

## **APLICAÇÃO DOS MÉTODOS ERA E CE PARA IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS MODAIS DE UMA PLACA COM ATUADORES PIEZELÉTRICOS ACOPLADOS**

**Clayton Rodrigo Marqui**  
clayton\_rm@dem.feis.unesp.br

**Paulo Henrique Tozoni Palma**  
phtpalma@aluno.feis.unesp.br

**Douglas Domingues Bueno**  
ddbueno@dem.feis.unesp.br

**Rodrigo Borges Santos**  
rborges@dem.feis.unesp.br

**Vicente Lopes Júnior**  
vicente@dem.feis.unesp.br

Departamento de Engenharia Mecânica – GMSINT – Grupo de Materiais e Sistemas Inteligentes  
Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – UNESP, Av. Brasil n.º 56, centro, CEP 15385-000

**Resumo:** Neste trabalho foram identificados os parâmetros de uma placa de alumínio com atuadores piezelétricos acoplados na condição engastada-livre-livre-livre. A estrutura eletromecanicamente acoplada foi identificada experimentalmente utilizando os métodos ERA (Eigensystem Realization Algorithm) e CE (Complex Exponential) e também foi modelada via Método dos Elementos Finitos (FEM). Para a aquisição dos sinais de entrada e saída foi utilizado o software Signal Ace II. A entrada no sistema foi um sinal aleatório enviado para quatro atuadores piezelétricos colados à estrutura e o sinal de saída foi gerado por um acelerômetro. Estes sinais são processados em ambiente Matlab® e as Funções de Reposta em Frequência (experimental, identificado e FEM) foram comparadas.

**Palavras-chave:** identificação experimental, materiais piezelétricos, função de resposta em frequência, frequências naturais, fatores de amortecimento.

### **1. INTRODUÇÃO**

Nas últimas décadas se observa uma crescente exigência no desempenho dos sistemas mecânicos e estruturais. Destaca-se: a necessidade de estruturas leves e resistentes, buscando economia de material, redução do consumo de combustível e diminuição nos custos de transporte; estabilidade estática e dinâmica do sistema e; redução de vibração, o que melhora também a qualidade e conforto no transporte, Giurgiutiu (2000). Em particular, o problema resultante das vibrações indesejáveis tem atraído constante atenção da sociedade científica, já que compromete o desempenho de máquinas e estruturas. Por isso, técnicas ativas de controle de vibrações estão sendo fortemente desenvolvidas.

As técnicas de controle ativo utilizam forças de fontes secundárias de controle aplicadas na estrutura por um controlador que utiliza as informações obtidas por sensores. Estas forças procuram reduzir a vibração estrutural causada por uma fonte de vibração primária. Estes estudos têm recebido significantes contribuições nas últimas décadas, sobretudo, dadas aos avanços no processamento digital de sinais.

Entre as etapas do projeto de controle, a obtenção do modelo dinâmico considerando a influência do acoplamento eletromecânico merece considerável atenção. A existência de um modelo confiável permite que entendamos o funcionamento destes sistemas e, conseqüentemente, possamos agir, ou interagir, racionalmente sobre ele. Embora o FEM apresente resultados confiáveis, a extração de informações de testes experimentais é fundamental para se ter uma compreensão mais perto da realidade, permitindo a construção de modelos e o desenvolvimento de teorias que descrevem os sistemas observados. Uma maneira de fazer isto é utilizando as técnicas de identificação de sistemas. Tais técnicas possuem a característica de estabelecer modelos matemáticos de sistemas dinâmicos através de medidas experimentais de entrada e de saída (Klein, 1989). Algumas referências básicas sobre a identificação de sistemas podem citadas: Eykhoff (1974), Ljung (1987), Maine & Iliff (1985) e Landau (1990).

Neste contexto, o trabalho em questão apresenta três metodologias diferentes para a obtenção do modelo dinâmico de uma placa de alumínio com atuadores piezelétricos acoplados na condição engastada-livre-livre-livre. A estrutura eletromecanicamente acoplada foi identificada experimentalmente utilizando os métodos ERA (Eigensystem Realization Algorithm) e CE (Complex Exponential) e também foi modelada via Método dos Elementos Finitos (MEF). Para a aquisição dos sinais de entrada e saída foi utilizado o software Signal Ace II. A entrada no sistema foi um sinal aleatório enviado para quatro atuadores piezelétricos colados à estrutura e o sinal de saída foi obtido por um acelerômetro. Estes sinais são processados em ambiente Matlab® e as Funções de Reposta em Frequência (experimental, identificado e FEM) foram comparadas.

