

## OTIMIZAÇÃO DE MODELOS DE FADIGA MULTIAXIAL ATRAVÉS DE ALGORITMOS GENÉTICOS

**Tarsilo Bezerra Inácio**

Universidade de Brasília – Departamento de Engenharia Mecânica - Brasília / DF  
[tarsilo\\_bezerra@yahoo.com.br](mailto:tarsilo_bezerra@yahoo.com.br)

**Daniel Gerbis de Aguiar**

Universidade de Brasília  
[dani.a@terra.com.br](mailto:dani.a@terra.com.br)

**José Alexander Araújo**

Universidade de Brasília  
[alex07@unb.br](mailto:alex07@unb.br)

**Tito Dias Jr.**

Universidade de Brasília  
[titodiasjr@unb.br](mailto:titodiasjr@unb.br)

**Resumo:** *Este trabalho tem como objetivo o desenvolvimento de uma ferramenta numérica otimizada para avaliação da resistência em fadiga de componentes submetidos a estados complexos de tensão. Executou-se a avaliação da solicitação em fadiga pelo critério multiaxial das Curvas Modificadas de Wöhler, o qual foi desenvolvido por meio de uma interpretação física do processo de fadiga onde as trincas foram observadas ter início e propagar-se em determinados planos preferenciais. Neste contexto, as tensões cisalhante e normal associadas a um plano são determinadas e uma combinação destas tensões é utilizada para prever o plano mais solicitado, ou “plano crítico”. Portanto a ferramenta tem a capacidade de determinar as maiores amplitudes de tensões cisalhante e normal e, baseado no modelo das curvas modificadas de Wöhler, avaliar a resistência em fadiga dos diversos experimentos analisados. Com a finalidade de otimizar o processo de busca do “plano crítico” através dos diversos planos materiais utilizou-se o algoritmo genético que é baseado em conceitos evolutivos. Este algoritmo tem a capacidade de prever o plano crítico sem que seja preciso determinar a amplitude da tensão cisalhante equivalente em “todos” os planos materiais. O uso do algoritmo genético foi de grande importância para a redução do custo computacional na determinação do plano que sofre os carregamentos mais severos, além disso, os resultados encontrados para estimativa da resistência em fadiga ficaram próximos aos dados experimentais coletados da literatura.*

**Palavras-chave:** *Algoritmo Genético, Amplitude de tensão cisalhante, plano crítico, fadiga multiaxial.*

### 1. INTRODUÇÃO

A segurança de componentes mecânicos está fortemente relacionada aos esforços dinâmicos que essas estruturas sofrem no decorrer do tempo de seu carregamento. Devido a esses carregamentos repetidos podem ocorrer falhas que são consequências de um fenômeno denominado fadiga, onde em geral, pequenas rachaduras começam a aparecer no material, e estas crescem até que a falha ocorra por completo (Dowling, 1998).

Grande parte dos equipamentos de engenharia e estruturas está sujeita a histórias de tensões multiaxiais durante a sua vida útil. A complexidade do carregamento pode aumentar na presença de

componentes médios de tensão. Os critérios de plano crítico têm demonstrado bons resultados na estimativa da resistência em fadiga de componentes submetidos a carregamentos multiaxiais não proporcionais, além de serem capazes de prever não apenas o local do início da trinca mas sua direção de propagação (Susmel & Lazzarin, 2002).

Em análises estruturais de durabilidade, uma previsão da direção de propagação da trinca no estudo de fadiga é muito importante para avaliações de segurança e para a seleção de um projeto estrutural que seja capaz de conter a trinca (Freitas *et al.*, 2006).

O objetivo deste trabalho é propor o uso de algoritmos genéticos na construção de uma ferramenta numérica para a otimização de um modelo de análise de fadiga multiaxial que utiliza a abordagem de plano crítico. Os casos analisados consideram carregamentos combinados com a presença de tensões de flexão e de torção em fase e fora de fase e, em alguns casos, na presença de tensões médias.

