

VERIFICAÇÃO EXPERIMENTAL DO POSICIONAMENTO ÓTIMO DE SENSORES UTILIZANDO MATRIZES GRAMMIANAS

Douglas Domingues Bueno

ddbueno@dem.feis.unesp.br

Clayton Rodrigo Marqui

clayton_rm@dem.feis.unesp.br

Rodrigo Borges Santos

rborges@dem.feis.unesp.br

Vicente Lopes Júnior

vicente@dem.feis.unesp.br

Departamento de Engenharia Mecânica – GMSINT – Grupo de Materiais e Sistemas Inteligentes
Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – UNESP, Av. Brasil n.º 56, centro, CEP 15385-000

Resumo: Este trabalho buscou verificar experimentalmente o posicionamento ótimo de sensores em uma placa de alumínio. A metodologia de posicionamento utilizada envolve o traço da matriz grammiana de observabilidade como índice de avaliação do desempenho de um acelerômetro. O cálculo da matriz grammiana de observabilidade para cada posição do sensor foi realizado resolvendo uma equação de Lyapunov. Para a aquisição dos sinais de entrada e saída foi utilizado o software Signal Ace II. Foi gerada uma entrada aleatória enviada para quatro atuadores piezelétricos colados à estrutura. Para a identificação das matrizes de representação do sistema no espaço de estados foi utilizado o método de subespaço.

Palavras-chave: posicionamento de sensores, verificação experimental, matrizes grammianas, método de subespaço, atuadores PZTs.

1. INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas se observa uma crescente exigência no desempenho dos sistemas mecânicos e estruturais. Destaca-se: a necessidade de estruturas leves e resistentes, buscando economia de material, redução do consumo de combustível e diminuição nos custos de transporte; estabilidade estática e dinâmica do sistema e; redução de vibração, o que melhora também a qualidade e conforto no transporte, Giurgiutiu (2000). Em particular, o problema resultante das vibrações indesejáveis tem atraído constante atenção da sociedade científica, já que compromete o desempenho de máquinas e estruturas. Por isso, técnicas ativas de controle de vibrações estão sendo fortemente desenvolvidas.

As técnicas de controle ativo utilizam forças de fontes secundárias de controle aplicadas na estrutura por um controlador que utiliza as informações obtidas por sensores. Estas forças procuram reduzir a vibração estrutural causada por uma fonte de vibração primária. Estes estudos têm recebido significantes contribuições nas últimas décadas, sobretudo, dadas aos avanços no processamento digital de sinais.

Entre as etapas do projeto de controle se destaca a influência do acoplamento eletromecânico no modelo dinâmico da estrutura; a técnica de controle a ser utilizada e o posicionamento ótimo dos sensores e atuadores. Em particular, principalmente quando existe um grande número de posições candidatas, o problema do posicionamento ótimo talvez mereça considerável atenção do projetista, já que, em função da posição onde são colocados, atuadores podem comprometer a controlabilidade do sistema, ou exigir altos níveis de energia para se obter o resultado esperado. De outro lado, se posicionados em localizações ótimas, o número de atuadores e sensores necessário pode ser reduzido, diminuindo assim o custo de instrumentação, do processamento de sinais e da energia necessária para o controle da estrutura. A diminuição do número necessário de sensores é interessante principalmente para o monitoramento da integridade estrutural (SHM – do inglês *Structural Health Monitoring*), pois para veículos aeroespaciais, por exemplo, são necessários entre 100 e 1000 sensores que certamente aumentam efetivamente o custo do projeto (Marantidis et al., 1994).

Neste contexto, o presente trabalho apresenta o posicionamento ótimo de um acelerômetro em uma placa de alumínio engastada em uma extremidade. Como índice de desempenho do sensor foi utilizado o traço da matriz grammiana de observabilidade. Os resultados são apresentados com a simulação numérica em uma placa discretizada em 100 elementos através do método dos elementos finitos considerando o elemento de Kirchoff. A verificação experimental é feita para seis posições candidatas. A identificação das matrizes do sistema para a representação no espaço de estados foi feita utilizando o método de subespaços. Os sinais de entrada foram gerados utilizando o software Signal Ace II e quatro atuadores piezelétricos colados na placa.

