

PROCEDIMENTOS NUMÉRICOS PARA DETERMINAR A AMPLITUDE DA TENSÃO CISALHANTE EM FADIGA MULTIAXIAL

Alberto Pinheiro Dantas

José Alexander Araújo

Universidade de Brasília - UnB

Faculdade de Tecnologia - FT

Departamento de Engenharia Mecânica - ENM

Brasília – DF, Cep:70910-900

Tel: ++55 (0)61 307 3089

E-mail: adantas@unb.br

E-mail: alex07@unb.br

URL: <http://www.unb.br/ft/enm/gamma>

Resumo: *O propósito deste trabalho é apresentar e comparar dois procedimentos numéricos para determinar o plano crítico, a amplitude da tensão de cisalhamento e a máxima tensão normal sobre esse plano provocadas por histórias de tensões harmônicas, não harmônicas, em fase e fora de fase e com frequências distintas devido a carregamentos combinados de flexão e torção. O algoritmo numérico foi baseado nas abordagens do menor círculo e do maior envelope prismático estabelecido por Mamiya e Araújo(2002), ambas circunscritas a história de tensões. Com o objetivo de comparar os resultados e o tempo de processamento fornecido por essas abordagens, buscou-se na literatura, experimentos de fadiga multiaxial (no limiar da resistência) envolvendo duas ligas de aço. Os resultados mostraram que ambas as metodologias fornecem os mesmos resultados para determinação da amplitude da tensão cisalhante, mas a abordagem do maior envelope prismático foi mais eficiente.*

Palavras-chave: *fadiga multiaxial, amplitude da máxima tensão cisalhante, plano crítico*

1. INTRODUÇÃO

Fadiga é um processo de degradação contínua de um material quando submetido a carregamentos variáveis e cíclicos levando a desenvolver um acúmulo de dano mesmo num estado de tensões abaixo da tensão de escoamento.

A maioria dos equipamentos de engenharia e estruturas está sujeito a histórias de tensões multiaxiais durante a sua vida útil. Estas histórias de tensões podem ser complexas e, assim, projetos em engenharia requerem metodologias específicas. As teorias de fadiga baseadas em critérios de tensão ou deformação uniaxial podem fornecer previsões não conservativas para o tempo de vida de um determinado material.

Os critérios mais aceitos pela comunidade científica para estimativa da resistência ou vida à fadiga multiaxial são: os critérios baseados na deformação propostos por Brown-Miller (1973) e Socie (1987, 1988), entre outros, os baseados na energia (Ellyin 1991, 1993), e os baseados em tensões como os modelos de Dang Van (1993), Papadopoulos (1995), McDiarmid (1994) e Carpinteri (2000, 2001).

Lazzarin e Susmel (2002) apresentaram mais recentemente um critério baseado na abordagem do plano crítico e na curva biparamétrica de Wöhler, que, segundo os próprios autores, possui a vantagem de ser validada para altos e médios ciclos de fadiga. Essa hipótese considera que componentes cisalhantes e normais da tensão relativa ao plano crítico são os dois parâmetros que controlam o dano por fadiga multiaxial.

Este trabalho tem por objetivo, a partir de experimentos disponíveis na literatura, utilizando duas abordagens distintas, obter computacionalmente a localização do plano onde ocorrem os valores da máxima amplitude da tensão cisalhante e a correspondente tensão normal (nesse plano crítico), realizar uma comparação entre os valores obtidos pelos dois métodos, computando para cada caso, o tempo de processamento.

2. CONCEITOS E DEFINIÇÕES PRELIMINARES

O conceito de tensão é utilizado para descrever a intensidade das forças internas que ocorrem num sólido sob a influência de forças externas, volumétricas e/ou de superficiais. O tensor de Cauchy T é definido por:

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Considere, inicialmente, um volume elementar na vizinhança de qualquer ponto P numa porção do material (Figura 1). A tensão atua no volume V e denota-se por Δ , a interseção do volume V com um plano que passa pelo ponto em consideração. Tal interseção é o plano material elementar definido pelo vetor normal unitário $\mathbf{n}$. Em Δ , atua o vetor tensão $\mathbf{t}$. O vetor tensão $\mathbf{t}$ depende não só do ponto P , mas também do plano que possui um vetor normal à superfície denotado por $\mathbf{n}$ sobre o qual atua. Tal fato é conhecido como Hipótese de Cauchy. O modo como o vetor tensão depende de $\mathbf{n}$ é dado pelo Teorema de Cauchy:

$$\mathbf{t} = T \cdot \mathbf{n} \quad (2)$$

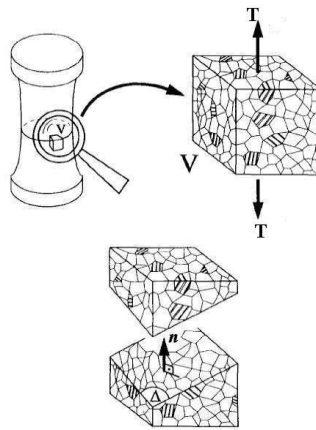


Figura 1 - Volume elementar V e plano material elementar Δ (Papadopoulos et al., (1997))