## 2. CRITÉRIO DAS CURVAS MODIFICADAS DE WÖHLER

O critério de Susmel e Lazzarin (2002) baseado nas curvas modificadas de Wöhler, considera que devido ao estado de tensão cíclico ocorre a formação de bandas de escorregamento persistentes e paralelas a um certo plano material ( $\theta$  e  $\phi$ ). Após um certo número de ciclos, devido aos efeitos de concentração de tensão, ocorre a iniciação de uma micro trinca causada predominantemente por tensões cisalhantes. Com isso, o processo de início das trincas por fadiga é governado pela maior amplitude da tensão cisalhante  $\tau_a$  que ocorre em um plano material para um estado de tensão. Este plano é denominado plano crítico ( $\theta_G, \phi_G$ ).

Susmel e Lazzarin observaram ainda que no plano crítico ( $\theta_G, \phi_G$ ), a maior tensão normal  $\sigma_{n,máx}$  considera os efeitos de tensão média na resistência à fadiga e que a relação  $\frac{\sigma_{n,máx}}{\tau_a}$ , representa uma relação de dependência com as diferenças de fases entre as solicitações. Assim, Susmel e Lazzarin propõem em seu modelo que a falha ocorrerá de acordo com a equação 1.

$$\tau_a(\theta_G, \phi_G) + m_1 \frac{\sigma_{n,máx}}{\tau_a}(\theta_G, \phi_G) - \lambda = 0 \quad (1)$$

Onde  $\lambda$  e  $m_1$  são relações materiais que dependem das condições do carregamento imposto.

No modelo proposto, a maior amplitude da tensão cisalhante será determinada pelo raio da menor circunferência que irá conter a história de carregamento em um determinado plano material. Essa trajetória de carregamento  $\psi$  é descrita pelo vetor tensão cisalhante  $\tau$  variando ao longo do tempo de seu carregamento (Figura 1(a)). Os planos materiais são caracterizados pelos seus respectivos vetores normais unitários  $\mathbf{n}$  que por sua vez podem ser definidos através dos ângulos  $\theta$  e  $\phi$  por coordenadas esféricas (Figura 1(b) e equação 2).

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \cdot \sin(\phi) \cos(\theta) \\ n \cdot \cos(\phi) \\ n \cdot \sin(\phi) \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad (2)$$

O plano crítico caracterizado através dos ângulos  $\theta_G, \phi_G$  é definido pelo plano que suporta a máxima amplitude de tensão cisalhante, dentre todos os possíveis planos que passam através de um ponto material.