2. CONCEITOS DA METODOLOGIA

Neste trabalho se buscou resolver a seguinte questão: dado um número limitado de sensores, em quais posições devem ser localizados? Para solucionar este problema se utiliza o índice que envolve a matriz grammiana de observabilidade para classificar o desempenho do sensor. A obtenção de tal matriz é possível resolvendo uma equação de Lyapunov, logo, é necessário conhecer um modelo matemático estrutural e sua representação no espaço de estados.

Através do procedimento clássico de análise modal é possível escrever um modelo dinâmico de segunda ordem em coordenadas modais. Utilizando o modelo no domínio modal os modos são desacoplados e então se permite discutir o posicionamento ótimo para os modos de interesse (Gawronski, 1998). Este modelo pode ser escrito na realização no espaço de estados através da seguinte equação

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{aligned}\tag{1}$$

onde $\mathbf{x}(t)$ é o vetor de estados, $\mathbf{u}(t)$ é o vetor de entrada, $\mathbf{A}$ é a matriz dinâmica, $\mathbf{B}$ é a matriz de entrada, $\mathbf{C}$ é a matriz de saída e $\mathbf{y}(t)$ é o vetor de saídas. As matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ são da seguinte forma:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{\Omega}^2 & -2\mathbf{Z}\mathbf{\Omega} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [\mathbf{C}_{mq} \quad \mathbf{C}_{mv}]\tag{2}$$

onde $\mathbf{\Omega}$ é a matriz das frequências naturais; $\mathbf{Z}$ é a matriz dos fatores de amortecimento, $\mathbf{B}_m$ é a matriz de entrada modal; e $\mathbf{C}_{mq}$ e $\mathbf{C}_{mv}$ são as matrizes de saídas modal de deslocamento e velocidade, respectivamente.

Através de uma transformação linear é possível obter estas matrizes na forma de blocos diagonais. Esta realização é recomendável para projeto de controladores, posicionamento ótimo de sensores e monitoramento da integridade estrutural por permitir a análise para os modos de interesse. Assim, as matrizes, dinâmica, de entrada e de saída são dadas na forma:

$$\mathbf{A}_m = \text{diag}(\mathbf{A}_{m1}), \quad \mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{m1} \\ \mathbf{B}_{m2} \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_m = [\mathbf{C}_{m1} \quad \mathbf{C}_{m2} \quad \cdots \quad \mathbf{C}_{mn}] \quad (3)$$

onde $i = 1, \dots, n$; n é o número de modos; $\mathbf{A}_{mi}$, $\mathbf{B}_{mi}$ e $\mathbf{C}_{mi}$ são blocos 2×2 , $2 \times s$, $r \times 2$, respectivamente; sendo s e r o número de entradas e o número de sensores, respectivamente.

2.1 Posicionamento de Sensores Utilizando Matrizes Grammianas de Observabilidade

Na teoria de controle clássico, um sistema linear invariante no tempo na forma da equação (1) é inteiramente observável se e somente se a matriz de observabilidade dada por:

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{N-1} \end{bmatrix} \quad (4)$$

possuir rank N . Como é claramente explicado em Gawronski (1998), este critério, embora simples, não é bem adaptado para aplicações práticas: o nível de observabilidade não é quantificado. Este critério dá uma resposta em termos de sim ou não; e o cálculo da matriz de observabilidade $\mathbf{O}$ se torna proibitivo em casos de grandes sistemas.

Estes dois inconvenientes devem ser aliviados para expressar as propriedades do sistema em termos de gramianianos. Os gramianianos de observabilidade são definidos a seguir

$$\mathbf{W}_o(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}t} \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{\mathbf{A}^T t} dt \quad (5)$$

A matriz grammiana de observabilidade, $\mathbf{W}_o$, reflete a habilidade de um estado $\mathbf{x}(t)$ afetar a saída $\mathbf{y}(t)$ do sistema. Para sistemas LTI a matriz grammiana pode ser obtida resolvendo uma equação de Lyapunov

$$\mathbf{A}^T \mathbf{W}_o + \mathbf{W}_o \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (6)$$

Encontrada a matriz grammiana de observabilidade para cada posição do sensor, ou seja, mudando a matriz $\mathbf{C}$ na Equação 6, é possível calcular o índice de desempenho do sensor para cada posição candidata. O índice proposto neste trabalho é dado pelo traço da matriz grammiana, ou seja, é a somatória dos autovalores da matriz, pois tal matriz é diagonal quando se utiliza a representação modal (Gawronski, 1998). Desta forma, a localização ótima para o sensor é a que resultar o maior índice grammiano do sensor mostrado a seguir

$$\text{IGS}_{i,j} = \text{tr}(\mathbf{W}_{oi,j}) \quad i = 1, \dots, n \quad \text{e} \quad j = 1, \dots, r \quad (7)$$

onde $tr(_)$ é o traço da matriz; e os índices i e j representam o i -ésimo modo e o j -ésimo sensor. Avaliando para todos os modos e todas as posições candidatas, é possível se obter a matriz gramiana de posicionamento do sensor na forma mostrada abaixo