## 2. CONCEITOS DA METODOLOGIA

Modelos estruturais de segunda ordem descritos por equações diferenciais ordinárias lineares (EDOL) são muito utilizados em problemas de dinâmica estrutural. Porém, em muitas aplicações, como por exemplo, para identificação de sistemas e projeto de controladores, os modelos de segunda ordem não são atraentes. Em alguns destes casos, é muito mais conveniente representar as equações de estruturas flexíveis na forma de espaço de estados. A representação no espaço de estados é determinada pelo trio de matrizes (**A**, **B**, **C**) e pelo vetor de estados **x(t)**, (Moreira, 1998).

Através do procedimento clássico de análise modal é possível escrever um modelo dinâmico de segunda ordem em coordenadas modais. Utilizando o modelo no domínio modal os modos são desacoplados e permite avaliar e projetar o controlador para os modos de interesse (Gawronski, 1998). Este modelo pode ser escrito na realização do espaço de estados através da seguinte equação

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{aligned}\tag{1}$$

onde **x(t)** é o vetor de estados, **u(t)** é o vetor de entrada, **A** é a matriz dinâmica, **B** é a matriz de entrada, **C** é a matriz de saída e **y(t)** é o vetor de saídas. As matrizes **A**, **B** e **C** são da seguinte forma:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{\Omega}^2 & -2\mathbf{Z}\mathbf{\Omega} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [\mathbf{C}_{mq} \quad \mathbf{C}_{mv}]\tag{2}$$

onde **Ω** é a matriz das frequências naturais; **Z** é a matriz dos fatores de amortecimento, **B<sub>m</sub>** é a matriz de entrada modal; e **C<sub>mq</sub>** e **C<sub>mv</sub>** são as matrizes de saídas modal de deslocamento e velocidade, respectivamente.

Através de uma transformação linear é possível obter estas matrizes na forma de blocos diagonais. Esta realização é recomendável para projeto de controladores, posicionamento ótimo de sensores e monitoramento da integridade estrutural por permitir a análise para os modos de interesse. Assim, as matrizes, dinâmica, de entrada e de saída são dadas na forma:

$$\mathbf{A}_m = \text{diag}(\mathbf{A}_{m_i}), \quad \mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{m1} \\ \mathbf{B}_{m2} \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_m = [\mathbf{C}_{m1} \quad \mathbf{C}_{m2} \quad \cdots \quad \mathbf{C}_{mn}]$$

onde  $i = 1, \dots, n$ ;  $n$  é o número de modos;  $\mathbf{A}_{m_i}$ ,  $\mathbf{B}_{m_i}$  e  $\mathbf{C}_{m_i}$  são blocos  $2 \times 2$ ,  $2 \times s$ ,  $r \times 2$ , respectivamente; sendo  $s$  e  $r$  o número de entradas e o número de sensores, respectivamente.

## 2.1 Identificação das Matrizes Estruturais Utilizando o Método ERA

O problema de identificação de sistemas no espaço de estados recebeu atenção considerável nos últimos anos. Dentro da comunidade aeroespacial, o Algoritmo de Realização de Autosistemas (ERA) (Juang e Pappa, 1985), se transformou em um método muito bem aceito e extensamente utilizado, pois permitiu o aumento da complexidade das estruturas que podem ser modeladas por medidas experimentais. Neste ou em outros métodos de realização no espaço de estados, a matriz de Hankel assume um papel importante, pois o modelo no espaço de estados pode ser obtido pela fatoração da matriz de Hankel através da sua decomposição em valores singulares (SVD), por exemplo. A matriz de Hankel compreende os parâmetros de Markov arrançados no padrão específico de Toeplitz. Uma vez que estes parâmetros são determinados, eles se tornam as entradas da matriz de Hankel para a identificação do sistema na forma espaço estados.

Maia et al. (1997) faz uma representação discreta do modelo no espaço de estados considerando intervalos de tempo igualmente espaçados  $\Delta t$ . Dessa forma, a equação fica

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{aligned}, \quad k=0, 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

Considera-se uma entrada impulsiva para  $k = 0$ , então  $\mathbf{u}(k) = \begin{cases} 1, & \text{se } k = 0 \\ 0, & \text{se } k > 0 \end{cases}$ . É considerado também que para  $k = 0$ , tem-se que o vetor de estados  $\mathbf{x}$  é nulo, ou seja,  $\mathbf{x}(0)=0$ . Para um  $k$  qualquer,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}^k \mathbf{B} \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C} \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{B} \end{aligned} \quad (4)$$

Considerando que a entrada impulsiva ocorra nas  $s$  entradas, então a ordem de  $\mathbf{y}(k)$  é  $r \times s$ , sendo  $r$  o número de saídas. As matrizes  $\mathbf{y}(k)$  são conhecidas como os “Parâmetros de Markov”. Estes Parâmetros são utilizados para formar a matriz generalizada de Hankel, que é dada por,

$$\mathbf{H}(k-1) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(k) & \mathbf{y}(k+1) & \cdots & \mathbf{y}(k+j) \\ \mathbf{y}(k+1) & \mathbf{y}(k+2) & \cdots & \mathbf{y}(k+j+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{y}(k+i) & \mathbf{y}(k+i+1) & \cdots & \mathbf{y}(k+i+j) \end{bmatrix} \quad (5)$$

cuja ordem é dada por  $rw \times sz$  com  $(i=1, \dots, w-1)$  e  $(j=1, \dots, z-1)$ , sendo  $w$  o número de estados observáveis e  $z$  o número de estados que são excitados.

