

UMA ANÁLISE DO MODELO DO ELIPSÓIDE SIMPLIFICADO PARA DETERMINAÇÃO DA RESISTÊNCIA À FADIGA EM CONDIÇÕES DE CARREGAMENTO BIAxIAL/TRIAXIAL E FORA DE FASE.

Lucival Malcher

Universidade de Brasília
Departamento de Engenharia Mecânica, Brasília - DF
malcher@unb.br

José Carlos Balthazar

jcbalthazar@unb.br

Resumo: Neste trabalho, objetivou-se efetuar uma análise quantitativa do modelo do elipsóide circunscrito simplificado, proposto por Balthazar e Malcher, para determinação da amplitude da tensão cisalhante equivalente e, por conseguinte, da resistência à fadiga multiaxial, sob condições de carregamento biaxial/triaxial, com amplitude constante e fora de fase. Para isto, fez-se uma breve exposição do modelo mencionado, que é uma evolução do modelo de Duprat (1997) e uma simplificação do modelo de Bin Li et al (2000) e é baseado na abordagem do invariante do tensor. Ao final, foram escolhidos oito pontos experimentais disponíveis na literatura para a liga 25CrMo4 e os resultados encontrados com a nova proposição, foram comparados com os modelos de Bin Li et al, Papadopoulos et al e Mamiya e Araújo.

Palavras-chave: resistência à fadiga, carregamento biaxial/triaxial, invariante do tensor, carregamento fora de fase, modelo do elipsóide circunscrito simplificado.

1. INTRODUÇÃO

Muitos componentes de estruturas mecânicas estão freqüentemente sujeitos a carregamentos variáveis, que podem causar falhas por fadiga. Componentes aeronáuticos são os exemplos mais comuns e estão usualmente operando sob carregamentos combinados, que podem estar fora de fase e sendo aplicados em diferentes freqüências, gerando complexos carregamentos triaxiais.

Estudos sobre fadiga multiaxial com carregamento em fase e fora de fase são desenvolvidos e diferentes abordagens são propostas na tentativa de se descrever da melhor forma, o comportamento do material ou estrutura sujeita a carregamentos multiaxiais. O Método da Tensão Equivalente, o Método do Plano Crítico, o Método da Energia e do Trabalho Plástico e O Método do Invariante do Tensor são algumas das abordagens mais conhecidas na literatura. O Método da Tensão Equivalente consiste na transformação das tensões multiaxiais com amplitude constante em uma amplitude de tensão uniaxial equivalente, na qual se considera que irá produzir a mesma vida à fadiga que as tensões multiaxiais combinadas. Dentro deste método foram propostos alguns critérios para se prever a resistência à fadiga, como o critério da máxima tensão cisalhante octaédrica e o critério de Sines (1955). Uma segunda abordagem é conhecida como o Método do Plano Crítico e é baseado na determinação de planos críticos, nos quais as tensões ou deformações cisalhantes e normais governam o processo de nucleação e crescimento das trincas de fadiga. Alguns modelos foram desenvolvidos dentro desta abordagem, como o de Brown e Miller (1973), o modelo de Fatemi e Socie (1988), o modelo de Socie (1987) e o modelo de McDiarmid (1991). Uma terceira abordagem é o Método da Energia e do Trabalho Plástico que consiste em computar o trabalho plástico realizado em cada ciclo de carregamento e relacioná-lo a vida à fadiga. O modelo de Garud (1979) é o mais conhecido entre os critérios propostos dentro deste método.

O Método do Invariante do Tensor utiliza como parâmetros determinadores da resistência à fadiga multiaxial a tensão hidrostática e a amplitude da tensão cisalhante equivalente. Este método é uma combinação do método do plano crítico, pois procura determinar dentro de um plano desviatório os valores máximos de seus parâmetros, e o método da tensão equivalente, pois faz uso de uma tensão cisalhante equivalente às tensões multiaxiais aplicadas. Inúmeros modelos com base neste método são mostrados na literatura, como Crossland (1956), Sines (1955) e o Kakuno-Kawada (1979).