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \text{IGs}_{11} & \text{IGs}_{12} & \cdots & \text{IGs}_{1j} & \cdots & \text{IGs}_{1r} \\ \text{IGs}_{21} & \text{IGs}_{22} & \cdots & \text{IGs}_{2j} & \cdots & \text{IGs}_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{IGs}_{i1} & \text{IGs}_{i2} & \cdots & \text{IGs}_{ij} & \cdots & \text{IGs}_{ir} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{IGs}_{n1} & \text{IGs}_{n2} & \cdots & \text{IGs}_{nj} & \cdots & \text{IGs}_{nr} \end{bmatrix} \leftarrow \begin{matrix} \text{iésimo modo} \\ \uparrow \\ \text{jésimo sensor} \end{matrix} \quad (8)$$

2.2. Método de Subespaços para Identificação das Matrizes

Grande parte dos métodos de identificação disponíveis na literatura são baseados em cálculos de modelos polinomiais que facilmente podem causar problemas numéricos como mau condicionamento, principalmente para sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas. Os algoritmos numéricos de subespaço para identificação de sistemas no espaço de estados (N4SID do inglês *Numerical Algorithms for Subspace State Space System Identification*) são vistos como alternativas melhores. Isto é especialmente verdadeiro para sistemas multivariáveis e de alta ordem, para os quais não é fácil se obter uma parametrização útil entre todas as parametrizações possíveis (Van Overschee e De Moor, 1994).

Em geral, em algoritmos clássicos de identificação é necessário se conhecer a priori a ordem do modelo e os índices de observabilidade ou controlabilidade (Ljung, 1987). Com algoritmos N4SID somente a ordem do modelo é requerida. Nestes algoritmos a identificação das matrizes no espaço de estados não é em formas canônicas (com um número mínimo de parâmetros), mas como matrizes cheias e em uma determinada base quase otimamente condicionada. Isto significa que os índices de observabilidade e controlabilidade não precisam ser conhecidos a priori.

A identificação do sistema utilizando o método de subespaço é baseada na representação no espaço de estados na forma discreta, como mostra a Equação 9.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}_d \mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (9)$$

onde o subíndice d se refere as matrizes para o modelo discreto. No tempo discreto, a resposta do sistema é comumente representada por uma matriz de dados, ou matriz de Hankel

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1 \quad \mathbf{y}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{y}_N] \quad (10)$$

onde N é o número de pontos. Para compreender a utilização da matriz de Hankel é necessário conhecer o caso mais simples onde se considera o produto entre duas matrizes de dados obtidas por modificações na Equação 10. Seja $\mathbf{Y}_{(1:N-k)}$ uma matriz de dados onde foram removidos os últimos k pontos de dados, e similarmente, seja $\mathbf{Y}_{(k:N)}$ uma matriz onde foram removidos os k primeiros pontos de dados, então

$$\hat{\mathbf{R}}_k = \frac{1}{N-k} \mathbf{Y}_{(1:N-k)} \mathbf{Y}_{(k:N)}^T \quad (11)$$

Não é uma estimativa da matriz de correlação do tempo de anterior k . Isto segue diretamente da definição de estimativa de correlação (Van Overschee e De Moor, 1994). A matriz de Hankel $\mathbf{Y}_h$ é simplesmente a aquisição de uma família de matrizes que são criadas deslocando a matriz de dados.

$$\mathbf{Y}_h = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{(1:N-2s)} \\ \mathbf{Y}_{(2:N-2s+1)} \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_{(2s:N)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{hp} \\ \mathbf{Y}_{hf} \end{bmatrix} \quad (12)$$

A meia parte superior desta matriz é chamada *the past* (passado) e denotada $\mathbf{Y}_{hp}$ e a meia parte inferior é chamada *the future* (futuro) e denotada $\mathbf{Y}_{hf}$. O deslocamento total dos dados é $2s$ e chamado de *number of block rows*. O número de linhas na matriz de Hankel é $2sM$ e o número de colunas é $N - 2s$.