Substituindo  $\mathbf{y}(k)$  dentro da equação (5), pode-se escrever que

$$\mathbf{H}(k) = \mathbf{O} \mathbf{A}^k \mathbf{C}, \quad \text{para } k \geq 0 \quad (6)$$

onde  $\mathbf{O}$  e  $\mathbf{C}$  são, respectivamente, observabilidade e controlabilidade:

$$\mathbf{C} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{z-1}\mathbf{B}] \quad (7)$$

e

$$\mathbf{O} = [\mathbf{C} \quad \mathbf{CA} \quad \mathbf{CA}^2 \quad \dots \quad \mathbf{CA}^{w-1}]^T \quad (8)$$

sendo a ordem de  $\mathbf{O}$   $r \times 2nd$  e  $\mathbf{C}$   $2nd \times sz$ .

A matriz  $\mathbf{H}(0)$  pode ser calculada através da Decomposição de Valores Singulares – SVD:

$$\mathbf{H}(0) = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T \quad (9)$$

sendo  $\mathbf{H}(0)$   $r \times sz$ ,  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  são matrizes ortogonais  $r \times r$  e  $sz \times sz$ , respectivamente, e  $\mathbf{\Sigma}$  é uma matriz diagonal  $r \times sz$  que contém os valores singulares de  $\mathbf{H}(0)$ . A matriz  $\mathbf{H}(0)$  possui  $2nd$  valores singulares não nulos ( $\text{rank} = 2nd$ ), equivalentes a ordem do sistema no modelo de espaço de estados.  $\mathbf{H}(0)$  pode, conseqüentemente, ser recalculada utilizando-se apenas as  $2nd$  primeiras colunas de  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$ :

$$\mathbf{H}(0) = \mathbf{U}_{2nd} \mathbf{\Sigma}_{2nd} \mathbf{V}_{2nd}^T \quad (10)$$

$\mathbf{U}_{2nd}$ ,  $\mathbf{V}_{2nd}$  e  $\mathbf{\Sigma}_{2nd}$   $r \times 2nd$ ,  $2nd \times sz$  e  $2nd \times 2nd$ , respectivamente.  $\mathbf{U}_{2nd}$  e  $\mathbf{V}_{2nd}$  são ortogonais.

A pseudo inversa  $\mathbf{H}' = \mathbf{H}(0)^+$  é conseqüentemente dada por,

$$\mathbf{H}' = \mathbf{V}_{2nd} \mathbf{\Sigma}_{2nd}^{-1} \mathbf{U}_{2nd}^T \quad (11)$$

e pode-se escrever também que,

$$\mathbf{C} \mathbf{H}' \mathbf{O} = \mathbf{I} \quad (12)$$

Para se obter a realização desejada, devem-se reescrever as matrizes de resposta  $\mathbf{y}(k)$  da equação (4) para  $k \geq 0$  da seguinte maneira:

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{CA}^k \mathbf{B} \quad (13)$$

e utilizando a matriz identidade,

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{E}_r^T \mathbf{H}(k) \mathbf{E}_s \quad (14)$$

sendo  $\mathbf{y}(k+1)$   $r \times s$ ,  $\mathbf{E}_r^T$   $r \times r$ ,  $\mathbf{H}(k)$   $r \times sz$  e  $\mathbf{E}_s$   $sz \times s$ . Sabe-se que,

$$\mathbf{E}_r^T = [\mathbf{I} \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{0}] \quad (15a)$$

onde a matriz identidade  $\mathbf{I}$  e as matrizes de zeros ( $\mathbf{0}$ ) são  $r \times r$ . Sabe-se também que,

$$\mathbf{E}_s = [\mathbf{I} \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{0}]^T \quad (15b)$$

onde a matriz identidade  $\mathbf{I}$  e as matrizes de zeros ( $\mathbf{0}$ ) são  $s \times s$ .