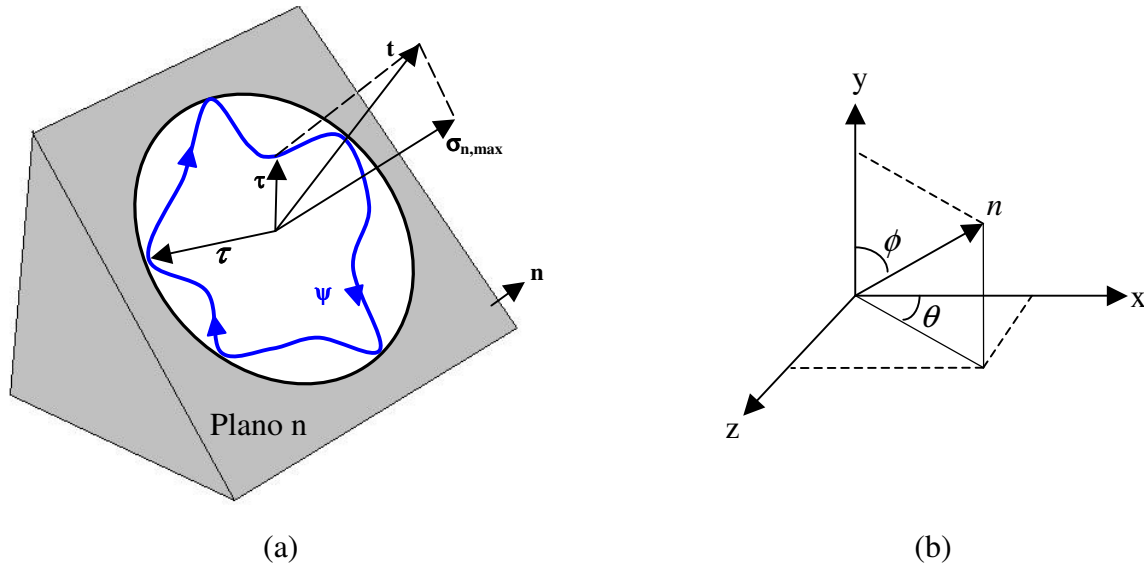


Figura 1: (a) Menor circunferência que contém a história de carregamento  $\psi$  descrita pelo vetor tensão cisalhante  $\tau$  em um plano material caracterizado pelo vetor normal unitário  $\mathbf{n}$ . (b) Ângulos  $\theta$  e  $\phi$  que definem  $\mathbf{n}$  no sistema de coordenadas adotado.

### 3. DETERMINAÇÃO DA AMPLITUDE DE TENSÃO CISALHANTE EQUIVALENTE

Para determinar a tensão cisalhante equivalente é necessário conhecer o raio da menor circunferência que irá conter a trajetória de carregamento no plano crítico. O procedimento inicia-se com uma circunferência de raio muito pequeno e com o centro coincidente com o centro geométrico da história de carregamento sobre o plano de corte (Figura 2(a)). Em seguida, o raio desta circunferência aumenta de tamanho em função de um parâmetro  $\chi$  e desloca-se para um ponto da história de carregamento tangenciando a mesma (Figura 2(b) e Figura 2(c)). Este procedimento é então repetido inúmeras vezes até que a circunferência contenha totalmente a história de carregamento (Figura 2(d)).

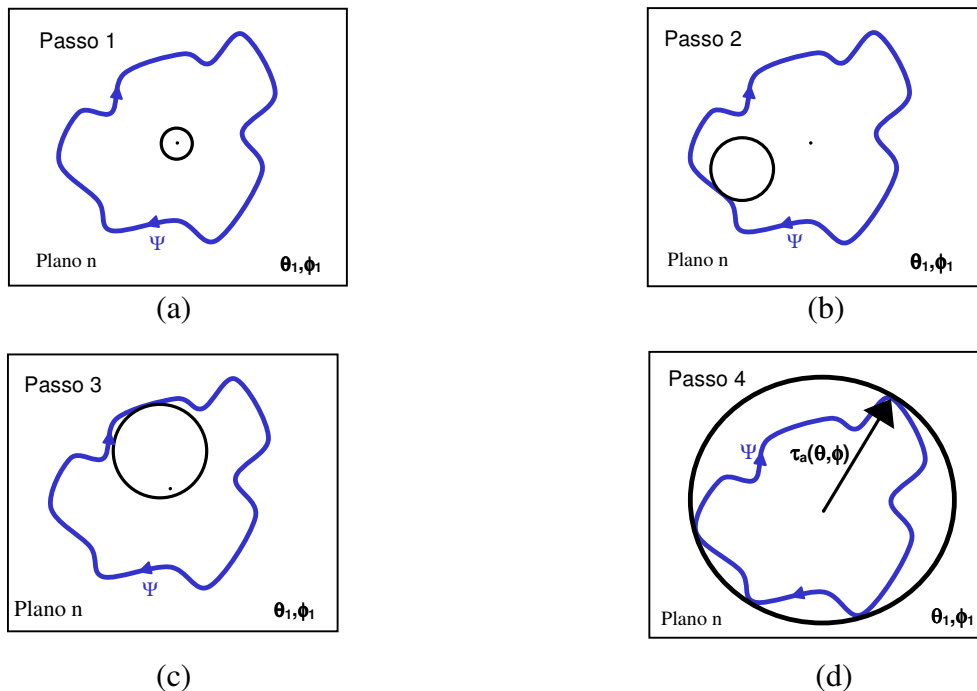


Figura 2: (a) circunferência de raio muito pequeno e centro coincidente com o centro da história de carregamento  $\psi$ . (b) e (c) Dois passos de incremento no raio da circunferência e deslocamento de centro da mesma. (d) Menor circunferência contendo a trajetória de carregamento  $\psi$  em um plano material qualquer.