Por intermédio da figura 2, percebe-se que a projeção de $\mathbf{t}_n$ na direção do vetor unitário $\mathbf{n}$ produz o vetor tensão normal σ e ortogonalmente a esse, o vetor cisalhante τ , ambos com referência ao plano Δ .

A projeção $\mathbf{t}_n$ na direção $\mathbf{n}$ é expressa por:

$$\sigma = (T \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \quad (3)$$

onde T representa o tensor de Cauchy, não dependente do tempo.

Quando a história de carregamento que atua sobre o volume elementar V for dependente do tempo, a equação 3 passa a ser expressa como:

$$\sigma(t) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}(t)) \mathbf{n} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}(t) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \quad (4)$$

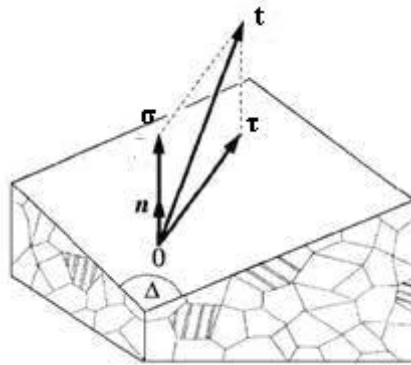


Figura 2 - Tensão normal σ e tensão cisalhante τ agindo no plano material Δ (Papadopoulos et al., (1997))

Daí, conclui-se que $\sigma(t)$ é uma função periódica e escalar cuja amplitude σ_a e valor médio σ_m são expressos, respectivamente pelas seguintes equações:

$$\sigma_a = \frac{1}{2} \left\{ \max_{t \in P} [\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}(t) \cdot \mathbf{n}] - \min_{t \in P} [\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}(t) \cdot \mathbf{n}] \right\} \quad (5)$$

$$\sigma_m = \frac{1}{2} \left\{ \max_{t \in P} [\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}(t) \cdot \mathbf{n}] + \min_{t \in P} [\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}(t) \cdot \mathbf{n}] \right\} \quad (6)$$

sendo t o tempo, e P , o período do carregamento.

Em situações estáticas, ou seja, independente do tempo, a projeção de $\mathbf{t}$ sobre o plano Δ é o vetor referente à tensão cisalhante (Fig 2.2) e pode ser expressa por:

$$\tau = \mathbf{t} - \sigma \Rightarrow \tau = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \quad (7)$$

Porém em situações dinâmicas, ou seja, onde há variação cíclica das condições de carregamento, a obtenção da amplitude e do valor médio de τ não é uma operação tão simples como a apresentada para determinar o vetor tensão normal, pois conforme podemos verificar na figura 3, a magnitude e a direção da tensão cisalhante variam a cada instante de tempo.

Existem alguns procedimentos indicados para calcular a amplitude e o valor médio da tensão cisalhante, sendo os mais conhecidos:

- a maior corda possível da figura gerada pela história de tensões;
- o menor círculo que circunscreve a história de tensões, ;
- o menor elipsóide que circunscreve a história de tensões, e
- o maior envelope prismático.

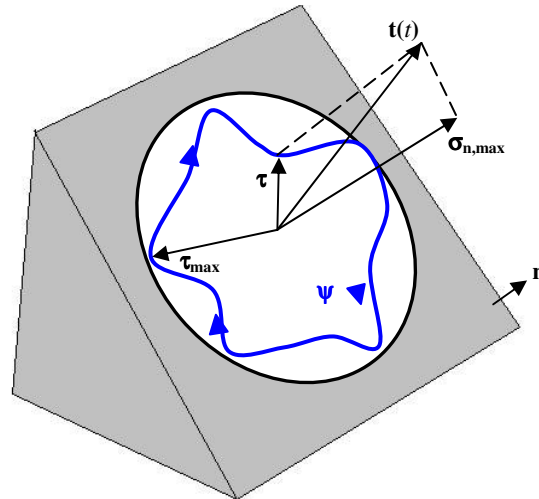


Figura 3 – Projeção da tensão cisalhante sobre o plano Δ quando o carregamento $\mathbf{t}$ for dependente do tempo

3. DETERMINAÇÃO DA TENSÃO CISALHANTE

A maior corda em uma história de tensões cisalhantes é obtida pela pesquisa da maior distância entre dois pontos distintos dessa história de tensões. Aqui surge um problema de falta de unicidade, pois pode existir a possibilidade de haver duas ou mais cordas com as mesmas dimensões, ou seja a informação de duas ou mais tensões cisalhantes de mesma amplitude máxima, porém com diferentes centros (tensões cisalhantes médias, τ_m , diferentes).