Utilizando as equações (6), (10), (11) e (12), é possível mostrar que,

$$\mathbf{y}(k+1) = \left[ \mathbf{E}_r^T \mathbf{U}_{2nd} \boldsymbol{\Sigma}_{2nd}^{1/2} \right] \left[ \boldsymbol{\Sigma}_{2nd}^{-1/2} \mathbf{U}_{2nd}^T [\mathbf{O} \mathbf{A}^k \mathbf{C}] \mathbf{V}_{2nd} \boldsymbol{\Sigma}_{2nd}^{1/2} \right] \left[ \boldsymbol{\Sigma}_{2nd}^{1/2} \mathbf{V}_{2nd}^T \mathbf{E}_s \right] \quad (16)$$

Algumas similaridades com a equação (13) (que se deseja recuperar) já são aparentes. No entanto, algumas modificações precisam ser feitas no segundo bloco de matrizes da equação (16). Após algumas manipulações matemáticas, segue que

$$\mathbf{y}(k+1) = \left[ \mathbf{E}_r^T \mathbf{U}_{2nd} \boldsymbol{\Sigma}_{2nd}^{1/2} \right] \left[ \boldsymbol{\Sigma}_{2nd}^{-1/2} \mathbf{U}_{2nd}^T \mathbf{H}(1) \mathbf{V}_{2nd} \boldsymbol{\Sigma}_{2nd}^{1/2} \right]^k \left[ \boldsymbol{\Sigma}_{2nd}^{1/2} \mathbf{V}_{2nd}^T \mathbf{E}_s \right] \quad (17)$$

Comparando as equações (17) e (13), fica claro que a realização desejada foi conseguida, onde

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{E}_r^T \mathbf{U}_{2nd} \boldsymbol{\Sigma}_{2nd}^{1/2} \\ \mathbf{A} &= \boldsymbol{\Sigma}_{2nd}^{-1/2} \mathbf{U}_{2nd}^T \mathbf{H}(1) \mathbf{V}_{2nd} \boldsymbol{\Sigma}_{2nd}^{1/2} \\ \mathbf{B} &= \boldsymbol{\Sigma}_{2nd}^{1/2} \mathbf{V}_{2nd}^T \mathbf{E}_s \end{aligned} \quad (18)$$

## 2.2. Identificação das Matrizes Estruturais Utilizando o Método CE

O método da Exponencial Complexa (CE) é um método indireto de múltiplos graus de liberdade que se enquadra na categoria de método SISO (single input – single output), já que é designado para analisar uma única IRF (Função da Resposta ao Impulso) no tempo. É um método simples que não requer estimação inicial para os parâmetros modais, e a única incógnita é o número de modos que deve ser considerado na análise.

No domínio da frequência, a FRF em termos de receptância  $\alpha_{jk}$  (deslocamento no ponto  $j$  devido a uma força no ponto  $k$ ) para um sistema linear, com amortecimento viscoso e  $N$ -graus de liberdade, pode ser dado por:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \left( \frac{{}_r A_{jk}}{\omega_r \xi_r + i(\omega - \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2})} + \frac{{}_r A_{jk}^*}{\omega_r \xi_r + i(\omega + \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2})} \right) \quad (19)$$

onde  $\omega_r$  é a frequência natural,  $\xi_r$  é o fator de amortecimento e  ${}_r A_{jk}$  é o resíduo correspondendo a cada modo  $r$ ; (\*) denota conjugado complexo. Outra maneira de expressar a FRF é:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^{2N} \left( \frac{{}_r A_{jk}}{\omega_r \xi_r + i(\omega - \omega'_r)} \right) \quad (20)$$

onde:

$$\omega'_r = \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2}$$

$$\omega'_{r+N} = -\omega'_r \quad (21)$$

$${}_{r+N}A_{jk} = {}_rA_{jk}^*$$

O método CE trabalha com a correspondente função de resposta ao impulso (IRF), obtido da equação (20) por uma transformada inversa de Fourier:

$$h(t) = \sum_{r=1}^{2N} A'_r e^{s_r t} \quad (22)$$

onde  $s_r = -\omega_r \xi_r + i\omega'_r$  e as propriedades (21) são mantidas. A resposta no tempo  $h(t)$ , para uma série de  $L$  pontos igualmente espaçadas em intervalos de tempo  $\Delta t$ , será:

$$h_L = h(L\Delta t) = \sum_{r=1}^{2N} A'_r e^{s_r (L\Delta t)} \quad (23)$$

ou simplesmente

$$h_L = \sum_{r=1}^{2N} A'_r V_r^L \quad (24)$$

onde

$$V_r = e^{s_r \Delta t} \quad (25)$$

Deve-se notar que em (24) os valores de  $A'_r$  e  $V_r$  não são conhecidos. A solução deste problema é baseada na constatação de Prony (1795) e ficou conhecida como método de Prony. Por se tratar de um sistema sub-amortecido, as raízes  $s_r$  sempre ocorrerão em pares complexos conjugados e, sendo assim, sempre irá existir um polinômio em  $V_r$  de ordem  $L$  com coeficiente real  $\beta$  (chamado de coeficiente autoregressivo) cuja relação é verificada a seguir:

$$\beta_0 + \beta_1 V_r + \beta_2 V_r^2 + \dots + \beta_L V_r^L = 0 \quad (26)$$

Para calcular os coeficientes  $\beta$  para avaliar  $V_r$ , é necessário apenas multiplicar os dois lados de (24) por  $\beta_0$  até  $\beta_L$  e somar os resultados. Isso nos dá:

$$\sum_{j=0}^L \beta_j h_j = \sum_{j=0}^L \left( \beta_j \sum_{r=1}^{2N} A'_r V_r^j \right) = \sum_{r=1}^{2N} \left( A'_r \sum_{j=0}^L \beta_j V_r^j \right) \quad (27)$$

A somatória da parte interna da equação (27) é exatamente o polinômio (26). Como este polinômio é igual a zero para cada valor de  $V_r$ , isso segue que:

$$\sum_{j=0}^L \beta_j h_j = 0 \quad , \quad \text{para cada } V_r \quad (28)$$

De (28), pode-se calcular os coeficientes  $\beta_j$ , que serão a solução do polinômio (26) para as raízes,  $V_r$ . Para calcular  $\beta_j$ , considera-se  $L$  igual a  $2N$  por conveniência. O sistema de dados,  $h_j$ , será composto de  $2N$  pontos, cada um deslocado um intervalo de tempo e  $\beta_{2N}$  considerado igual a 1. O resultado será:

$$\begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \cdots & h_{2N-1} \\ h_1 & h_2 & h_3 & \cdots & h_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{2N-1} & h_{2N} & h_{2N+1} & \cdots & h_{4N-2} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{2N-1} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} h_{2N} \\ h_{2N+1} \\ \vdots \\ h_{4N-1} \end{Bmatrix} \quad (29)$$

ou simplesmente

$$[h] \times \{\beta\} = \{h'\} \quad (30)$$

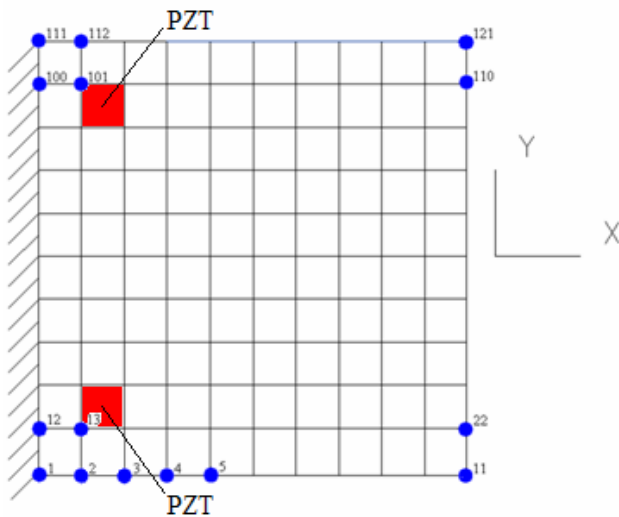
Conhecendo os coeficientes  $\beta_j$ , resolve-se o polinômio da equação (26) para calcular as raízes  $V_r$ . Usando (25) e seu valor complexo conjugado correspondente, podemos determinar a frequência natural e o fator de amortecimento. Com os valores de  $V_r$ , podemos usar (24) para calcular os resíduos e conseqüentemente as constantes modais e ângulos de fase. Os resíduos  $A'_r$  ficarão fáceis de calcular se (24) for escrito da forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ V_1 & V_2 & \cdots & V_{2N} \\ V_1^2 & V_2^2 & \cdots & V_{2N}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_1^{2N-1} & V_2^{2N-1} & \cdots & V_{2N}^{2N-1} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \\ \vdots \\ A'_{2N} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{2N-1} \end{Bmatrix} \quad (31)$$

onde, por conveniência (para se obter uma matriz quadrada), foi considerado apenas os primeiros  $2N-1$  valores de  $h_j$ . De fato, é suficiente considerar apenas  $N-1$  valores, já que  $V_r$  e  $A'_r$  aparecem em pares complexos conjugados.