Para Papadopoulos (1992), estes modelos dão boas estimativas para os casos de carregamentos em fase. Contudo, eles não são precisos quando utilizados para carregamentos fora de fase. Assim, verificou-se que nos últimos 15 anos, estudos mais aprofundados foram desenvolvidos para se estabelecer os efeitos do carregamento fora de fase nas propriedades à fadiga em materiais e componentes mecânicos. Desta forma, pesquisadores como Dang Van et al (1973), Deperrois (1991), Duprat et al (1997), Bin Li et al (2000), Mamiya e Araújo (2002), Balthazar e Malcher (2006) vêm procurando estabelecer a influência do ângulo de fase na vida à fadiga multiaxial. Estes modelos se diferenciam pela abordagem dada na determinação da amplitude da tensão cisalhante equivalente. Segundo Papadopoulos (1993), diferentes ângulos de fase entre as tensões aplicadas em um componente, causam uma redução na resistência à fadiga.

A seguir, faz-se uma breve revisão sobre o critério do invariante do tensor, bem como o modelo proposto por Balthazar e Malcher (2006) que procura determinar de maneira simplificada, a amplitude da tensão cisalhante equivalente. Esta modelagem é testada para históricos biaxiais/triaxiais de carregamentos e comparada às outras abordagens propostas na literatura.

2. DETERMINAÇÃO DA RESISTÊNCIA À FADIGA

O critério baseado no invariante do tensor utiliza a tensão hidrostática e a amplitude da tensão cisalhante equivalente como parâmetros para determinação da vida à fadiga multiaxial de materiais e componente mecânicos. É necessário calcular os valores de $\sqrt{J_{2,a}}$ e σ_H para se aplicar modelos como o de Crossland (1956), Sines (1955) e Kakuno-Kawada (1979). A diferença entre tais modelos está na utilização do valor médio ou máximo da tensão hidrostática e na abordagem utilizada para determinação da amplitude da tensão cisalhante equivalente.

Quando o carregamento aplicado é ciclo uniaxial ou ciclo, multiaxial e em fase, o valor da amplitude da tensão cisalhante é de fácil obtenção, e assim pode ser determinada através da raiz quadrada do segundo invariante do tensor desviatório. A Equação 1 mostra o valor da tensão cisalhante equivalente para o caso multiaxial e em fase.

$$\sqrt{J_{2,a}} = \sqrt{\frac{1}{6} \left\{ (\sigma_{xx,a} - \sigma_{yy,a})^2 + (\sigma_{yy,a} - \sigma_{zz,a})^2 + (\sigma_{zz,a} - \sigma_{xx,a})^2 + 6(\tau_{xy,a}^2 + \tau_{yz,a}^2 + \tau_{xz,a}^2) \right\}} \quad (1)$$

Porém, quando o carregamento aplicado é ciclo, multiaxial e fora de fase, à determinação de $\sqrt{J_{2,a}}$ não é simples e há a necessidade de se executar inúmeros cálculos matemáticos. O vetor que representa a amplitude da tensão cisalhante equivalente varia tanto em direção como em magnitude ao longo do tempo. Na Figura 1, pode-se verificar como a amplitude da tensão cisalhante se comporta em um carregamento proporcional e não proporcional.

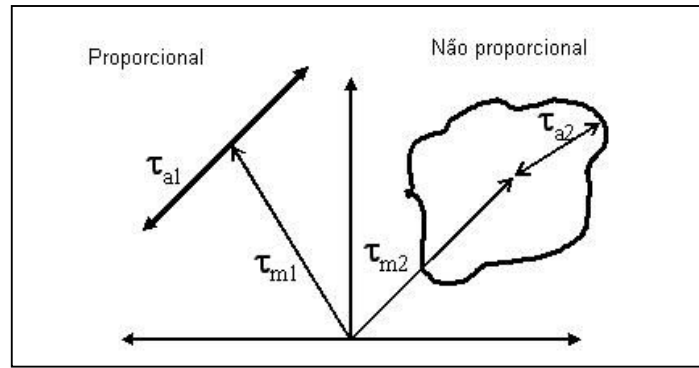


Figura 1: Comportamento da amplitude da tensão cisalhante em um carregamento proporcional e não proporcional.