Neste contexto surge o método do menor círculo circunscrito à curva fechada Ψ com o objetivo de determinar τ_a e τ_m onde τ_a é a amplitude da tensão de cisalhamento no plano de corte. O tamanho do vetor τ_m que aponta o centro deste círculo, define o valor médio da tensão cisalhante, τ_m , enquanto o raio do círculo define a amplitude τ_a (Figura 4).

Matematicamente, o problema de encontrar o centro do menor círculo que circunscreve a trajetória descrita pela curva fechada Ψ (i.e. encontrar o vetor τ_m) é formulado pelo problema de máximo e mínimo.

$$\tau_m = \min_{\tau'} \left\{ \max_{t \in P} \left\| \tau(t) - \tau' \right\| \right\} \quad (8)$$

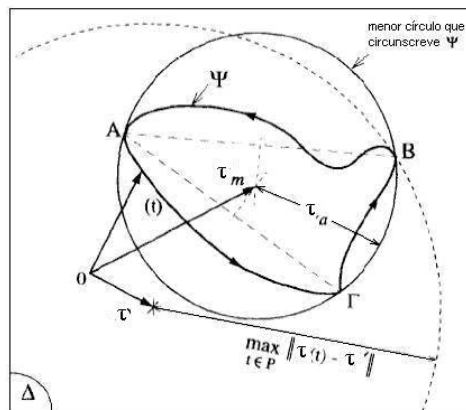


Figura 4 - Definição da amplitude de tensão cisalhante τ_a pela construção do menor círculo que circunscreve a curva (Papadopoulos et al., (1997))

Se a curva Ψ possui um centro de simetria, então o centro do menor círculo que a circunscreve coincide com esse centro de simetria. Uma vez encontrado o centro τ_m , a amplitude da tensão cisalhante é obtida por:

$$\tau_a = \max_{t \in P} \|\tau(t) - \tau_m\| \quad (9)$$

Outra abordagem para achar a máxima tensão cisalhante é utilizar uma metodologia proposta por Bin Li *et al.* (2000) que propõe a construção da menor elipsóide que circunscreve a história de tensões (figura 5). Assim, no caso de solicitações biaxiais, τ_a é obtido da seguinte forma:

$$\tau_a = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \quad (10)$$

onde λ_1 e λ_2 são os semi-eixos da elipse (figura 5)

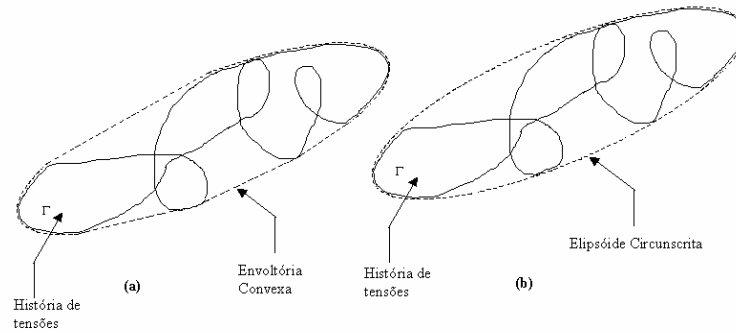


Figura 5 - Caracterização da solicitação mecânica à Fadiga
(a) envoltória convexa (b) elipsóide circunscrita

A utilização de elipsóides como uma medida de falha à fadiga fornece resultados razoáveis (Bin Li *et al.*, 2000) onde a elipsóide é uma boa aproximação para um envelope (envoltória) convexo de Γ . Neste caso uma definição mais geral para τ_a pode ser escrita como:

$$\tau_a = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \lambda_i^2} \quad (11)$$

onde λ_i , $i=1, \dots, 3$ são as dimensões dos semi-eixos da elipsóide circunscrita.

A desvantagem da definição expressa na equação 11 é o fato de que a elipsóide e seus semi-eixos são de difícil obtenção.