### 3. APLICAÇÃO EXPERIMENTAL

A metodologia de identificação estrutural apresentada neste trabalho foi aplicada em uma placa de alumínio com quatro elementos piezelétricos acoplados na condição engastada-livre-livre-livre, Figura 1. As propriedades físicas e geométricas da placa e dos PZTs são apresentadas na Tabela 1. Neste procedimento utilizou-se o método ERA e CE. Para comparação de resultados, foi utilizado um modelo via FEM com 100 elementos estruturais, 121 nós e 363 graus de liberdade (GL). A aquisição dos sinais de entrada e saída foi realizada utilizando o software Signal Ace II. O sinal de excitação dos quatro PZTs, colados dois a dois (simetricamente) em faces opostas da placa foi do tipo “Randon” com largura de banda de 0-500 Hz. A frequência de amostragem do sinal foi de 1280 Hz. Os sinais de entrada e saída passam por uma janela Hanning para evitar problemas de leakage. Ressalta-se que os dados são salvos em um arquivo com extensão TXT e enviados ao Matlab<sup>®</sup>. A instrumentação da bancada é ilustrada na Figura 2.

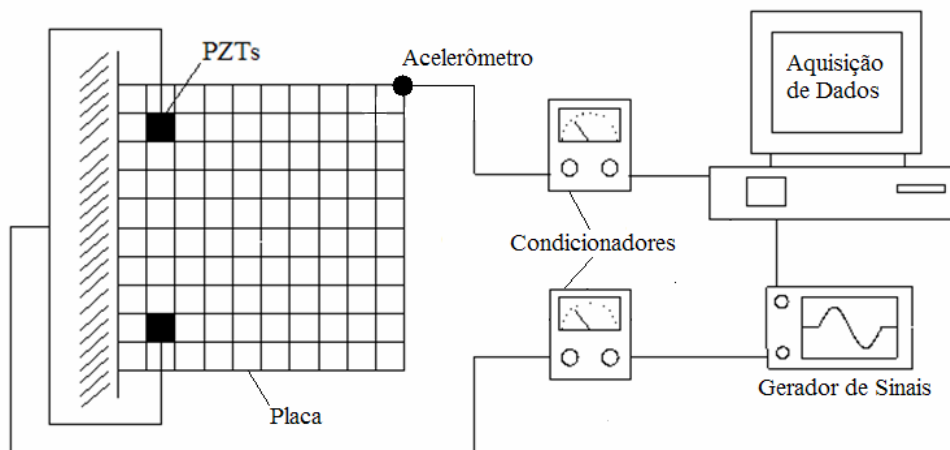


(a) Malha estrutural da placa Simulada

(b) Placa ensaiada experimentalmente

**Figura 1** – Placa de alumínio discretizada via método dos elementos finitos.**Tabela 1** – Propriedades físicas e geométricas da placa e dos PZTs.

| Parâmetros da Placa              | Valor | Parâmetros dos PZTs                                          | Valor    |
|----------------------------------|-------|--------------------------------------------------------------|----------|
| Módulo de Young (GPa)            | 70    | Módulo de Young (GPa)                                        | 60       |
| Coefficiente de Poisson          | 0.3   | Constante dielétrica $k_{33}$ (F/m)                          | 33.63e-9 |
| Densidade ( $\text{kg.m}^{-3}$ ) | 2710  | Constante de elasticidade $c_{11}$ ( $\text{N/m}^2$ )        | 1.076e11 |
| Comprimento (mm)                 | 200   | Permissividade dielétrica $\epsilon_{31}$ ( $\text{C/m}^2$ ) | 30.705   |
| Largura (mm)                     | 199   | Densidade ( $\text{kg.m}^{-3}$ )                             | 7700     |
| Espessura (mm)                   | 2     | Comprimento (mm)                                             | 20       |
|                                  |       | Largura (mm)                                                 | 19,9     |
|                                  |       | Espessura (mm)                                               | 0.25     |

**Figura 2** – Esquema da instrumentação utilizada no ensaio experimental.

A Figura 3 mostra os sinais de entrada e saída obtidos no procedimento experimental. Estes sinais foram utilizados para a identificação com o ERA e CE. Na Figura 4 são ilustradas as FRFs experimental, identificada pelo ERA, identificada pelo CE e a obtida via Método dos Elementos Finitos. As frequências naturais dos cinco primeiros modos de vibrar e os fatores de amortecimento são mostrados na Tabela 2 e 3, respectivamente.

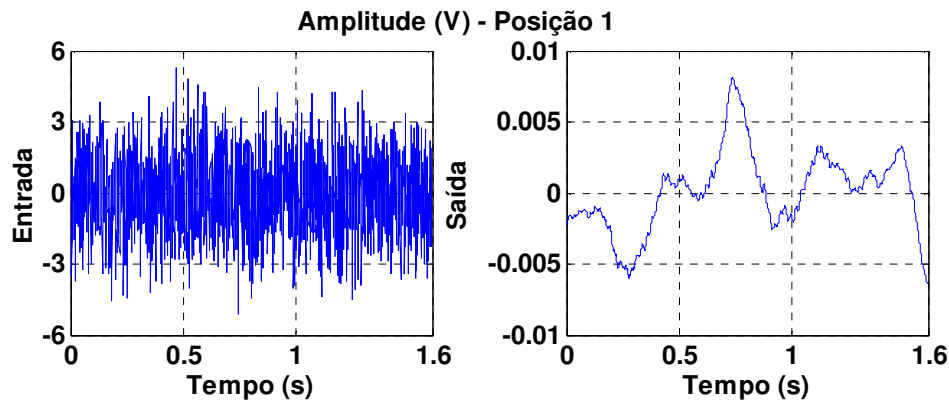


Figura 3 – Sinais de entrada e saída.