Conhecida a matriz de Hankel é preciso construir a projeção definida por Van Overschee e De Moor (1994) como uma ferramenta geométrica utilizada principalmente para identificação de sistemas. Entretanto, tratando de respostas estocásticas, a projeção é definida como meio condicional. Especificamente para identificação de sistemas estocásticos a projeção é definida por

$$\mathbf{O} = E(\mathbf{Y}_{hf} | \mathbf{Y}_{hp}) \quad (13)$$

A Equação 13 pode também se calculada como se mostra a seguir Van Overschee e De Moor (1994)

$$\mathbf{O} = \mathbf{Y}_{hf} \mathbf{Y}_{hp}^T (\mathbf{Y}_{hp} \mathbf{Y}_{hp}^T)^{-1} \mathbf{Y}_{hp} \quad (14)$$

A última matriz deste produto define as condições, as quatro primeiras definem as covariâncias entre os canais para diferentes tempos de atraso. Um meio condicional como o dado pela Equação 12 consiste simplesmente em respostas do sistema para diferentes condições iniciais especificadas por $\mathbf{Y}_{hp}$. Utilizando a solução da Equação 9 quando considerada homogênea, cada coluna da matriz $\mathbf{O}$ pode ser escrita por

$$\mathbf{O}_{col} = \mathbf{\Gamma}_s \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{\Gamma}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA}_d \\ \mathbf{CA}_d^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}_d^{s-1} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Note que conhecendo $\mathbf{\Gamma}_s$ é possível se obter as condições iniciais. De forma completa, é possível escrever

$$\mathbf{O} = \mathbf{\Gamma}_s \mathbf{X}_0 \quad (16)$$

onde $\mathbf{X}_0$ é definido como Estados de Kalman para o tempo zero. Uma vez que possivelmente os Estados de Kalman não são conhecidos, logo, é necessário utilizar uma decomposição de valores singulares (SVD – do inglês *Singular Value Decomposition*)

$$\mathbf{O} = \mathbf{USV}^T \quad (17)$$

Então se define a estimativa da matriz $\mathbf{\Gamma}_s$ e os Estados de Kalman $\mathbf{X}_0$ por

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{\Gamma}}_s &= \mathbf{US}^{1/2} \\ \hat{\mathbf{X}}_0 &= \mathbf{S}^{1/2}\mathbf{V}^T \end{aligned} \quad (18)$$

Conhecendo as estimativas de $\mathbf{\Gamma}_s$ e de $\mathbf{X}_0$ dadas pela Equação 18, é possível se obter a matriz dinâmica do sistema discreto $\mathbf{A}_d$ removendo um bloco acima e um abaixo da matriz $\mathbf{\Gamma}_s$

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}_{(2:s)} \hat{\mathbf{A}}_d = \hat{\mathbf{\Gamma}}_{(1:s-1)} \quad (19)$$

A matriz de saída pode ser obtida apenas utilizando o primeiro bloco da matriz $\hat{\mathbf{\Gamma}}_s$

$$\hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{\Gamma}}_{(1:1)} \quad (20)$$

Estimadas as matrizes, dinâmica e de saída, é possível calcular matriz de posicionamento mostrada na Equação 8.

3. APLICAÇÃO DA METODOLOGIA

A metodologia de posicionamento ótimo de sensores apresentada neste trabalho foi aplicada em uma placa de alumínio engastada em um dos lados. Para comparação de resultados, foi utilizado um modelo em método dos elementos finitos (FEM) considerando 100 elementos estruturais, 121 nós e 363 graus de liberdade (GL). A Figura 1a mostra a placa discretizada e a Figura 1b mostra as posições dos PZTs, além das posições candidatas para o acelerômetro. A Tabela 1 mostra as propriedades físicas e geométricas da placa.