Pesquisadores como Dang Van et al (1973), Deperrois (1991), Duprat et al (1997), Bin Li et al (2000), Mamiya e Araújo (2002), Balthazar e Malcher (2006) propuseram diferentes abordagens para determinação da amplitude da tensão cisalhante equivalente, na tentativa de se contemplar a influência do ângulo de fase nas propriedades à fadiga. Entre as abordagens mais conhecidas, tem-se: método da maior projeção descrita pela trajetória do tensor desviatório, método da maior corda, método da menor hiper-esfera que contem a projeção do tensor desviatório proposto por Dang Van et al (1973), método da menor elipsóide circunscrita proposto por Bin Li et al (2000), método do prisma retangular proposto por Mamiya e Araújo (2002), são alguns dos mais conhecidos e utilizados. Balthazar e Malcher (2006) propuseram uma simplificação do Modelo do Elipsóide Circunscrito que resultou na combinação do modelo proposto por Duprat et al (1997) e o modelo de Bin Li et al (2000).

2.1 O Modelo do Elipsóide Circunscrito Simplificado

O critério de Bin Li et al (2000) apresenta bons resultados para determinação da resistência à fadiga multiaxial, quando comparado a resultados experimentais e as outras abordagens existentes na literatura. O mesmo propõe a determinação da menor elipsóide que circunscribe a trajetória descrita pelo tensor desviatório. A grande dificuldade de se utilizar tal proposição, está na determinação do centro da elipse e, por conseguinte, na determinação do seu maior e menor raio, ver Figura 2(a). Já Duprat (1997) determina a amplitude da tensão cisalhante equivalente, a partir da maior e menor corda obtida através da intersecção da trajetória do tensor desviatório, sem se preocupar em determinar o centro geométrico do mesmo, como mostrado na Figura 2(b).

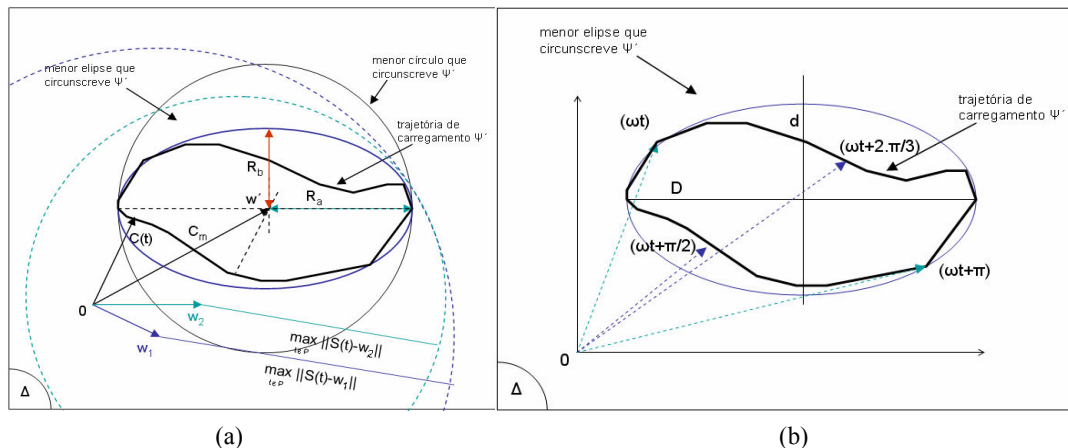


Figura 2: Determinação da menor elipse circunscrita. 2(a) segundo a abordagem de Bin Li et al (2000) e 2(b) segundo a abordagem de Duprat (1997).

Após a determinação do maior e menor raio da elipse, o valor de $\sqrt{J_{2a}}$ é obtido através da Equação 2 e Equação 3, segundo Duprat e através da Equação 4, segundo Bin Li et al. Segundo Malcher (2006) os resultados de Duprat (1997) apresentam grandes dispersões quando se aumenta a defasagem entre as cargas aplicadas. Já Bin Li et al (2000) apresenta resultados mais consistentes.