O processo é repetido em diversos planos. O plano que contém a circunferência de maior raio será considerado o plano crítico e a amplitude de tensão cisalhante equivalente será então definida pelo raio dessa circunferência.

A menor circunferência que engloba a história de carregamento pode ser obtida por meio do algoritmo descrito abaixo (passos 1 a 4) e originalmente proposto por Dang Van *et al.* (1989).

1. Discretiza o ciclo de tensão em n pontos

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{S}(t_k), k = 1, \dots, n; \quad (3)$$

2. Estime um valor inicial para  $\boldsymbol{\rho}_0$ . Uma escolha natural é o centro do carregamento macroscópico.

$$\boldsymbol{\rho}_{k-1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{S}_k; \quad (4)$$

3. Estime um valor inicial (pequeno) para o raio da circunferência,  $R_0$ .

4. Para cada estado de Tensão  $\mathbf{S}_k$  execute os próximos passos sucessivamente até que a convergência seja atingida para todos os pontos, i:

- 4.1. Cálculo da distância entre o ponto  $\mathbf{S}_k$  e o centro atual da circunferência  $\boldsymbol{\rho}_{k-1}$ :

$$D_k = \sqrt{J_2(\mathbf{S}_k - \boldsymbol{\rho}_{k-1})} \quad (5)$$

- 4.2. Cálculo da distância  $P_i$  ao ponto  $\mathbf{S}_k$  enquanto  $\mathbf{S}$  encontra-se fora da circunferência.

$$P_k = D_k - R_{k-1} \quad (6)$$

- 4.3. Se  $P_k \leq 0$  então o ponto encontra-se dentro da circunferência. Armazene o centro e o raio da circunferência:

$$\boldsymbol{\rho}_k = \boldsymbol{\rho}_{k-1} \quad (7)$$

$$R_k = R_{k-1} \quad (8)$$

- 4.4. Se  $P_k > 0$  incremente o raio da circunferência e translate-a para que o ponto de carregamento fique na linha da circunferência ampliada.

$$R_k = R_{k-1} + \chi P_k \quad (9)$$

$$\boldsymbol{\rho}_k = \boldsymbol{\rho}_{k-1} + \left( D_k - R_k \right) \frac{\mathbf{S}_k - \boldsymbol{\rho}_{k-1}}{D_k} \quad (10)$$

Onde  $\chi$  é um número pequeno (0,05).

#### 4. ALGORITMO GENÉTICO

Os algoritmos genéticos são baseados na teoria da evolução das espécies desenvolvida por Charles Darwin e foram propostos inicialmente por Jonh Holland. Estes algoritmos estão fundamentados em conceitos da evolução biológica, tais como, genes, genoma, cromossomos, cruzamento, mutação e seleção e são utilizados na otimização de problemas matemáticos.

A implementação de um algoritmo genético (AG) começa com uma população aleatória de indivíduos. Esta população é então avaliada através da função que se deseja maximizar (ou minimizar) para gerar oportunidades reprodutivas aos indivíduos mais “aptos”.

A cada iteração do algoritmo genético aplicam-se algumas operações básicas: cálculo do fitness (aptidão), seleção, codificação, cruzamento, mutação, decodificação. Ao final desse procedimento uma nova geração de indivíduos é criada e ela representa estatisticamente uma melhor aproximação da solução do problema de otimização que a população anterior.

A forma mais usual de codificação é a representação binária. Assim, todos os operadores genéticos atuam no conjunto de parâmetros codificados, enquanto os valores reais desses parâmetros são utilizados somente para a obtenção do fitness de cada indivíduo. O algoritmo genético utiliza a função fitness para fazer a seleção dos indivíduos que sofrerão o cruzamento (crossover). As equações que governam esse problema para análise em fadiga são senoidais e as tensões normal e cisalhante em cada instante de tempo  $t$  são descritas pelas equações 11 e 12. Estas equações descrevem a trajetória de carregamento em um plano definido pelo vetor unitário normal  $\mathbf{n}$ . Para percorrer os diversos planos o AG trata o conjunto dos ângulos  $\theta$  e  $\phi$  como os indivíduos e o intervalo de busca fica entre  $0^\circ < \theta$  e  $\phi < 180^\circ$ .