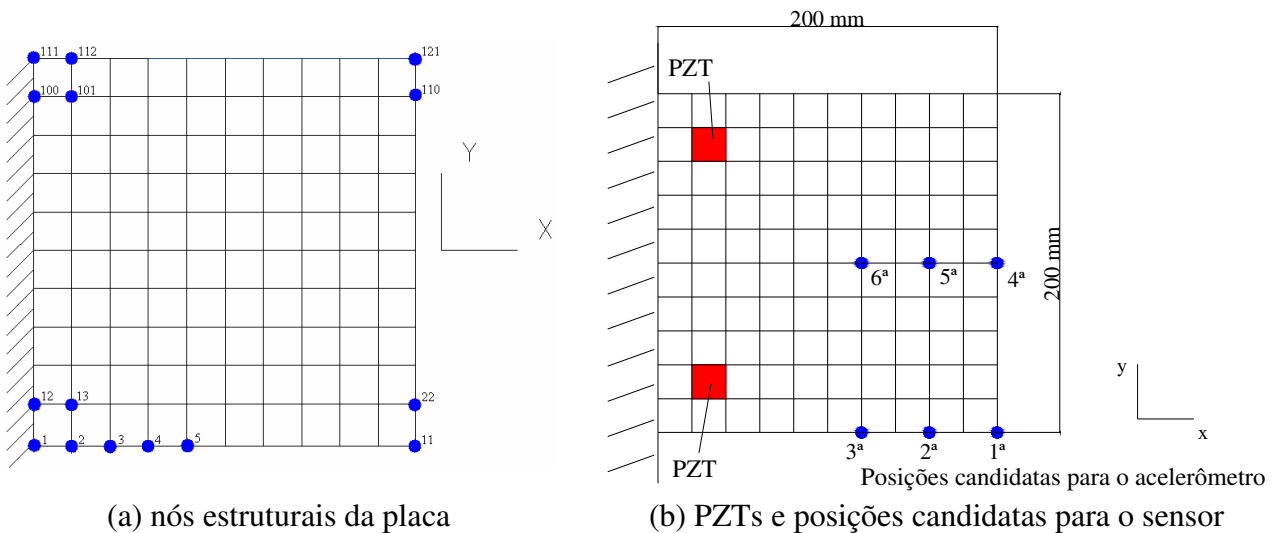


Figura 1 – Placa de alumínio discretizada via método dos elementos finitos.

Tabela 1 – Propriedades físicas e geométricas da placa de alumínio.

Dimensões (mm)	Comprimento	Largura	Espessura
	200	200	3
Densidade (kg.m^{-3})	2710		
Módulo de Elasticidade (GPa)	70		

A aquisição dos sinais de entrada e saída foi realizada utilizando o software Signal Ace II, gerando um sinal aleatório em cada um dos quatro atuadores PZTs. Os PZTs foram utilizados aos pares, ou seja, existem dois PZTs em posições simétricas aos mostrados na Figura 1b, do outro lado da placa. Os sinais de entrada e saída para cada posição do sensor são mostrados nas Figuras 2, 3, 4, 5, 6 e 7. A Figura 8 mostra a placa de alumínio utilizada.

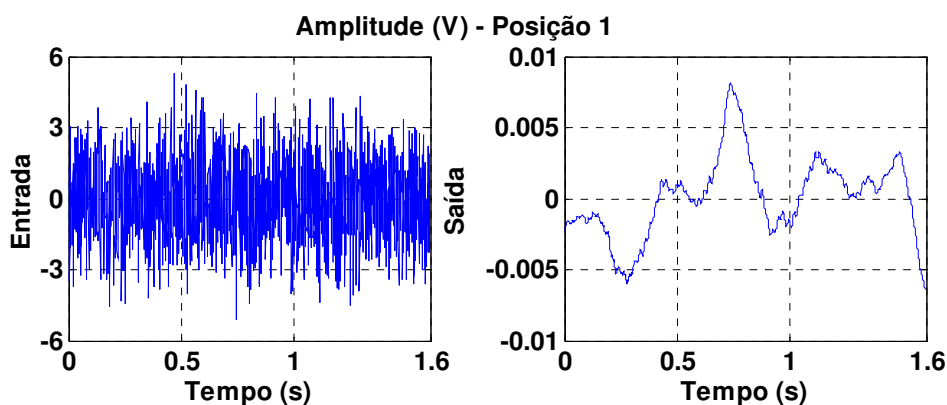


Figura 2 – Sinais de entrada e saída – posição 1.

