



## SELEÇÃO DE GERADORES USANDO OTIMIZAÇÃO MULTI-OBJETIVO.

### Lidiane S. Oliveira

Faculdade de Engenharia Mecânica - Universidade Federal de Uberlândia  
Av. João Naves de Ávila, 2160, CEP: 38408-100  
Fax: (34) 3239-4126 - Uberlândia (MG) - Brasil  
[lsoliveira@mecanica.ufu.br](mailto:lsoliveira@mecanica.ufu.br)

### Sezimária F. P. Saramago

Faculdade de Matemática - Universidade Federal de Uberlândia  
[saramago@ufu.br](mailto:saramago@ufu.br)

**Resumo:** *Em problemas de otimização, existem várias situações nas quais o usuário necessita minimizar ou maximizar não apenas uma função objetivo, mas várias funções simultaneamente, que estão usualmente em conflito umas com as outras. Estas situações são formuladas como um problema de otimização multi-objetivo, também chamado de multi-critério, multi-performance ou otimização de um vetor de funções. Observa-se que problemas de otimização multi-objetivo surgem em diferentes aplicações científicas, sendo que várias pesquisas visam desenvolver métodos para solucioná-los. Existem vários critérios que podem ser considerados para resolver este complexo problema de otimização, este trabalho apresenta uma contribuição ao estudo e comparação de alguns destes métodos. Os métodos clássicos baseados em escalonar as funções, onde o vetor função objetivo é transformado em uma função escalar, são representados pelo método dos objetivos ponderados e o método do critério global. Uma abordagem diferente é dada no método hierárquico, da negociação e no método da programação de metas, que tratam as funções objetivo como restrições adicionais. As metodologias estudadas são aplicadas à solução de um problema em que consiste na seleção de geradores, de uma unidade de produção de energia.*

**Palavras-chave:** *otimização multi-critério, objetivos ponderados, hierárquico, negociação, critério global.*

## 1. INTRODUÇÃO

Um problema de otimização multi-objetivo é definido quando deseja-se minimizar ou maximizar várias funções objetivo simultaneamente, sendo que, em vários casos, uma função está em conflito com outra (Eschenauer et al, 1990). Nestes problemas, procura-se um vetor ótimo definido no espaço Euclidiano  $n$ -dimensional de variáveis de projeto  $E^n$ , que seja a melhor solução para um vetor formado por funções objetivo, definido no espaço Euclidiano  $k$ -dimensional de funções objetivo  $E^k$  (Osyszka, 1981). Este problema pode estar sujeito a restrições e todas as funções envolvidas podem ser não-lineares. Vários critérios estão disponíveis e podem ser considerados para resolver este complexo problema de otimização. Alguns métodos clássicos são baseados em escalonar as funções, sendo que o vetor função objetivo é transformado em uma função escalar, enquanto que outros métodos tratam as funções objetivo como restrições adicionais.

Problemas de otimização multi-objetivo surgem em diferentes aplicações científicas, sendo que várias pesquisas visam desenvolver métodos para solucioná-los. No artigo de Vankan e Maas (2002) é feita a modelagem e a otimização de projetos aeronáuticos através da utilização de funções multi-objetivo. Ambrósio (2002) utiliza programação multi-objetivo como um instrumento para

planejamento agro-ambiental. Saramago e Steffen (2002) apresentam o problema de otimização multi-objetivo que visa obter a trajetória ótima de um robô manipulador na presença de obstáculos móveis, minimizando o tempo total de percurso e a energia mecânica dos atuadores.

Este trabalho apresenta uma contribuição ao estudo de alguns métodos que podem ser aplicados na solução de problemas de otimização multi-objetivo. Para ilustrar as metodologias estudadas, apresenta-se a solução de um problema que consiste na seleção de geradores, de uma unidade de energia de forma a minimizar o custo do combustível e emissão dos poluentes na atmosfera, satisfazendo um conjunto de restrições.