Tendo em vista esta dificuldade, Mamiya & Araújo (2005) propuseram uma nova expressão para determinar τ_a . Os autores propõem que a medida de amplitude de tensão para carregamentos multiaxiais deve contemplar a idéia de tamanho da história de tensões T . Suponha τ a projeção sobre o espaço das tensões como ilustrado na Fig. 5.a, e seja Γ o envelope convexo correspondente (i.e., o menor conjunto convexo contendo todos os pontos de τ).

Mamiya e Araújo afirmam que os estados de tensão podem ser caracterizados por intermédio da idéia de um prisma retangular com orientação arbitrária φ que circunscreve a história de tensões, tal como ilustrado na Fig. 5.b. onde pontos $p_i(\varphi)$ e $q_i(\varphi)$ são os pontos de tangência ao contorno $\partial\Gamma$ do envelope convexo.

Assim, estabelece-se uma relação direta entre o envelope convexo e os prismas retangulares que o circunscrevem. Para cada orientação φ do prisma retangular, define-se a i -ésima componente $a_i(\varphi)$ da amplitude da história de tensões como:

$$a_i(\varphi) = \frac{1}{2} \left[\max_t \tau_i(\varphi, t) - \min_t \tau_i(\varphi, t) \right]. \quad (12)$$

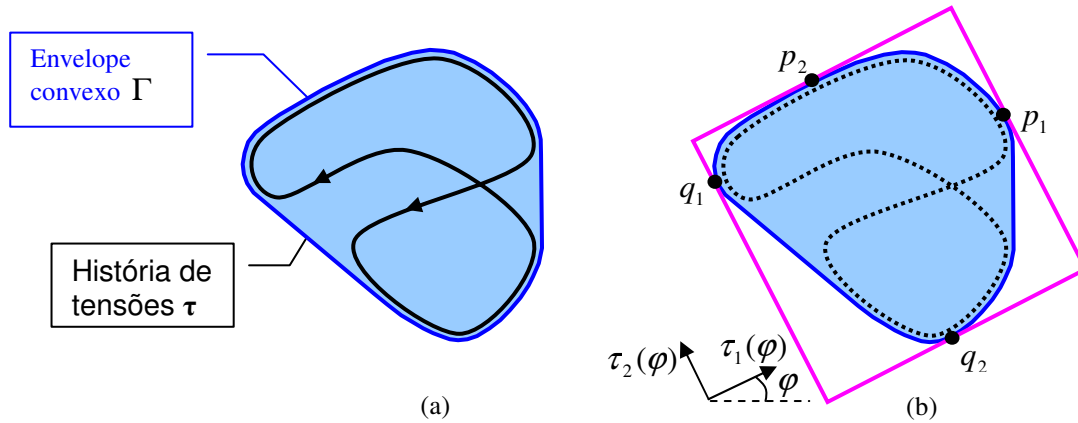


Fig. 5 – (a) História de tensões cisalhantes e o envelope convexo correspondente, (b) envelope prismático com orientação φ e os pontos de tangência $p_i, q_i, i = 1, \dots$.

No presente estudo, a amplitude de tensão cisalhante é definida como:

$$\tau_a = \max_{\varphi} \sqrt{\sum_{i=1}^3 a_i^2(\varphi)}. \quad (13)$$

4. CRITÉRIO DO PLANO CRÍTICO

As abordagens de plano crítico, por sua vez, consideram que as trincas de fadiga têm origem em certos planos materiais onde as combinações de tensões ou deformações cisalhantes e normais são particularmente severas. Portanto, estes critérios são capazes de prever não apenas a resistência à fadiga do material e o local de iniciação da trinca, mas também sua orientação. Modelos de plano crítico foram propostos por Findley (1959), Brown e Miller (1973), Matake (1977), Socie (1987), McDiarmid (1994), Carpentieri e Spagnoli (2001), Susmel e Lazzarin (2002).

O plano crítico é definido como o plano material onde ocorre a maior amplitude da tensão ou deformação de cisalhamento, portanto mais propício a iniciação de trincas por fadiga. Somente tensões ou deformações cisalhantes e normais a este plano são consideradas na formulação do parâmetro de dano a fadiga.

5. RESULTADOS

Este trabalho tem por objetivo propor e implementar um novo procedimento para fornecer com melhor exatidão e em um menor tempo de processamento computacional, a localização do plano crítico e as respectivas amplitude de tensão cisalhante e máxima tensão normal. Desta forma foram utilizados os algoritmos referentes ao menor círculo que circunscreve uma história de tensões e o método do maior envelope prismático proposto por Mamiya e Araújo (2005).

Um amplo conjunto de experimentos – amplamente aceito na literatura – ilustrando situações limites de resistência à fadiga foi considerado. Solicitações biaxiais harmônicas e não harmônicas, em fase e fora de fase, solicitadas à mesma frequência e a frequências distintas foram empregadas nesses testes. Especificamente, foram considerados os resultados experimentais de Nishihara e Kawamoto (1945) e Kaniut (1983).