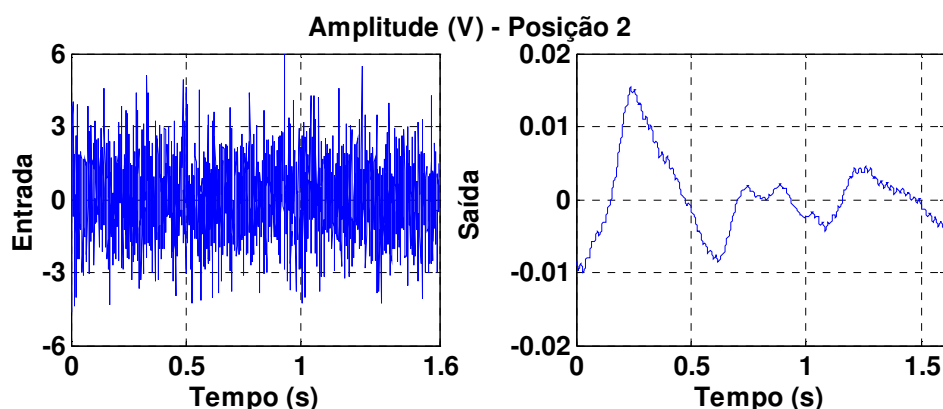


Figura 3 – Sinais de entrada e saída – Posição 2.

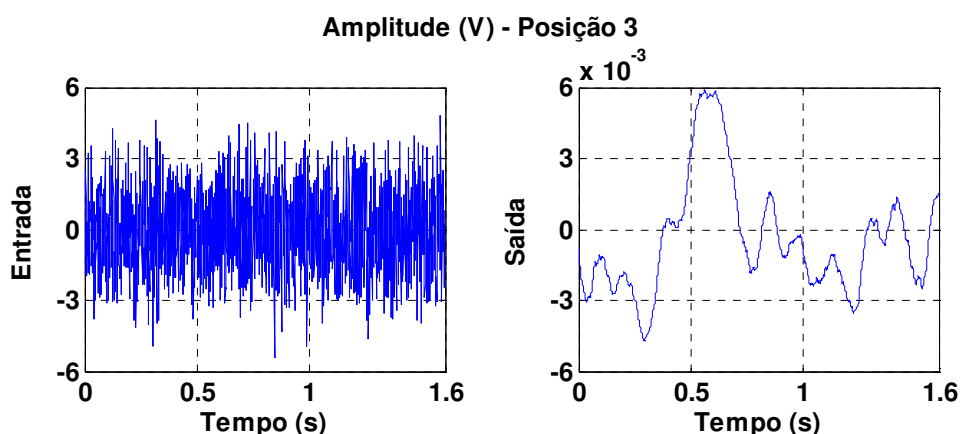


Figura 4 – Sinais de entrada e saída – Posição 3.

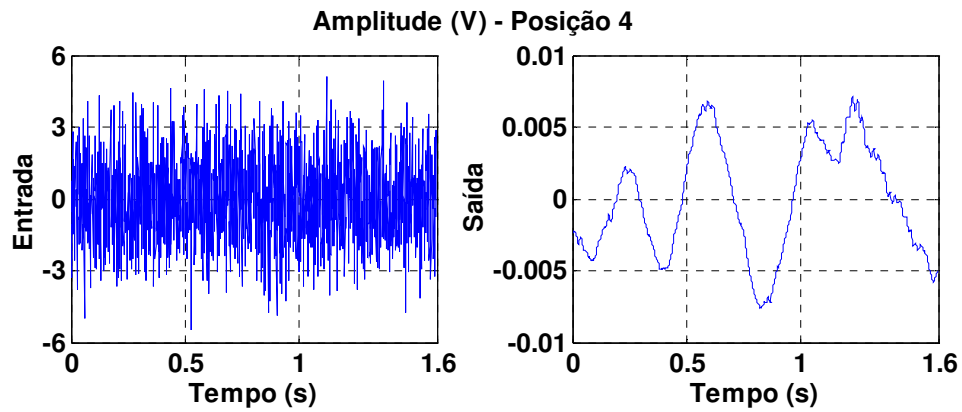


Figura 5 – Sinais de entrada e saída – Posição 4.