## 2. ALGUNS MÉTODOS CLÁSSICOS DE OTIMIZAÇÃO MULTI-OBJETIVO

Seja um problema de otimização multi-objetivo para programação matemática formulado como:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar ou maximizar } f_i(x) = [f_1(x) \ f_2(x) \ \dots \ f_k(x)]^T \\ &\text{sujeita a: } \quad x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max}, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ &\quad \quad \quad g_\ell(x) \leq 0, \quad \ell = 1, 2, \dots, m \\ &\quad \quad \quad h_\pi(x) = 0, \quad \pi = 1, 2, \dots, p \end{aligned} \quad (1)$$

onde  $x_j$  é um vetor de variáveis de decisão,  $f_i(x)$  é um vetor da função objetivo,  $g_\ell(x)$ ,  $h_\pi(x)$  são restrições.

Seja uma solução chamada de “solução ideal”. Para determinar esta solução, deve-se encontrar, separadamente, o mínimo atingível para todas as funções objetivo. Assumindo que este mínimo pode ser encontrado, seja  $x^{o(i)} = [x_1^{o(i)} \ x_2^{o(i)} \ \dots \ x_n^{o(i)}]^T$  o vetor de variáveis que minimiza cada  $i$ -ésima função objetivo  $f_i(x)$  dado por:

$$f_i^o = f_i(x^{o(i)}) = \min f_i(x) \quad (2)$$

Usa-se  $f_i^o$  para denotar o valor mínimo de cada  $i$ -ésima função. O vetor  $f^o = [f_1^o \ f_2^o \ \dots \ f_k^o]^T$  é ideal para um problema de otimização multi-objetivo.

Pareto (1896) formulou o conceito de ótimo que continua sendo muito importante para a análise multi-objetivo. A maneira mais comum de definir este ótimo é dada por:

Um ponto  $x^* \in X$  é ótimo de Pareto se para todo  $x \in X$

$$f_i(x) \geq f_i(x^*) \text{ para todo } i \in I = [1, 2, \dots, k] \quad (3)$$

ou, existe pelo menos um  $i \in I$  tal que

$$f_i(x) > f_i(x^*) \text{ para no mínimo um } i \in I \quad (4)$$

Esta definição é baseada no conceito intuitivo de que o ponto  $x^*$  é escolhido como o ótimo se nenhum objetivo pode ser melhorado sem prejudicar pelo menos um outro objetivo. Infelizmente, o ótimo de Pareto quase sempre não dá uma única solução, mas, um conjunto de soluções chamadas de soluções não-inferiores ou soluções não-dominadas.

### 2.1 Método da Ponderação dos Objetivos (Weighting Objectives Method)

Neste método transforma-se o vetor de funções objetivo em uma função escalar. Minimizando esta função pode-se obter a solução ótima de Pareto ou um conjunto de tais soluções. No método da ponderação dos objetivos, os problemas de otimização multi-objetivo são substituídos por um problema de otimização escalar, por exemplo, através da criação de uma função da forma:

$$f(x) = \sum_{i=1}^k w_i f_i(x) c_i, \text{ onde } \sum_{i=1}^k w_i = 1 \text{ e } c_i \text{ são fatores de multiplicação.} \quad (5)$$

sendo  $w_i \geq 0$  os coeficientes de ponderação, que representam a importância relativa de cada critério. Para os métodos numéricos de procura do mínimo dado pela Eq.(5) para que  $w_i$  possa refletir bem a importância dos objetivos, todas as funções devem ser expressas em unidades que aproximem os mesmos valores numéricos (Deb, 2001). Os melhores resultados são usualmente obtidos se  $c_i = (1/f_i^o)$ , onde  $f_i^o$  representa a solução ideal para o problema.