Na procura do plano crítico é necessário identificar onde ocorre a maior tensão cisalhante, ou seja $\tau_a(\theta_c, \phi_c)$. O critério proposto por Susmel e Lazzarin (2002) considera que o plano mais solicitado é aquele em que atinge seu valor máximo, ou seja:

$$\tau_a(\theta_c, \phi_c) = \max_{\theta, \phi} \{\tau_a\} \quad (14)$$

O algoritmo para determinar a maior amplitude da tensão cisalhante é uma tarefa que demanda um custo computacional bastante elevado. Além das discretizações temporais há a necessidade de se realizar discretizações que caracterizam os diversos cortes em um ponto material. A figura 6 mostra a representação cartesiana do vetor unitário $\mathbf{n}$, onde θ representa o ângulo formado pela projeção de $\mathbf{n}$ sobre o plano XY e o eixo X e, ϕ o ângulo formado pelo vetor unitário e o eixo Z.

Devido a simetria, percebe-se que o ângulo θ pode variar de 0° a 180° (0 a π) enquanto que o ângulo ϕ , de 0° a 90° (0 a $\pi/2$). Em suma, para cada ponto material deve-se “varrer” um período completo, acrescido da rotação no plano XY (ângulo θ) e para cada θ , deve-se ainda percorrer com o ângulo ϕ . Neste contexto, quanto maiores forem as discretizações, maior será o tempo de processamento. Ao contrário, quanto menor a discretização menor será a exatidão dos resultados esperado, embora o tempo de processamento diminua.

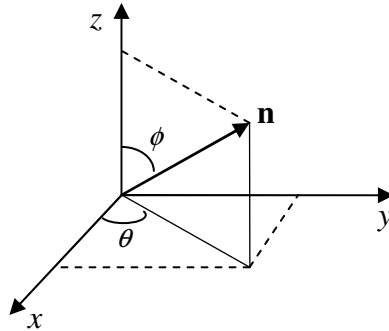


Figura 6 – Representação cartesiana do vetor unitário $\mathbf{n}$

Como as histórias retiradas da literatura continham apenas solicitações biaxiais, era de se esperar que as maiores componentes estivessem projetadas sobre o plano XY, motivo pelo qual o incremento em ϕ foi de 45° ($\Delta\phi=45^\circ$) enquanto que o incremento em θ , onde não era possível pré-identificar o corte onde estava a maior tensão cisalhante, foi de 0.5° ($\Delta\theta=0.5^\circ$).

Para verificar a influência do incremento em $\Delta\phi$ sobre o resultado final, foram processados alguns casos com $\Delta\phi$ discretizado em 1° , porém foi observado que os valores encontrados para esses casos, foram exatamente os mesmos quando foram considerados $\Delta\phi = 45^\circ$. No entanto, o tempo de processamento para outros casos analisados considerando $\Delta\phi = 1^\circ$, foi maior em mais de 5.000 % quando utilizado $\Delta\phi = 45^\circ$. Para a determinação da maior tensão cisalhante por intermédio do prisma retangular, a discretização da orientação arbitrária ϕ que circunscreve a história de tensões foi de 1° ($\Delta\phi = 1^\circ$). Note que nesse caso 90 diferentes prismas são analisados em um mesmo plano material. A utilização da circunferência como medida da amplitude de tensão cisalhante requer em um plano material requer um algoritmo apropriado. A limitação de espaço disponível nos impede de apresentar esse algoritmo de maneira mais detalhada, entretanto leitores mais interessados podem encontrar um estudo completo em Dang Van, 1993. Aqui, apenas os resultados do custo computacional associado a esse método serão considerados. Deve-se relatar no entanto que o coeficiente de expansão da circunferência foi o padrão, ou seja, $\chi = 0.05$.

As histórias de tensão consideradas no presente estudo, assim como os cálculos de aplicação do critério, foram implementadas em um programa Matlab © e a obtenção dos valores foi sempre realizada numa mesma plataforma computacional.

A Tabela 1 apresenta os parâmetros para os ensaios de Nishihara & Kawamoto (1945) descrevendo ensaios de flexão-torção em situações no limiar da resistência à fadiga para aço “duro”. Trata-se de ensaios biaxiais harmônicos, em fase e fora de fase, mas com mesma frequência de solicitação.