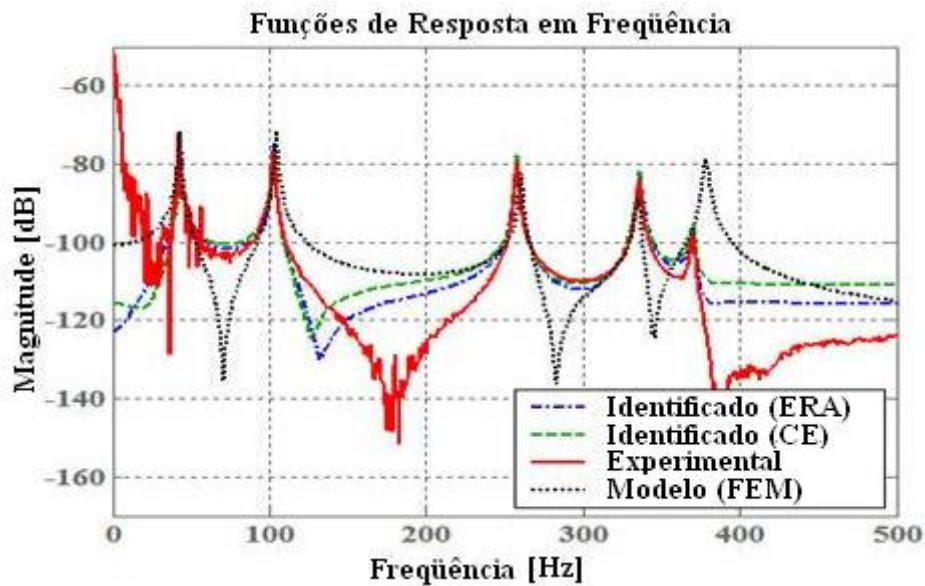


Figura 4 – Comparação das FRFs da estrutura eletromecanicamente acoplada.

Tabela 2 – Frequências Naturais.

|      | Experimental | Identificado ERA |          | Modelo via FEM |          | Identificado CE |          |
|------|--------------|------------------|----------|----------------|----------|-----------------|----------|
| Modo | Fnat (Hz)    | Fnat (Hz)        | Erro (%) | Fnat (Hz)      | Erro (%) | Fnat (Hz)       | Erro (%) |
| 1°   | 42,50        | 42,60            | 0,23     | 42,58          | 0,19     | 43,05           | 1,29     |
| 2°   | 102,50       | 102,73           | 0,22     | 104,64         | 2,10     | 102,49          | 0,01     |
| 3°   | 258,13       | 257,97           | 0,06     | 260,70         | 0,99     | 257,64          | 0,19     |
| 4°   | 335,63       | 335,93           | 0,09     | 335,17         | 0,14     | 335,54          | 0,03     |
| 5°   | 370,00       | 370,20           | 5,40e-3  | 378,46         | 2,30     | 369,70          | 0,08     |

$$* \text{Erro} = |100 - 100 \cdot F^{\text{modelo}} / F^{\text{Experimental}}|$$

Tabela 3 – Coeficientes de Amortecimento.

|      | Identificado ERA | Modelo via FEM |          | Identificado CE |          |
|------|------------------|----------------|----------|-----------------|----------|
| Modo | $\xi$            | $\xi$          | Erro (%) | $\xi$           | Erro (%) |
| 1°   | 0,0107           | 0,0120         | 12,15    | 0,0199          | 86,00    |
| 2°   | 0,0054           | 0,0053         | 1,85     | 0,0066          | 22,22    |
| 3°   | 0,0024           | 0,0033         | 37,50    | 0,0024          | 0        |
| 4°   | 0,0029           | 0,0033         | 13,79    | 0,0027          | 6,90     |
| 5°   | 0,0035           | 0,0033         | 5,71     | 0,0042          | 20,00    |

$$* \text{Erro} = |100 - 100 \cdot \xi^{\text{modelo}} / \xi^{\text{Era}}|$$

É importante ressaltar que todos os modelos foram manipulados no espaço de estados em coordenadas modais e truncaram-se os sistemas para os cinco primeiros modos de vibrar. Para o caso em elementos finitos foi utilizado o amortecimento proporcional à massa e à rigidez e nenhum ajuste de modelo foi utilizado.

