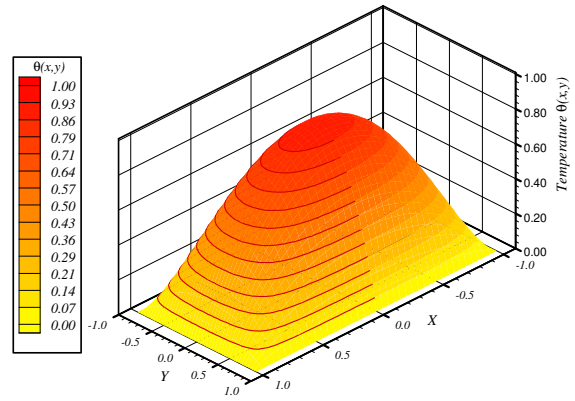


Figura 6 - Distribuição da temperatura em regime permanente para $b/a = 0,70$ e

$$L_d^{*2} = \infty.$$

Figura 7 - Distribuição da temperatura em regime permanente para $b/a = 0,90$ e

$$L_d^{*2} = \infty.$$

Tabela 2. Constante de tempo máxima e fator de intensificação para valores de b/a e L_d^{*2} .

b/a	$L_d^{*2} = \infty$			$L_d^{*2} = 2,00$		$L_d^{*2} = 1,00$		$L_d^{*2} = 0,50$	
	$\tau_{m\acute{a}x}$	ζ	$\zeta^{(1)}$	$\tau_{m\acute{a}x}$	ζ	$\tau_{m\acute{a}x}$	ζ	$\tau_{m\acute{a}x}$	ζ
0,10	0,5049	6,3668	6,36620	0,5080	6,7580	0,5109	7,1315	0,5163	7,8402
0,20	0,6009	3,1855	3,18565	0,6058	3,4582	0,6103	3,7124	0,6182	4,1839
0,30	0,6936	2,1457	2,14563	0,7033	2,3797	0,7113	2,5971	0,7243	2,9972
0,40	0,7670	1,6590	1,65899	0,7832	1,8694	0,7964	2,0668	0,8172	2,4319
0,50	0,8183	1,3977	1,39767	0,8393	1,5920	0,8568	1,7762	0,8843	2,1199
0,60	0,8526	1,2479	1,24790	0,8765	1,4314	0,8967	1,6069	0,9289	1,9367
0,70	0,8749	1,1605	1,16053	0,9004	1,3372	0,9221	1,5070	0,9572	1,8279
0,80	0,8884	1,1113	1,11130	0,9147	1,2839	0,9373	1,4504	0,9742	1,7660
0,90	0,8953	1,0871	1,08707	0,9220	1,2576	0,9450	1,4224	0,9826	1,7353
1,00	0,8973	1,0802	1,08017	0,9241	1,2501	0,9472	1,4144	0,9851	1,7265

⁽¹⁾ Cálculo através da Separação de Variáveis (Özisik, 1993).

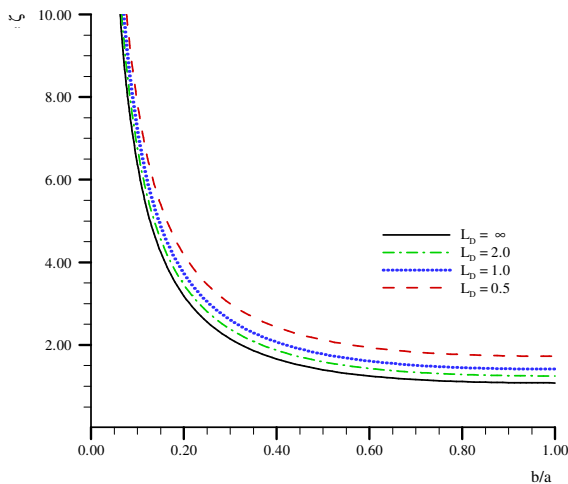


Figura 8 - Fator de intensificação em função de b/a para alguns valores de L_d^{*2} .