Os resultados são apresentados na tabela 2, onde se pode identificar valores da máxima amplitude da tensão cisalhante, τ_{max} e a o maior valor da tensão normal no plano crítico, ou seja σ_{max} . Percebe-se, que independente da abordagem utilizada (menor circunferência circunscrita ou envelope prismático), os resultados foram exatamente os mesmos. A grande diferença está no tempo de processamento. Enquanto que os resultados apresentados pela metodologia do círculo apresentou o resultados com uma média de 40 a 30 segundos, os resultados apresentados pelo método do prisma retangular foram de aproximadamente 10 segundos, isto é um tempo de processamento de até 75% menor que o do círculo, porém com valores numéricos exatamente idênticos ao método proposto por Dang Van (1993). Na tabela 2, ainda são apresentados o a localização do plano crítico (plano onde ocorre a maior amplitude da tensão cisalhante) por intermédio dos valores de θ e ϕ , bem como o tempo de processamento em cada análise.

Tabela 1 – Parâmetros para os ensaios de Nishihara & Kawamoto (1945) descrevendo situações no limiar da resistência à fadiga para aço “duro”, $f_{-1} = 313.9 \text{ MPa}$, $t_{-1} = 196.2 \text{ MPa}$,.

	σ_a (MPa)	σ_m (MPa)	τ_a (MPa)	τ_m (MPa)	$\beta(^{\circ})$	λ
1	138.1	0	167.1	0	0	1
2	140.4	0	169.9	0	30	1
3	145.7	0	176.3	0	60	1
4	150.2	0	181.7	0	90	1
5	245.3	0	122.6	0	0	1
6	249.7	0	124.8	0	30	1
7	252.4	0	126.2	0	60	1
8	258.0	0	129.0	0	90	1
9	299.1	0	62.8	0	0	1
10	304.5	0	63.9	0	90	1

Na experimento de número 7 da tabela 2, foi estabelecida uma discretização para $\Delta\phi$ de 1° ($\Delta\phi = 1^{\circ}$) no caso do envelope prismático. Nota-se que o resultado apresentado é o mesmo quando comparado a abordagem do menor círculo para $\Delta\phi$ de 45° , ou seja, os resultados foram exatamente os mesmos porem com um tempo de processamento muito mais elevado (8 minutos e 54 segundos). Isso mostra que, devido a característica do estado plano de tensão presente nesses experimentos, torna-se desnecessário uma busca mais refinada em ϕ .

Tabela 2 – Cálculo da maior amplitude da tensão cisalhante e da correspondente tensão normal para os experimentos de Nishihara e Kawamoto (1945).

N°	Menor Círculo Circunscrito $\Delta\theta = 0.5^{\circ}$, $\Delta\Phi = 45^{\circ}$					Prisma retangular $\Delta\theta = 0.5^{\circ}$, $\Delta\Phi = 45^{\circ}$, $\Delta\phi = 1^{\circ}$				
	τ_{max}	σ_{max}	θ	Φ	t(s)	τ_{max}	σ_{max}	θ	Φ	t(s)
1	180.79	70.78	78.5	90.0	40.56	180.79	70.78	78.5	90.0	10.03
2	180.50	88.33	169.5	90.0	40.58	180.50	88.33	169.5	90.0	10.14
3	180.51	128.32	173.5	90.0	40.64	180.51	128.32	173.5	90.0	10.06
4	181.70	150.20	0.0	90.0	41.42	181.70	150.20	0.0	90.0	10.16
5	173.41	122.68	157.5	90.0	40.23	173.41	122.68	157.5	90.0	10.17
6	170.17	140.82	157.0	90.0	40.09	170.17	140.82	157.0	90.0	10.19
7	154.34	190.63	158.5	90.0	40.11	154.34	190.63	158.5	90.0	8m54s*
8	128.99	258.00	0.0	90.0	39.61	129.00	258.00	0.0	90.0	10.00
9	162.19	150.17	146.5	90.0	39.33	162.19	150.17	146.5	90.0	9.91
10	152.249	165.11	45.0	90.0	39.34	152.25	165.11	45.0	90.0	10.30

* $\Delta\theta = 0.5$ $\Delta\Phi = 1$, $\Delta\phi = 1$

A Tabela 3 apresenta os parâmetros para os ensaios de Kaniut (1983) descrevendo situações no limiar da resistência à fadiga para corpos de prova de 25CrMo4, com frequências de solicitação distintas para a tensão cisalhante e para a tensão normal.

Os resultados correspondentes ao experimento de Kaniut estão apresentados na tabela 4. Embora as frequências sejam distintas entre as tensões cisalhante e normal, o resultado em ambos os métodos foram iguais com vantagem, em termos de tempo gasto no processamento para a abordagem do prisma retangular.