## 2.2 Método de Otimização Hierárquico (Hierarchical Optimization Method)

Considere a situação em que o usuário deseje ordenar os objetivos em termos de importância. Seja a numeração de 1 a k que reflita esta ordem, no sentido que o primeiro objetivo é mais importante e o k-ésimo objetivo é menos importante (Osyczka, 1981). Conservando esta ordem, minimiza-se cada função objetivo separadamente, adicionando em cada passo uma nova restrição a qual limita o acréscimo ou o decréscimo assumido previamente ( $\xi_i$ ) para a função considerada. Este método pode ser descrito como:

- (1) Encontre o mínimo para o primeiro objetivo:  
obter  $x^{(1)} = [x_1^{(1)} x_2^{(1)} \dots x_n^{(1)}]^T$  tal que  $f_1(x^{(1)}) = \min f_1(x), x \in X$
- (2) Faça o passo 2 para  $i = 1, 2, \dots, k$ . Encontre o mínimo da i-ésima função objetivo:  
obter  $x^{(i)} = [x_1^{(i)} x_2^{(i)} \dots x_n^{(i)}]^T$  tal que  $f_i(x^{(i)}) = \min f_i(x), x \in X$   
com as restrições adicionais:

$$f_{j-1}(x) \leq \left(1 \pm \frac{\xi_{h_{j-1}}}{100}\right) f_{j-1}(x^{j-1}) \text{ para } j = 2, 3, \dots, i \quad (6)$$

sendo  $\xi_{h_{j-1}}$  são os coeficientes assumidos para os acréscimos ou decréscimos das funções dadas em porcentagem. O sinal '+' refere-se às funções que estão sendo minimizadas, ao passo que o sinal '-' refere-se às funções que estão sendo maximizadas. O ponto  $x^{(k)} = [x_1^{(k)} x_2^{(k)} \dots x_n^{(k)}]^T$  é o ótimo determinado para este método.

## 2.3 Método da Negociação (Trade-Off Method)

Classifica-se um método na categoria da negociação se o conceito de trocar um valor de uma função objetivo por um outro valor da função é usado para determinar o próximo passo na busca da solução. Em muitos casos o conceito acima é utilizado através da minimização de uma das funções objetivo considerando as outras como restrições flexíveis. Assim, este método é também chamado método restrito ou método  $\xi$ -restrito (Deb, 2001). Seja uma simples descrição deste método:

- 1) Encontre o mínimo da r-ésima função objetivo:  
obter  $x^*$  tal que  $f_r(x^*) = \min f_r(x), x \in X$  sujeita às restrições adicionais da forma

$$\text{Para funções de minimização } f_i(x) \leq \xi_{n_i}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, k \text{ e } i \neq r \quad (7)$$

$$\text{Para funções de maximização } f_i(x) \geq \xi_{n_i}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, k \text{ e } i \neq r \quad (8)$$

onde  $\xi_{n_i}$  são os valores adotados e não podem ser ultrapassados pelas funções objetivo.

- (2) Repita o processo (1) para diferentes valores de  $\xi_{n_i}$ . Uma boa escolha do conjunto  $\xi_{n_i}$  pode ser útil durante a decisão. A busca é interrompida quando se encontrar uma solução satisfatória.

Pode ser necessário repetir o procedimento acima para diferentes índices  $r$ . A escolha razoável de  $\xi_{n_i}$ , utilizando Tabela de Pagamento, é descrita por Oliveira (2005).

## 2.4 Método do Critério Global (Global Criterion Method)

Neste método uma solução ótima é um vetor de variáveis de decisão o qual minimiza algum critério global. A função a qual descreve este critério global deve ser definida de forma que obtenha uma solução mais próxima possível da solução ideal. A forma mais comum desta função é:

$$f(x) = \sum_{i=1}^k \left( \frac{f_i^o - f_i(x)}{f_i^o} \right)^s \quad (9)$$

Para esta equação Boychuk e Ovchimikov (1973) propuseram  $s = 1$  e Salukvadze (1974) propôs  $s = 2$ , mas outros valores para  $s$  podem também ser usados. Naturalmente, a solução obtida após a minimização da Eq.(9) diferirá grandemente de acordo com os valores escolhidos para  $s$ .

## 2.4 Método da Programação de Metas Ponderada (Goal Programming Method)

Este método requer que o pesquisador especifique metas para cada objetivo que deseja atingir. A idéia principal da programação de metas é encontrar soluções que atinge uma meta predefinida considerando uma ou mais funções objetivo. Se não existir a solução que atinja essas metas pré-especificadas em todas as funções objetivo, a tarefa é encontrar soluções que minimizam desvios para as metas. Por outro lado, se esta solução existir, a tarefa do método é identificar esta solução particular. Em certo sentido, esta tarefa é semelhante à tomada de decisão e a solução obtida é uma solução satisfatória, que pode ser diferente da solução ótima.