$$\frac{Pe}{2} \approx \frac{\pi}{2} \cdot \frac{D+d}{2} \left[1 + \frac{1}{4} \lambda^2 + \frac{1}{64} \lambda^4 + \frac{1}{256} \lambda^6 \right] \quad (2)$$

$$\sqrt{J_{2a}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Pe/2}{\sqrt{2}} \quad (3)$$

$$\sqrt{J_{2a}} = \sqrt{R_a^2 + R_b^2} \quad (4)$$

Assim sendo, uma possibilidade para redução dos erros no modelo de Duprat (1997) para ângulos de fase maiores e redução dos complexos cálculos matemáticos necessários para aplicação do critério de Bin Li et al (2000), está na determinação da menor elipse simplificada, proposta por Balthazar e Malcher (2006). O modelo se propõe a determinar a menor elipsóide que contem a trajetória formada pelo tensor desviatório através da obtenção do maior e menor raio segundo a proposta de Duprat (Equações 6 e 7) e determinação do perímetro da elipse ou da tensão cisalhante equivalente, segundo a proposta de Bin Li et al (Equação 5).

$$\frac{Pe}{2} = \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} \quad (5)$$

$$R_a = \frac{D}{2} = \frac{\max(t)\rho(\omega t)}{2} \quad (6)$$

$$R_b = \frac{d}{2} = \frac{\min(t)\rho(\omega t)}{2} \quad (7)$$

Onde:

$$\rho(\omega t) = \text{tr} \left[\left(\underline{\underline{S}}(t) - \underline{\underline{S}}(t + \pi) \right) \left(\underline{\underline{S}}(t) - \underline{\underline{S}}(t + \pi) \right)^T \right]^{1/2} \quad (8)$$

Substituindo as Equações 6 e 7 na Equação. 5 e determinando novamente o valor da tensão cisalhante equivalente, chega-se então na proposta de Balthazar e Malcher (2006).

$$\sqrt{J_{2a}} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{[\max(t)\rho(\omega t)]^2 + [\min(t)\rho(\omega t)]^2}}{\sqrt{2}} \quad (9)$$

Assim, reescrevendo o critério de Crossland (1956) de acordo com a nova abordagem para determinação da amplitude da tensão cisalhante equivalente, tem-se:

$$\frac{1}{2} \frac{\sqrt{[\max(t)\rho(\omega t)]^2 + [\min(t)\rho(\omega t)]^2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{S_{rt}} \cdot f_{-1} \cdot \sigma_{H, \max} \leq t_{-1} \quad (10)$$

Ou ainda, substituindo o valor $\sigma_{H\max}$, tem-se:

$$\frac{1}{2} \frac{\sqrt{[\max(t)\rho(\omega t)]^2 + [\min(t)\rho(\omega t)]^2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{S_{rt}} \cdot f_{-1} \cdot \frac{1}{3} \max(tr\sigma) \leq t_{-1} \quad (11)$$

Através da Equação 11, pode-se definir o lado esquerdo da mesma, como sendo a tensão equivalente. Assim, σ_{eq} pode ser escrita como:

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{[\max(t)\rho(\omega t)]^2 + [\min(t)\rho(\omega t)]^2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{S_{rt}} \cdot f_{-1} \cdot \frac{1}{3} \max(tr\sigma) \quad (12)$$

Pode-se definir também a razão de tensão, através da Equação 13, como sendo a divisão entre a tensão equivalente σ_{eq} e o limite de fadiga para um carregamento torcional alternado t_{-1} .

$$K = \left\langle \frac{\frac{1}{2} \frac{\sqrt{[\max(t)\rho(\omega t)]^2 + [\min(t)\rho(\omega t)]^2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{S_{rt}} \cdot f_{-1} \cdot \frac{1}{3} \max(tr\sigma)}{t_{-1}} \right\rangle \quad (13)$$

Representando o erro indexado ao modelo, em termos percentuais, tem-se:

$$I = \left\langle \frac{\frac{1}{2} \frac{\sqrt{[\max(t)\rho(\omega t)]^2 + [\min(t)\rho(\omega t)]^2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{S_{rt}} \cdot f_{-1} \cdot \frac{1}{3} \max(tr\sigma)}{t_{-1}} - 1 \right\rangle \cdot 100\% \quad (14)$$

3. RESULTADOS ENCONTRADOS

Foram analisados oito pontos experimentais disponíveis na literatura para a liga aeronáutica 25CrMo4 ($f_{-1}=361$ MPa e $t_{-1}=228$ MPa). Os quatro primeiros históricos são equivalentes a carregamentos biaxiais fora de fase e os quatro últimos históricos são equivalentes a carregamentos triaxiais fora de fase. Através da Tabela 1, observam-se os resultados encontrados para o modelo de Balthazar e Malcher (2006).