#### 4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresentou três diferentes técnicas (ERA, CE e FEM) para a obtenção do modelo dinâmico de uma placa de alumínio na condição engastada-livre-livre-livre com atuadores de PZTs acoplados. Para todos os casos os modelos foram manipulados no espaço de estados em coordenadas modais e truncaram-se os sistemas para os cinco primeiros modos de vibrar. Pelos resultados obtidos pode-se averiguar que todos os modelos apresentam concordância na identificação das frequências naturais dos modos analisados. No entanto, os resultados do amortecimento apresentam em alguns casos variações consideráveis. Isso se deve principalmente às dificuldades numéricas encontradas pelos métodos de identificação (ERA e CE), gerando grande número de modos computacionais. No caso do modelo em FEM os erros são devidos a hipótese de amortecimento proporcional à massa e à rigidez e nenhum ajuste de modelo foi utilizado.

#### 5. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o suporte financeiro da FAPESP – Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de São Paulo.

#### 6. REFERÊNCIAS

- Eykhoff, P., 1974, “System identification: parameter and state estimation”, Ed. Wiley-Interscience.
- Gawronski, W., 1998, “Dynamics and Control of Structures: A Modal Approach”, 1. Ed. New York, Springer Verlag.
- Giurgiutiu, V., 2000, “Recent Advances in Smart-Material Rotor Control Actuation”, AIAA/ASME/ASCE/AHS Structure, Structural Dynamics and Materials Conference and Exhibit, Atlanta – USA.
- Juang, J. and Pappa, R., 1985, “An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction”, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 8, No. 5, pp.620–627.
- Klein, V., 1989, “Estimation of Aircraft Aerodynamic Parameters from Flight Data”, Prog. Aerospace Sci, Vol. 26, pp.1-77.
- Landau, I. D., 1990, “System identification and control design”, Ed. Prentice-Hall.
- Ljung, L., 1987, “System Identification: theory for the user”. Prentice Hall Information and System Sciences Series.
- Maia, N., Silva, J. et al, 1996, “Theoretical and Experimental Modal Analysis” Research studies Press Ltd., Baldock, Hertfordshire, England.
- Maine, R. E. e Iliff, K. W., 1985, “Identification of dynamic systems: theory and formulation”.
- Moreira, F. J. O., 1998, “Um Controlador  $H_\infty$  de Banda Limitada para o Controle Ativo de Vibração Estrutural” - Tese de doutorado - Universidade Estadual de Campinas.
- Prony, R., 1775, “Essai Expérimental Et Analytique Sur Les Lois De La Dilatabilité Des Fluides Élastiques Et Sur Celles De La Force Expansive De La Vapeur De L'Eau Et De La Vapeur De L'Alcool, À Différentes Temperatures”, Journal de L'École Polytechnique (Paris), Vol 1, Cahier 2, Floreal et Prairial, pp.24-76.
- Van Overschee, P. and B. De Moor, 1994, “N4SID: subspace algorithms for the identification of combined deterministic-stochastic systems”. Automatica, Vol. 30, No. 1, pp. 75-93.

#### 7. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são responsáveis por todo conteúdo deste trabalho.

## **APPLICATION OF THE METHODS ERA AND CE FOR IDENTIFICATION OF THE MODAL PARAMETERS OF AN PLATE WITH CONNECTED PIEZOELECTRIC ACTUATORS**

**Clayton Rodrigo Marqui**

clayton\_rm@dem.feis.unesp.br

**Paulo Henrique Tozoni Palma**

phtpalma@aluno.feis.unesp.br

**Douglas Domingues Bueno**

ddbueno@dem.feis.unesp.br

**Rodrigo Borges Santos**

rborges@dem.feis.unesp.br

**Vicente Lopes Júnior**

vicente@dem.feis.unesp.br

Department of Mechanical Engineering, GMSINT – Group of Intelligent Materials and Systems  
Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – UNESP, Av. Brazil n.º 56, ZIP CODE 15385-000

**Abstract:** *In this work the parameters of an aluminum plate with connected piezoelectric actuators had been identified in the clamped-free-free-free condition. Electromechanically coupled structure was experimentally identified using ERA (Eigensystem Realization Algorithm) and CE (Complex Exponential) methods and also was modeled by FEM (Finite Elements Method). It was used the software Signal Ace II in order to extract the input and output signals. The system's input was a random signal sent to four piezoelectric actuators glued on the structure and the output signal was generated by an accelerometer. These signals was processed in software MatLab<sup>®</sup> and the Frequency Response Function (experimental, identified and FEM) was compared.*

**Keywords:** *experimental identification, piezoelectric materials, frequency response function, natural frequencies, damping ratio.*