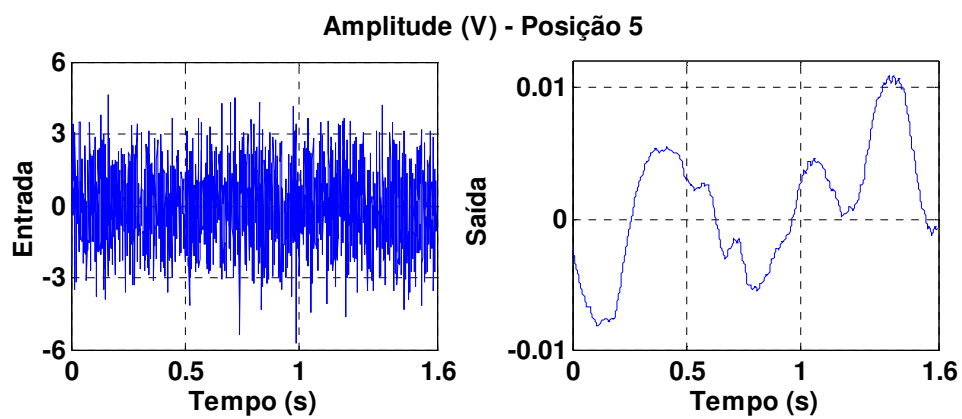


Figura 6 – Sinais de entrada e saída – Posição 5.

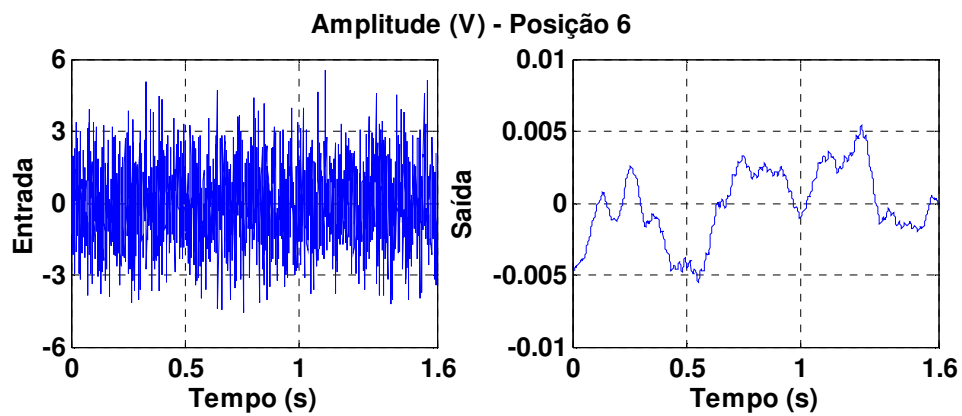
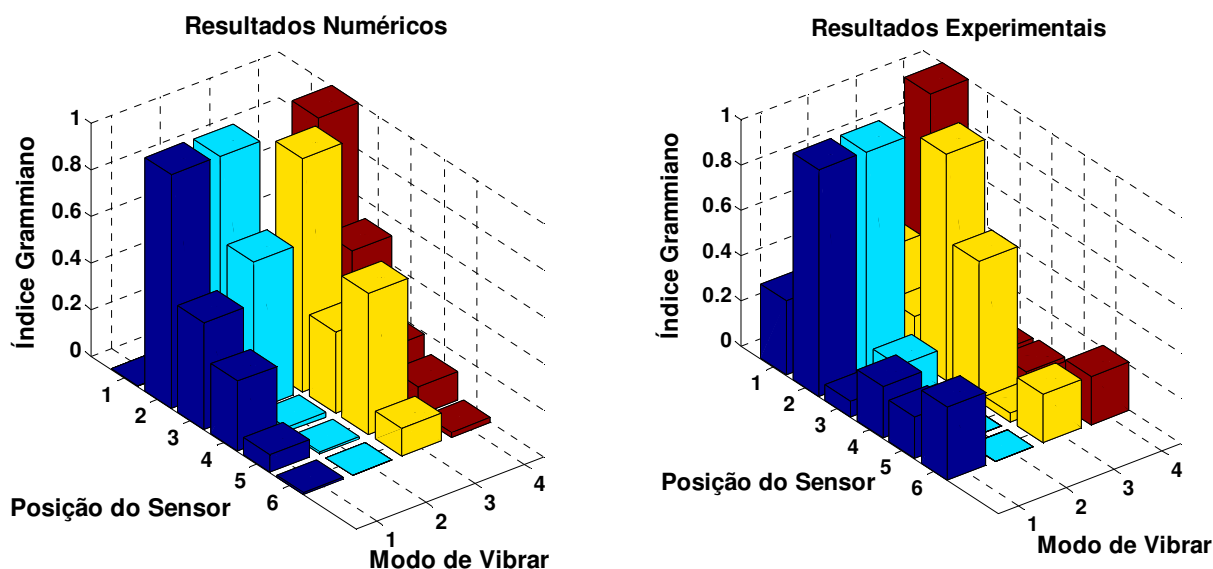


Figura 7 – Sinais de entrada e saída – Posição 6.