As metas, isto é, seus valores quantitativos, são considerados como restrições adicionais. Assim, novas variáveis são acrescentadas para representar os desvios em relação às metas pré-determinadas. Na programação de metas, um valor alvo  $t$  é escolhido para cada uma das funções objetivo pelo usuário, e a tarefa é então encontrar uma solução que tem um valor objetivo igual a  $t$ , sujeito a condição que a solução encontrada seja viável ( $x \in S$ ). Seja a formulação do problema de otimização:

$$\text{Meta } (f_i(x) = t_i), i = 1, k; x \in S, \text{ onde } S \text{ é a região viável.} \quad (10)$$

Na Eq.(10) as metas foram escritas iguais a  $t_i$  ( $f_i(x) = t_i$ ). Mas, as metas podem ser de quatro tipos diferentes: menor ou igual a função ( $f(x) \geq t$ ), maior ou igual a função ( $f(x) \leq t$ ), igual a função ( $f(x) = t$ ) e dentro de uma certa faixa ( $f(x) \in [t', t'']$ ). De forma a permitir a obtenção das metas acima, duas variáveis não-negativas denominadas desvios ( $n$  e  $p$ ) são usualmente introduzidas. Assim, para resolver o problema de programação de metas, cada meta é convertida em ao menos uma restrição de igualdade, e o objetivo é minimizar todos os desvios  $p$  e  $n$ . No caso do método de programação de metas ponderada, considera-se uma nova uma função objetivo escrita como:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Minimize } \sum_{j=1}^k (w_j p_j + \beta_j n_j) \\ \text{sujeito a : } f_j(x) - p_j + n_j = t_j \quad j = 1, 2, \dots, k \\ x \in S \\ n_j, p_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, k \end{array} \right\} \quad (11)$$

Aqui, os parâmetros  $w_j$  e  $\beta_j$  são fatores de ponderação para minimizar os desvios do  $j$ -ésimo objetivo em relação a  $j$ -ésima meta. Para a função menor ou igual a  $t$  ( $f(x) \leq t$ ), o parâmetro  $\beta_j$  é zero ( $n_j = 0$ ). Analogamente, para a função maior ou igual a  $t$  ( $f(x) \geq t$ ), o parâmetro  $w_j$  é zero ( $p_j = 0$ ). Para o intervalo de  $t$  ( $f(x) \in [t^l, t^u]$ ), existe um par de restrições para cada função objetivo. Usualmente, os fatores de ponderação  $w_j$  e  $\beta_j$  são valores fixados pelo pesquisador.

Assim, observa-se que a solução do problema de programação de metas ponderada depende largamente da escolha dos fatores de ponderação e que possui dificuldades análogas às aquelas encontradas no método de ponderação estudado anteriormente.

### 3. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS – RESULTADOS E DISCUSSÃO

Considere agora o problema de despacho econômico e ambiental, que consiste na seleção de geradores, de uma unidade de produção de energia de forma a minimizar o custo do combustível e emissão dos poluentes na atmosfera, satisfazendo um conjunto de restrições. Dessa forma, o problema do despacho econômico e ambiental é transformado em um problema de otimização multi-objetivo restrito e não-linear. Geralmente, o problema é formulado da seguinte forma:

$$\text{Minimizar} \begin{cases} F_c(P) = \sum_{i=1}^n a_i + b_i P_i + c_i P_i^2 + F_{cv} \\ F_e(P) = \sum_{i=1}^n 10^2 (\alpha_i + \beta_i P_i + \gamma_i P_i^2) + \xi_i e^{(\lambda_i P_i)} \end{cases} \quad (12)$$

$$\text{sujeito a:} \begin{cases} h_1(P) = \sum_{i=1}^n P_i - P_{DE} - P_{DI} = 0 \\ g_\ell(P) = P_\ell - P_\ell^{\max} \leq 0 \quad \ell = 1, \dots, 6 \\ g_\ell(P) = P_\ell^{\min} - P_\ell \leq 0 \quad \ell = 7, \dots, 12 \end{cases} \quad (13)$$