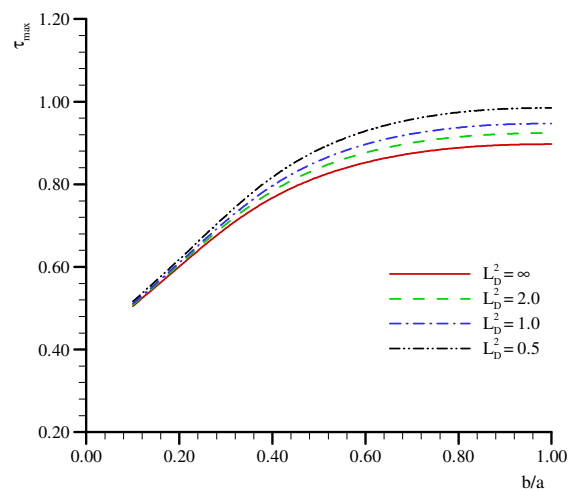


Figura 9 - Constante de tempo máxima em função de b/a para alguns valores de L_d^{*2} .

4.CONCLUSÕES

A utilização de técnicas híbridas analítico-numéricas para solução de problemas difusivos e difusivo-convectivos tem conquistado confiabilidade no meio técnico-científico devido à sua precisão e ao seu baixo custo computacional quando comparado aos métodos puramente numéricos.

Sendo assim, neste trabalho analisou-se o problema difusivo transiente com fontes variáveis em células prismáticas de combustível nuclear, de seção transversal retangular, submetidas a condições de primeiro tipo. Para esta análise, as propriedades termofísicas são consideradas variáveis com a temperatura. Para facilitar o tratamento analítico, a equação da difusão foi convenientemente linearizada através da técnica da transformada integral de *Kirchhoff* e da hipótese de que a influência da temperatura T sobre a difusividade térmica α seja desprezível em intervalos de tempo pequenos. Feito isso, a equação da energia resultante é resolvida através da aplicação da TTIG. Observa-se que a expansão que determina o potencial temperatura apresenta convergência lenta no início do transiente.

Constantes de tempo definidas em relação à temperatura máxima, a distribuição da temperatura em regime permanente e fator de intensificação foram calculadas para diversos valores de b/a e alguns valores de L_d^{*2} .

Finalizando, observa-se que a TTIG é aplicada com sucesso para a obtenção de solução de problemas difusivos transientes multidimensionais, ressaltando-se, aqui, o presente problema, o qual não admite solução pelas técnicas analíticas clássicas.

5.REFERÊNCIAS

Alves, T.A, 2006. *Aplicação da Transformada Integral na Solução de uma Classe de Problemas Difusivos e Difusivo-Convectivos em Domínios de Geometria Não-Convecional*. Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”.

- Aparecido, J.B., Cotta, R.M., Özisik, M.N., 1989. Analytical solutions to two-dimensional diffusion type problems in irregular geometries. *Journal of the Franklin Institute*, vol. 326, pp. 421-434.
- Maia, C.R.M., 2003. *Solução de Problemas Difusivos e Difusivos-Convectivos em Domínio de Geometria Elíptica e Bicôncava pela Técnica da Transformada Integral Generalizada*. Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas.

APPLICATION OF THE TECHNIQUES OF THE GENERALIZED INTEGRAL TRANSFORMED ONE INTO THE ANALYSIS OF THE BEHAVIOR OF NUCLEAR FUEL CELLS IN RECTANGULAR GEOMETRIC.

Abstract: *Problems of heat diffusion that present in its domain distributed sources alert great interests in researchers in engineering. The fuel cells in nuclear reactors are example very important applications of problems this nature.*

Keywords: *of nuclear fuel, transformed integral, nonlinear diffusion problems ,rectangular prism.*

Mateus Calegari Paulique
Thiago Antonini Alves
Cassio Roberto Macedo Maia
mateuspaulique@gmail.com
antonini@dem.feis.unesp.br
cassio@dem.feis.unesp.br

Departamento de Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia, Unesp/Ilha Solteira, Av. Brasil, 56, Centro, CEP 15385-000, Ilha Solteira, SP, Brasil