Figura 8 – Placa de alumínio utilizada.

A aquisição dos sinais foi realizada até 1000 Hz e por isto apenas os quatro primeiros modos de vibrar foram identificados via método do subespaço. A Figura 9 mostra a matriz de posicionamento (Equação 8) para os quatro primeiros modos, considerando o modelo FEM e os modelos identificados para cada posição, respectivamente. Nota-se claramente que as posições ótimas obtidas numericamente são as mesmas obtidas experimentalmente, com exceção para o quarto modo.



(a) resultados numéricos (b) resultados experimentais
 Figura 9 – Matriz de posicionamento – resultados numéricos e experimentais.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho se buscou validar experimentalmente a resolução do problema de posicionamento ótimo de sensores utilizando a matriz grammiana de observabilidade para a obtenção de um índice de desempenho. A utilização desta matriz para fins de localização ótima já é bastante conhecida e divulgada em inúmeros trabalhos, no entanto, a maioria utiliza outras funções objetivo (neste trabalho se utilizou o traço da matriz). Ainda, em geral, são avaliadas muitas posições candidatas e isto implica que trabalhos que apresentam a comprovação experimental são raramente encontrados. Neste contexto, o atual trabalho mostra que facilmente se realiza a verificação experimental do posicionamento de sensores ao se avaliar algumas posições candidatas selecionadas por experiência de engenharia e com a utilização de um método de identificação das matrizes do sistema.

Em particular neste trabalho, nota-se claramente na Figura 9 que as posições ótimas do acelerômetro para cada um dos três primeiros modos foram as mesmas utilizando o modelo FEM e os modelos identificados a partir de dados experimentais. Para o quarto modo se verificou experimentalmente que a posição ótima para o acelerômetro é a posição 1, enquanto numericamente a posição encontrada foi a 2. Embora os resultados não sejam similares, as posições encontradas são próximas. Isto indica que para aplicações reais de engenharia pode-se encontrar a região da posição ótima e não eventualmente o ponto ótimo. Para estruturas mais complexas, como treliças espaciais, este estudo se torna ainda mais necessário.

5. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o suporte financeiro da FAPESP – Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de São Paulo.

6. REFERÊNCIAS

- Gawronski, W., 1998, “Dynamics and Control of Structures: A Modal Approach”, 1. Ed. New York, Springer Verlag.
- Giurgiutiu, V., 2000, “Recent Advances in Smart-Material Rotor Control Actuation”, AIAA/ASME/ASCE/AHS Structure, Structural Dynamics and Materials Conference and Exhibit, Atlanta – USA.
- Ljung, L., 1987, “System Identification: theory for the user”. Prentice Hall Information and System Sciences Series.
- Marantidis C., Van Way C.B. and J.N. Kudva, 1994, “Acoustic-Emission Sensing in an On-Board Smart Structural Health Monitoring System for Military Aircraft.” *Proceedings of the SPIE Conference on Smart Structures and Integrated Systems*, v. 2191, 258-264.
- Van Overschee, P. and B. De Moor, 1994, “N4SID: subspace algorithms for the identification of combined deterministic-stochastic systems”. *Automatica*, Vol. 30, No. 1, pp. 75-93.

7. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são responsáveis por todo conteúdo deste trabalho.

EXPERIMENTAL VERIFICATION OF OPTIMAL PLACEMENT OF SENSORS USING GRAMMIAN MATRICES

Douglas Domingues Bueno

ddbueno@dem.feis.unesp.br

Clayton Rodrigo Marqui

clayton_rm@dem.feis.unesp.br

Rodrigo Borges Santos

rborges@dem.feis.unesp.br

Vicente Lopes Júnior

vicente@dem.feis.unesp.br

Department of Mechanical Engineering, GMSINT – Group of Intelligent Materials and Systems

Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – UNESP, Av. Brazil n.º 56, ZIP CODE 15385-000

Abstract: *This paper presents an experimental verification of the optimal placement of sensor in an aluminum plate. The methodology used involves the calculation of the trace of the observability grammian matrix, in order to verify the performance of each candidate position. The grammian matrix was calculated by solution the Lyapunov's Equation. The software Signal Ace II was used to acquisition of output and input signals. The excitation forces were applied with four PZTs actuators. The model in space state form was identified by a numerical algorithm of subspace.*

Keywords: *placement of sensors, experimental verification, grammians matrices, subspace method, PZTs actuators.*