$$\tau(t) = \tau_a \cdot \sin(\varpi \cdot t + \gamma) + \tau_m \quad (11)$$

$$\sigma(t) = \sigma_a \cdot \sin(\varpi \cdot t) + \sigma_m \quad (12)$$

$\tau(t)$  = tensão cisalhante ao longo do tempo

$\sigma(t)$  = tensão normal ao longo do tempo

$\varpi$  = período

$\tau_m$  = tensão cisalhante média

$\sigma_m$  = tensão normal média

$\gamma$  = ângulo de fase

$t$  = instante de tempo

A população inicial é escolhida de forma aleatória e o número de indivíduos que irão representar as gerações fica a critério do usuário. A figura 3, conhecida como método da roleta, é construída a partir da equação 13 e representa um dos muitos métodos para a escolha dos indivíduos que sofrerão a troca de informação genética. Assim, se uma população de 6 indivíduos for gerada ao acaso e avaliada junto ao método da roleta para que seja realizada a troca de genes tem-se:

$$\text{probabilidade do individuo ser selecionado para o cruzamento} = \frac{f}{\sum f} \quad (13)$$

$f$  = fitness de cada indivíduo

$\sum f$  = somatório dos fitness da população

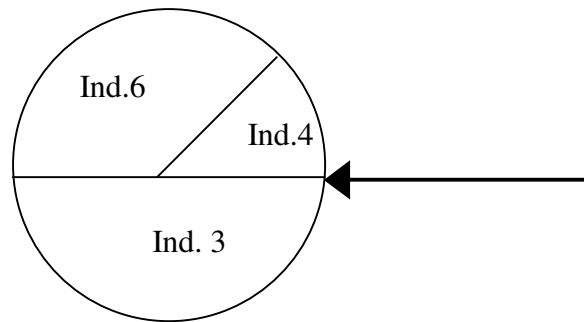


Figura 3: método de seleção da roleta

|             |                                             |             |
|-------------|---------------------------------------------|-------------|
| Indivíduo 1 |                                             | Indivíduo 3 |
| Indivíduo 2 |                                             | Indivíduo 3 |
| Indivíduo 3 | Indivíduos selecionados para o cruzamento → | Indivíduo 3 |
| Indivíduo 4 |                                             | Indivíduo 4 |
| Indivíduo 5 |                                             | Indivíduo 6 |
| Indivíduo 6 |                                             | Indivíduo 6 |

Inicialmente é necessário codificar números reais em uma escala natural de acordo com a equação 14. Após a seleção dos indivíduos e a troca de escala, é necessário codificá-los para a representação binária para que possa haver a manipulação de informação genética pelo algoritmo de cruzamento.

$$x_{natural} = \frac{x_{real} - x_{min}}{x_{máx} - x_{min}} (2^l - 1) \quad (14)$$

$x_{real}$  = número real a ser transformado para a escala natural

$x_{natural}$  = número na escala natural

$x_{min}$  = valor mínimo na escala real

$x_{máx}$  = valor máximo na escala real

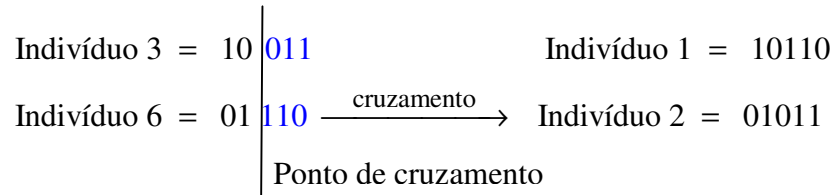
$l$  = número de bits dos indivíduos

O valor de  $l$  é determinado pelo usuário e quanto maior o seu valor maior será a precisão, porém ocorre um significativo aumento no custo computacional.