Tabela 1: Resultados encontrados para o modelo de Balthazar e Malcher, liga 25CrMo4.

ID	σ_{xa} [MPa]	σ_{xm} [MPa]	σ_{ya} [MPa]	σ_{ym} [MPa]	β°	τ_a [MPa]	γ°	$\sqrt{J_2}$ [MPa]	σ_{Hm} [MPa]	σ_{Ha} [MPa]	σ_{eq} [MPa]	K	I%
1	261	340	261	170	0	0	0	150,69	170	174,00	206,65	0,91	-9,36%
2	275	340	275	170	60	0	0	194,45	170	158,77	247,94	1,09	8,75%
3	240	340	240	170	90	0	0	195,96	170	113,14	242,02	1,06	6,15%
4	196	340	196	170	180	0	0	196,00	170	-	223,66	0,98	-1,90%
5	220	340	0	170	0	110	60	168,03	170	73,33	207,61	0,91	-8,94%
6	233	340	0	170	0	117	90	178,28	170	77,67	218,58	0,96	-4,13%
7	155	340	0	170	0	155	60	178,98	170	51,67	215,04	0,94	-5,68%
8	159	340	0	170	0	159	90	183,60	170	53,00	219,88	0,96	-3,56%

Na Figura 3 são mostrados os diagramas de fase para todos os oito históricos de carregamentos. Observa-se que quando o ângulo de fase é igual à zero, o diagrama é equivalente a uma linha reta, já quando há defasagem entre as cargas aplicadas, o diagrama se aproxima a forma de uma elipse.