Tabela 3 – Parâmetros para ensaio de Kaniut (1983) descrevendo situações no limiar da resistência à fadiga para 25CrMo4, $f_{-1} = 340 \text{ MPa}$ e $t_{-1} = 228 \text{ MPa}$ com frequências distintas de solicitação para a tensão de cisalhamento e para a tensão normal.

	σ_a (Mpa)	σ_m (Mpa)	τ_a (Mpa)	τ_m (Mpa)	$\beta(^{\circ})$	λ
1	210	0	105	0	0	1/4
2	220	0	110	0	0	2
3	242	0	121	0	90	2
4	196	0	98	0	0	8

Tabela 4 – Cálculo da maior amplitude da tensão cisalhante e da correspondente tensão normal para os experimentos de Kaniut

Nº	Menor Círculo Circunscrito $\Delta\theta = 0.5^{\circ}$, $\Delta\Phi = 45^{\circ}$					Prisma retangular $\Delta\theta = 0.5^{\circ}$, $\Delta\Phi = 45^{\circ}$, $\Delta\phi = 1^{\circ}$				
	$\tau_{\max}$	$\sigma_{\max}$	θ	Φ	t(s)	$\tau_{\max}$	$\sigma_{\max}$	θ	Φ	t(s)
1	108,77	172,99	90.0	37.5	32.4	108,77	172,99	90.0	37.5	9.8
2	136.72	229.19	90.0	21.0	35.2	133.32	226.58	90.0	21.5	9.8
3	137.02	287.73	90.0	16.0	29.5	137.02	287.73	90.0	16.0	9.8
4	137.26	233.37	90.0	22.5	35.5	137.26	233.37	90.0	22.5	9.8

6. CONCLUSÕES

O presente trabalho apresentou uma comparação entre duas abordagens diferentes para determinar a amplitude da tensão cisalhante no plano crítico. Verificou-se que ambos os métodos apresentaram resultados iguais sob condições bastante gerais de carregamentos multiaxiais, harmônicas e não harmônicas, em fase e fora de fase, com componentes atuando na mesma frequência ou em frequências distintas.

Como maneira de identificar a validade dos procedimentos adotados neste trabalho, substitui-se os valores encontrados da amplitude máxima da tensão cisalhante e da máxima tensão normal no critério de plano crítico proposto por Susmel e Lazarin (2002) e observou-se que os resultados obtidos, forneceram uma previsão de falha por fadiga na ordem de 20% em relação aos dados experimentais, o que se pode considerar bastante razoável em se tratando de fadiga multiaxial.

Além disso, ficou caracterizado que o cálculo utilizando a abordagem do prisma retangular é mais simples, não compromete a qualidade dos resultados e oferece um custo computacional bastante inferior ao método tradicional da menor circunferência inscrita. Essa constatação torna o procedimento proposto particularmente atraente para a utilização no contexto do método dos elementos finitos. No entanto, em situações reais onde é necessária a aplicação de algum critério de fadiga, como por exemplo, o do plano crítico, em centenas de milhares ou mesmo em milhões de pontos do elemento mecânico analisado, esse método computacional ainda pode representar um custo bastante elevado.

Desta forma o Grupo de Mecânica dos Materiais da Universidade de Brasília está investindo na solução de métodos de otimização, destacando o uso de algoritmo genético que é um processo otimização que simula os processos naturais de evolução, na busca da melhor solução.

Algoritmos Genéticos são muito eficientes para busca de soluções ótimas, ou aproximadamente ótimas em uma grande variedade de problemas, pois não impõem muitas das limitações encontradas nos métodos de busca tradicionais. Além de ser uma estratégia de gerar-e-testar muito elegante, por serem baseados na evolução biológica, são capazes de identificar e explorar fatores ambientais e convergir para soluções ótimas, ou aproximadamente ótimas em níveis globais em um tempo muito menor que os métodos de otimização conhecidos.