|             |                     |
|-------------|---------------------|
| Indivíduo 3 | Indivíduo 3 = 10011 |
| Indivíduo 3 | Indivíduo 3 = 10011 |
| Indivíduo 3 | Indivíduo 3 = 10011 |
| Indivíduo 4 | Indivíduo 4 = 01010 |
| Indivíduo 6 | Indivíduo 6 = 01110 |
| Indivíduo 6 | Indivíduo 6 = 01110 |

Uma forma de realizar o cruzamento é escolher aleatoriamente pontos de cruzamento e copiar tudo o que vem antes desse ponto de um dos indivíduos e então copiar tudo o que vem depois desse

ponto de outro indivíduo, dessa maneira dois novos cromossomos são gerados permutando-se a metade inicial de um cromossomo com a metade final do outro. A escolha dos indivíduos já codificados para a realização do cruzamento também se dá de forma aleatória.



Após a realização de 3 cruzamentos, outros novos 6 indivíduos são formados, gerando uma nova população.

Embora o cruzamento promova a troca de informação genética entre os indivíduos da população atual, ele não permite variação da informação contida na população no decorrer das gerações. Essa função é desempenhada pelo operador mutação que aleatoriamente introduz nova informação no decorrer das gerações. Na prática, a informação é introduzida simplesmente trocando um número na cadeia de bits pelo outro e isso é feito de acordo com uma probabilidade de mutação pré-estabelecida pelo usuário. A mutação tem a finalidade de evitar que a solução do problema, representada por um indivíduo da população, fique parada em um ótimo local.

Ao final da mutação, a nova população gerada é decodificada e transformada novamente na escala dos reais (equação 14) para que os novos indivíduos sejam avaliados através do método da roleta. A avaliação da aptidão e a criação de novas gerações são repetidas até que uma solução adequada seja encontrada ou até o número máximo das gerações for alcançado (Goldberg, 1989).

Os Algoritmos Genéticos possuem diversas aplicações principalmente pelas suas vantagens comparados a outros métodos de otimização. Dentre essas, podemos destacar que esse método não requer nenhuma informação adicional, como derivadas, sobre a função a ser otimizada. Além disso, os AGs trabalham com um conjunto de indivíduos e não com um único ponto, podendo assim, fazer buscas em diferentes áreas do espaço de solução paralelamente.

## 5. RESULTADOS

Para avaliar os resultados obtidos com o uso do processo de otimização baseado em algoritmos genéticos para o cálculo da resistência em fadiga consideraram-se vinte e dois diferentes testes disponíveis na literatura, sendo doze casos para a liga 34Cr4 e dez para o aço duro com 0,51%C onde as condições do carregamento foram descritas por Zenner *et al.* (1985) e Nishihara e Kawamoto(1941) respectivamente. Os dois materiais foram ensaiados sob condições de flexão e torção síncronas, em fase ou fora-de-fase, com ou sem a presença de tensões médias. As figuras 4 e 5 descrevem através das barras a amplitude da tensão cisalhante calculada por dois meios diferentes de busca através dos diversos planos materiais, quais sejam: (i) busca pelo plano crítico em passos, incrementando os ângulos de  $\Delta\phi = \Delta\theta = 1^\circ$  e (ii) considerando o algoritmo genético. No mesmo gráfico os símbolos triangulares estão associados com o tempo de simulação computacional para determinar  $\tau_a^{\max}$  através do método (i) enquanto os pontos representam o custo computacional para (ii).

Para avaliar os modelos, foi convencionado um índice de resistência à fadiga que mede o quanto a situação de carregamento imposta nos testes está distante da condição de falha (limite de fadiga), que é calibrada pelos parâmetros  $\lambda$  e  $m_1$  que são relações materiais. Assim, o índice de Susmel e Lazzarin (2002) foi definido como demonstrado na equação 15.

$$SU = \left( \frac{\tau_a^{max} + m_1 \cdot \frac{\sigma_{n,max}}{\tau_a^{max}} - \lambda}{\lambda} \right) \cdot 100 \quad (15)$$

Desta forma, para um teste no limiar da falha como os considerados nesse trabalho, uma estimativa que forneça  $SU < 0$ , seria não conservativa, pois o modelo indica que ainda é possível aumentar a solicitação enquanto os testes indicam uma condição limite. Se  $SU = 0$ , o estado de tensão indicaria uma condição equivalente ao limite de fadiga. Se  $SU > 0$ , o modelo indicaria que o componente já falhou (iniciação da trinca), fazendo, portanto, uma previsão conservativa.