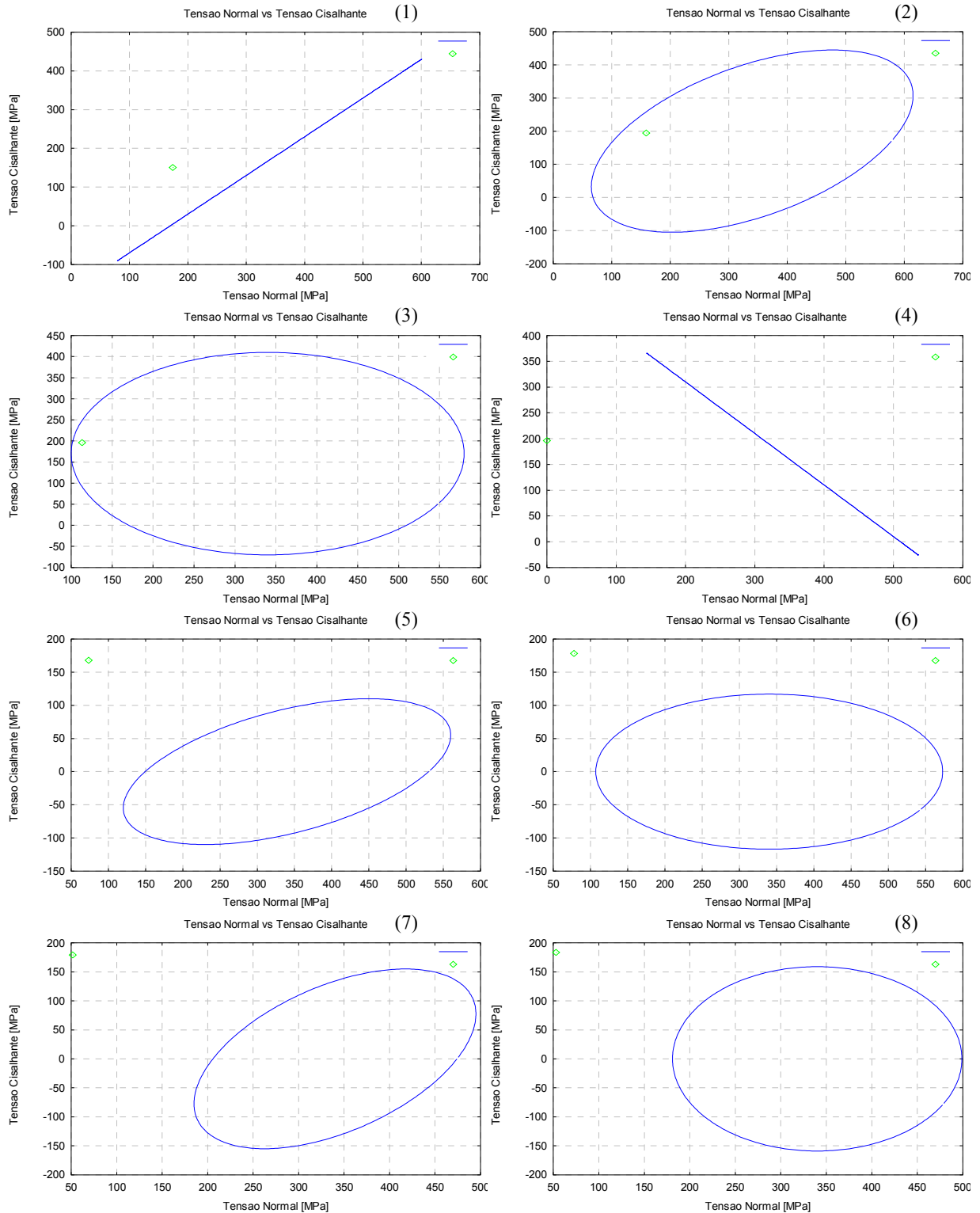


Figura 3: Diagrama de fase para os históricos de carregamentos de 1 até 8, presentes na tabela 1.

Através da Figura 4, pode-se observar o valor de K , obtido através do modelo do elipsóide circunscrito simplificado, proposto por Balthazar e Malcher, para os diferentes ângulos de fase β e γ .

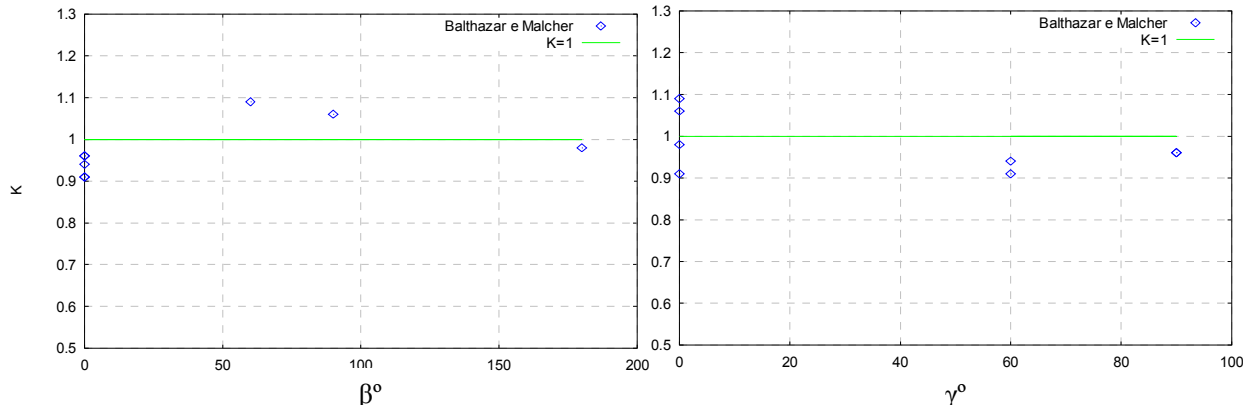


Figura 4: Razão de tensão K versus β e γ obtida para os diferentes pontos da tabela 1.

Fez-se uma análise comparativa dos resultados encontrados através do modelo de Balthazar e Malcher, com os resultados encontrados para Bin Li et al, Papadopoulos et al e Mamiya e Araújo. Através da Tabela 2, podem-se observar os resultados encontrados.

Tabela 2: Comparação entre os resultados encontrados para os modelos de Bin Li et al (1), Papadopoulos et al (2), Mamiya e Araújo (3) e Balthazar e Malcher (4).