7. REFERÊNCIAS

- Bin Li, Santos, J. L. T. & Freitas, M. (2000), *Mech. Struct. Mach.*, 28:85
- Brown, M. W. & Miller, K. J. (1973) A theory for fatigue failure under multiaxial stress-strain condition, *Proc Inst Mech Engrs*, 187:745-755.
- Brown, M.W. and Miller, K. J. (1973) A theory for fatigue under multiaxial stress-strain conditions. *Proc. Inst. Mech. Eng.* 187, 745–755.
- Camilla A. Gonçalves, José A. Araújo and Edgar N. Mamiya (2005) Multiaxial fatigue: a stress based criterion for hard metals • ARTICLE *International Journal of Fatigue*, Volume 27, Issue 2, February 2005, Pages 177-187
- Carpinteri, A. and Spagnoli, A. (2001) Multiaxial high-cycle fatigue criterion for hard metals. *Int. J. Fatigue* 23, 135–145.
- Carpinteri, A., Brighenti, R. and Spagnoli, A. (2000) A fracture plane approach in multiaxial high-cycle fatigue of metals. *Fatigue Fract. Engng Mater. Struct.* 23, 355–364
- Dang Van, K. (1993) Macro-micro approach in high-cycle multiaxial fatigue. In: *Advance in Multi-Axial Fatigue*, ASTM STP 1191 (Edited by D. L. McDowell and R. Ellis). American Society for Testing Materials, Philadelphia, PA, pp. 120–130.
- Ellyin, F. and Xia, Z. (1993) A general fatigue theory and its application to out-of-phase cyclic loading. *Trans. ASME J. Engng Mater. Technol.* 115, 411–416.
- Ellyin, F., Golos, K. and Xia, Z. (1991) In-phase and out-of-phase multiaxial fatigue. *Trans. ASME, J. Engng Mater. Technol.* 113, 112–118.
- Fatemi, A. and Socie, D. F. (1988) A critical plane approach to multiaxial fatigue damage including out-of-phase loading. *Fatigue Fract. Engng Mater. Struct.* 11, 149–165.
- Kaniut, C. (1983), *Zur Betriebsfestigkeit metallischer Werkstoffe bei mehrachsiger Beanspruchung*, Diss RWTH Aachen.
- McDiarmid, D. L. (1994) A shear stress based critical-plane criterion of multiaxial fatigue failure for design and life prediction. *Fatigue Fract. Engng Mater. Struct.* 17, 1475–1484.
- Nishihara, T. & Kawamoto, M. (1945), The strength of metals under combined alternating bending and torsion with phase difference, *Memoirs of the College of Engineering*, Kyoto Imperial University, 11:85-112.
- Papadopoulos, I. V. (1995) A high-cycle fatigue criterion applied in biaxial and triaxial out-of-phase stress conditions. *Fatigue Fract. Engng Mater. Struct.* 18, 79–91.
- Socie, D. F. (1987) Multiaxial fatigue damage models. *Trans. ASME, J. Engng Mater. Technol.* 109, 293–298.
- Susmel, L. and Lazzarin, P. (2002) A bi-parametric Wöhler curve for high cycle multiaxial fatigue assessment. *Fatigue Fract. Engng Mater. Struct.* 25, 63–78
- T. Mataka (1977) An explanation on fatigue limit under combined stress, *Bull. JSME*, 20:257-263.
- W. N. Findley (1959) A theory for the effect of mean stress of fatigue under combined torsion and axial load or bending, *Trans. ASME Ser. B*, 81:301–306.

8. DIREITOS AUTORAIS

É concedida à Universidade Federal de Uberlândia permissão para reproduzir cópias deste trabalho somente para propósitos acadêmicos e científicos.

Os autores reservam outros direitos de publicação e nenhuma parte deste trabalho para outros fins, pode ser reproduzido sem a autorização por escrito dos mesmos.

PROCEDIMENTOS NUMÉRICOS PARA DETERMINAR A AMPLITUDE DA TENSÃO CISALHANTE EM FADIGA MULTIAXIAL

Alberto Pinheiro Dantas

Universidade de Brasília - UnB
Faculdade de Tecnologia - FT
Departamento de Engenharia Mecânica - ENM
Brasília – DF, Cep:70910-900
Tel: ++55 (0)61 307 3089
E-mail: adantas@unb.br

José Alexander Araújo

Universidade de Brasília - UnB
Faculdade de Tecnologia - FT
Departamento de Engenharia Mecânica - ENM
Brasília – DF, Cep:70910-900
Tel: ++55 (0)61 307 3089
E-mail: alex07@unb.br
URL: <http://www.unb.br/ft/enm/gamma>

Abstract: *The goal of this work is to present and to compare two numerical procedures to determine the critical plane, the amplitude of the equivalent shear stress and the maximum normal stress on this plane. These stress histories are generated by harmonic and non harmonic loadings which are applied in phase, out of phase and with different frequencies. The numerical algorithm to compute the maximum shear stress amplitude was based on the minimum circumscribed circle and on the maximum prismatic envelope established by Mamiya and Araújo (2002). In order to compare the results and the computational costs provided by these approaches, we collected data from the literature for multiaxial fatigue experiments on two steel alloys. The results showed that both methodologies yielded the same values for the computed shear stress amplitude but the prismatic proved to be more efficient.*

Keywords: *multiaxial fatigue, maximum shear stress amplitude, critical plane*