Observando a equação 15 nota-se que o índice de Susmel e Lazzarin se aproxima muito para os métodos (i) e (ii), já que  $\lambda$  e  $m_1$  são constantes que dependem apenas dos limites de torção e flexão do material analisado e as tensões cisalhantes encontradas pelos dois métodos são praticamente idênticas, como visto nas figuras 4 e 5.

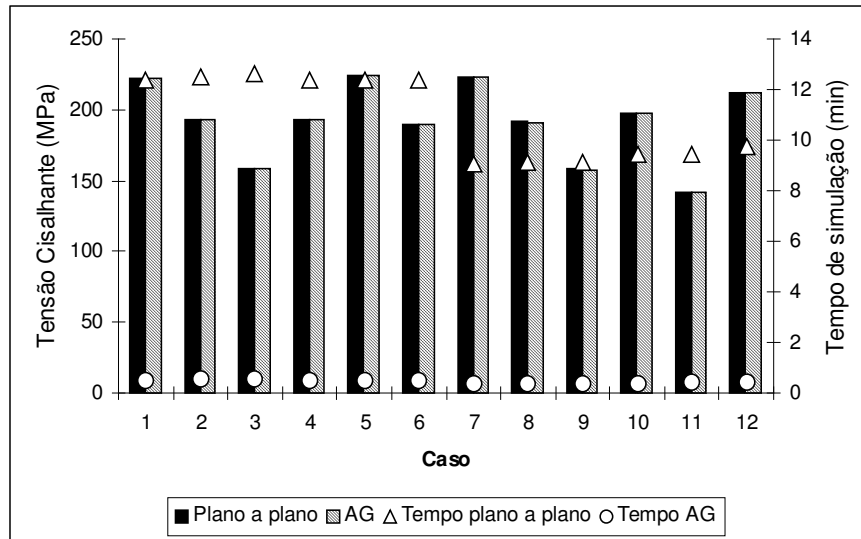


Figura 4: amplitude da tensão cisalhante e custo computacional através dos processos de busca plano a plano e algoritmo genético para a liga 34Cr4

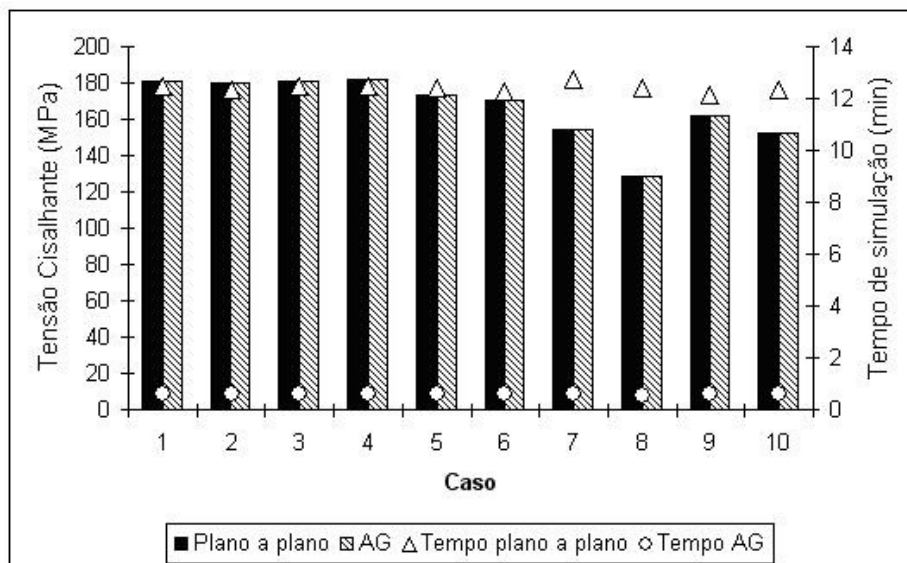


Figura 5: amplitude da tensão cisalhante e custo computacional através dos processos de busca plano a plano e algoritmo genético para o aço duro com 0,51% C