ID	σ_{xa} [MPa]	σ_{xm} [MPa]	σ_{ya} [MPa]	σ_{ym} [MPa]	β°	τ_a [MPa]	γ°	I%(1)	I%(2)	I%(3)	I%(4)
1	261	340	261	170	0	0	0	-9,4%	-9,0%	-9,4%	-9,36%
2	275	340	275	170	60	0	0	8,7%	8,0%	8,5%	8,75%
3	240	340	240	170	90	0	0	6,1%	6,0%	6,0%	6,15%
4	196	340	196	170	180	0	0	-1,9%	-1,8%	-1,9%	-1,90%
5	220	340	0	170	0	110	60	-9,0%	-8,8%	-9,0%	-8,94%
6	233	340	0	170	0	117	90	-4,2%	-4,0%	-4,1%	-4,13%
7	155	340	0	170	0	155	60	-5,7%	-5,7%	-5,8%	-5,68%
8	159	340	0	170	0	159	90	-3,6%	-3,5%	-3,6%	-3,56%

Representando graficamente os erros percentuais (I%) encontrados para os diferentes modelos, ver Figura 5, observou-se que o modelo de Balthazar e Malcher apresenta uma baixa dispersão de valores e os erros indexados se mostraram inferiores a 10% e sempre na ordem de grandeza dos demais modelos existentes. A grande contribuição da nova abordagem está na simplificação da forma de obtenção dos raios da elipse e assim, na determinação da amplitude da tensão cisalhante equivalente. Desta forma, através da análise dos oito pontos experimentais, constatou-se que a resistência à fadiga ou limite de fadiga multiaxial pode ser estimado por intermédio do perímetro da menor elipse que contém a trajetória do vetor desviatório, calculado através do maior e menor segmento que corta a trajetória Ψ' .

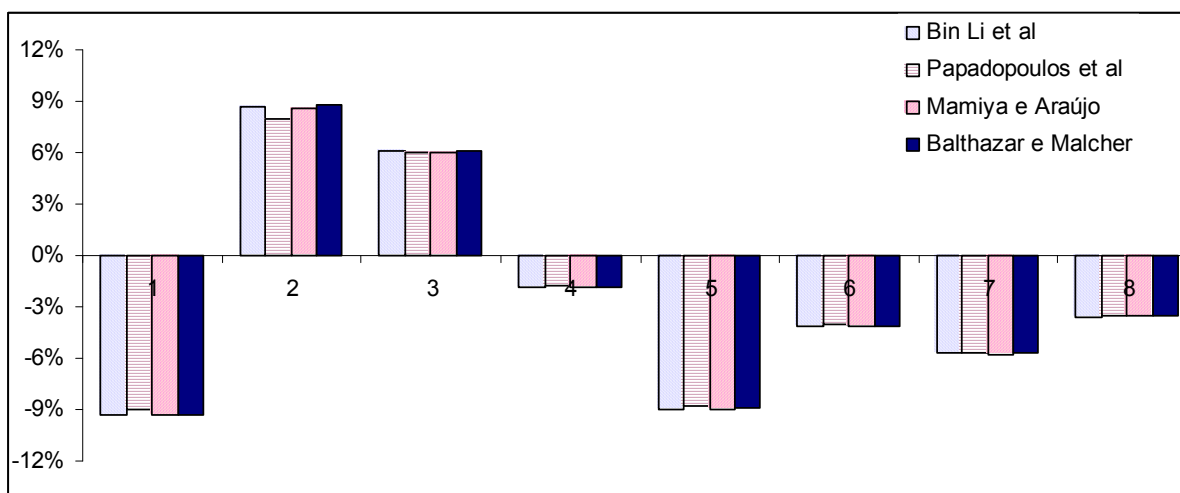


Figura 5: Erro percentual apresentado pelos diferentes modelos, para os oito pontos experimentais em análise.

4. CONCLUSÃO

Neste trabalho, buscou-se analisar quantitativamente o modelo do elipsóide circunscrito simplificado, proposto por Balthazar e Malcher (2006), para determinação da resistência à fadiga, para carregamentos biaxiais e triaxiais fora de fase. Verificou-se que o modelo apresenta resultados satisfatórios comparados aos outros modelos existentes na literatura. Uma vantagem na utilização do modelo proposto, está na rápida determinação dos parâmetros D e d, necessários para cálculo da amplitude da tensão cisalhante equivalente. Para os outros modelos existentes, há a necessidade de se executar complexos cálculos matemáticos, como por exemplo, no modelo de Bin Li et al (2000) quando se determina o centro do elipsóide.

5. REFERÊNCIAS

- SINES, G., (1955), Failure of Materials under Combined Repeated Stresses with Superimposed Static Stresses, NACA Technical Note 3495, Washington, USA.
- Crossland B., (1956). Effect of Large Hydrostatic Stress on the Torsional Fatigue Strength of an Alloy Steel, Proceedings of the International Conference on Fatigue of Metals, Institution of Mechanical Engineers, London.
- Sines G., (1959). Behaviour of metals under complex static and alternating stresses, Metal Fatigue, McGraw-Hill, New York, 145-169.
- Dang Van K., (1973). Sur la résistance à la fatigue des métaux. Sciences et techniques de l'aarmement, 47, 429-453.
- BROWN, M. W. and MILLER, K.J., (1973), A Theory for Fatigue Failure under Multiaxial Stress Strain Conditions, Proc. IMechE, Vol. 187, pp. 745 755.
- GARUD, Y. S., (1979), A New Approach to the Evaluation of Fatigue under Multiaxial Loading, proc. Symp. on Methods for Predicting Material Life in Fatigue, ASME, New York, pp. 247 264.
- Kakuno H., Kawada Y., (1979). Fatigue Engng Mater Tech, 115, 373.
- FATEMI, A., and SOCIE, D. F., (1988), A Critical Plane Approach to Multiaxial Fatigue Damage Including Out of Phase Loading, Fatigue & Fracture Engng. Mat. Struct., vol. 11, pp. 149 165.
- McDIARMID, D.L., (1991), A General Criterion for High Cycle Multiaxial Fatigue Failure, Fatigue & Fracture Engng. Mat. Struct., vol. 14, pp. 429 453.
- Deperrois, A., (1991) Sur le calcul de limites d'endurance des aciers, These de Doctorat, Escola Polytechnique, Paris.

- Papadopoulos, I. V., (1992) A review of multiaxial fatigue limit criteria . ECJRC, SMU, Ispra, (Va)
- Papadopoulos, I. V., (1993). A New Criterion of Fatigue Strength for Out-of-phase Bending and Torsion of Hard Metals. Institute for Systems Engineering and Informatics, Joint Research Center, Comission of The European Communities.
- Duprat, D., Boudet, R., Davy, A., (1997). A Simples Model to Predict Fatigue Strength with Out-of phase Tension-Bending and Torsion Stress Condition, Laboratoire de Génie Mécanique, Université Paul Sabatier – Fatigue and fracture mechanics department., Aérospatiale France.
- Bin Li, Santos, J.L.T., Freitas, M., (2000). A Unified Numerical Approach for Multiaxial Fatigue Limit Evaluation, Department of Mechanical Engineering – Instituto Superior Técnico, Lisboa – Portugal.
- Mamiya, E. N., Araujo, J. A., (2002). Fatigue Limit Under Multiaxial Loadings: On The Definition of The Equivalent Shear Stress. Mechanics Research Communications, V29, pp 141-151.
- Malcher, L., Balthazar, J.C., (2006). Uma Revisão Crítica sobre os Principais Critérios para Determinação da Resistência à Fadiga Multiaxial. Baseado na Abordagem do Invariante do Tensor. IV Congresso Nacional de Engenharia Mecânica – CONEM 2006.

6. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

AN ANALYSIS OF THE ELLIPSOID SIMPLIFIED MODEL FOR DETERMINATION OF THE FATIGUE STRENGTH IN BIAXIAL/TRIAXIAL LOADING AND OUT-OF-PHASE

Lucival Malcher

University of Brasilia
Department of Mechanical Engineering – Brasília - DF
malcher@unb.br

José Carlos Balthazar

University of Brasilia
Department of Mechanical Engineering – Brasília - DF
jcbalthazar@unb.br

Abstract: *In this work, it was objectified to effect a quantitative analysis of the ellipsoid simplified model, for determination of the multiaxial fatigue strength, considered by Balthazar and Malcher, under triaxial/biaxial loading conditions, with constant amplitude and out-of-phase. For this, one brief bibliographical revision became on the mentioned model, that is based on the stress invariant model. To the end, eight available experimental points in literature for the league had been chosen 25CrMo4 and the joined results had been compared with the models of Bin Li et al, Papadopoulos et al and Mamiya and Araujo.*

Keywords: *fatigue strength, biaxial/triaxial loading, stress invariant, out-of-phase loading, ellipsoid simplified model.*