## 6. CONCLUSÃO

Um procedimento de otimização baseado no algoritmo genético foi proposto para calcular a amplitude de tensão cisalhante em fadiga multiaxial. Nota-se que o algoritmo genético representa um método eficiente de obtenção de máximos ou mínimos sem que para isso seja necessário conhecer informações como derivadas na função. Para este modelo de análise de fadiga, o AG mostrou-se uma excelente alternativa na redução do tempo computacional e com ótima qualidade nos resultados encontrados para a amplitude de tensão cisalhante. Com isso, o algoritmo genético demonstra ser uma ferramenta poderosa para análises de fadiga em corpos submetidos a carregamentos mais complexos ou estudos de diversos pontos materiais em um mesmo elemento mecânico.

## 7. REFERÊNCIAS

Dang Van, K., Griveau, B., Message, O., 1989, “On a New Multiaxial Fatigue Limit Criterion: Theory and Application, Biaxial and Multiaxial Fatigue”, EGF 3 (Edited by M. W. Brown and K. J. Miller), Mechanical Engineering Publications, London.

Dowling, Norman E., 1998, “Mechanical behavior of materials: engineering methods for deformation, fracture, and fatigue”, Prentice Hall, USA.

Goldberg D.E., 1989, “Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning”, Addison Wesley, Reading.

Nishihara T, & Kawamoto M., 1941, “The strength of metals under combined alternating bending and torsion”, Memoirs of the College of Engineering, Kyoto Imperial University.

Reis L., Li B. & Freitas M. de, 2006, “Analytical and experimental studies on fatigue crack path under complex multi-axial loading”, Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures.

Susmel, L., Lazzarin, P., 2002, “A bi-parametric Wöhler curve for high cycle multiaxial fatigue assessment”. Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures.

Zenner, H., Heidenreich, R. and Richter, I. Z, 1985, “Werkstofftech”.

## THE USE OF GENETIC ALGORITHM TO OPTIMIZE MULTIAXIAL FATIGUE MODELS

**Tarsilo Bezerra Inácio**

Universidade de Brasília – Departamento de Engenharia Mecânica - Brasília / DF

[tarsilo\\_bezerra@yahoo.com.br](mailto:tarsilo_bezerra@yahoo.com.br)

**Daniel Gerbis de Aguiar**

Universidade de Brasília

[dani.a@terra.com.br](mailto:dani.a@terra.com.br)

**José Alexander Araújo**

Universidade de Brasília

[alex07@unb.br](mailto:alex07@unb.br)

**Tito Dias Jr.**

Universidade de Brasília

[titodiasjr@unb.br](mailto:titodiasjr@unb.br)

**Abstract:** *This work has as objective the development of an optimized numerical tool for evaluation of the resistance in fatigue of submitted components the complex states of stress. It was executed evaluation of the loading in fatigue for the multiaxial Wöhler Modified Curves model, which was developed by way of a physical interpretation of the fatigue process where cracks had been observed to beginning and spread in preferential plans. In this context, shear stress amplitude and normal stress associates to a plan are determined and a combination of these stresses is used to foresee the most loaded plan, or “critical plan”. Therefore the tool has the capacity to determine the biggest shear stress amplitude and normal stress and, based on the Wöhler modified curves model, evaluate the resistance in fatigue of several analyzed experiments. With the purpose to optimize the process of search of the “critical plan” through the several material plans the genetic algorithm was used that is based on evolutions concepts. This algorithm has the capacity to foresee the critical plan without need determine equivalent shear stress amplitude in “all” the material plans. The use of the genetic algorithm was important for the reduction of the computational cost in the determination in plan that suffers most severe loads, moreover, the results founded for estimate the resistance in fatigue had been next to the experimental data collected in literature.*

**Keywords:** *Genetic algorithm, shear stress amplitude, critical plane, multiaxial fatigue.*