Na Eq. (12) serão considerados, desprezíveis os efeitos do carregamento da válvula, ou seja,  $F_{cv} = 0$ . Além disso, para as restrições (13) serão adotados:  $P_{DE} + P_{DI} = 283$  MW,  $P_i^{\min} = 10$  MW e  $P_i^{\max} = 120$  MW. Os valores dos coeficientes característicos do custo de combustível e emissão de poluentes são dados na Tab.1. (Abido, 2003)

Tabela 1: Coeficientes característicos do custo e da emissão de poluentes para alguns geradores.

|         |            | G <sub>1</sub>     | G <sub>1</sub>     | G <sub>3</sub>     | G <sub>4</sub>     | G <sub>5</sub>     | G <sub>6</sub>     |
|---------|------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| Custo   | A          | 10                 | 10                 | 20                 | 10                 | 20                 | 10                 |
|         | B          | 200                | 150                | 180                | 100                | 180                | 150                |
|         | C          | 100                | 120                | 40                 | 60                 | 40                 | 100                |
| Emissão | $\alpha$   | 4,091              | 2,543              | 4,258              | 5,426              | 4,258              | 6,131              |
|         | $\epsilon$ | -5,554             | -6,047             | -5,094             | -3,550             | -5,094             | -5,555             |
|         | $\gamma$   | 6,490              | 5,638              | 4,586              | 3,380              | 4,586              | 5,151              |
|         | $\xi$      | $2 \times 10^{-4}$ | $5 \times 10^{-4}$ | $1 \times 10^{-6}$ | $2 \times 10^{-3}$ | $1 \times 10^{-6}$ | $1 \times 10^{-5}$ |
|         | $\lambda$  | 2,857              | 3,333              | 8,000              | 2,000              | 8,000              | 6,667              |

A seguir, foram obtidas as soluções ideais, conforme a Eq. (2), sendo que os resultados encontrados são mostrados na Tab. 2.

Tabela 2: Resultados obtidos para soluções ideais.

| Pontos Iniciais |        | Caso 1 | Caso 2 |
|-----------------|--------|--------|--------|
| $P_1$ (MW)      | 50,00  | 11,00  | 40,00  |
| $P_2$ (MW)      | 50,00  | 30,00  | 46,00  |
| $P_3$ (MW)      | 50,00  | 52,00  | 54,00  |
| $P_4$ (MW)      | 50,00  | 101,00 | 38,00  |
| $P_5$ (MW)      | 50,00  | 52,00  | 54,00  |
| $P_6$ (MW)      | 50,00  | 36,00  | 51,00  |
| Fc (\$/h)       | 655,00 | 599,22 | 637,38 |
| Fe (ton/h)      | 0,20   | 0,22   | 0,19   |
| $f_i^o$         | —      | 599,22 | 0,19   |

### a) Método da Ponderação dos Objetivos

Conforme a Eq. (5) o problema de otimização é formulado como:

$$f(x) = w_1 \frac{Fc}{Fc^o} + w_2 \frac{Fe}{Fe^o}, \text{ sendo } Fc^o = 599,22 \text{ \$/h e } Fe^o = 0,19 \text{ ton/h.} \quad (14)$$

Tabela 3: Resultados obtidos com o Método da Ponderação

| $w_1$ | $w_2$ | $P = [P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6]^T$ (MW)         | Fc(P) (\$/h) | Fe(P) (ton/h) |
|-------|-------|-----------------------------------------------------|--------------|---------------|
| 1,00  | 0,00  | [11,00 30,00 52,00 101,00 52,00 36,00] <sup>T</sup> | 599,22       | 0,22          |
| 0,90  | 0,10  | [17,00 33,00 53,00 88,00 53,00 39,00] <sup>T</sup>  | 600,85       | 0,21          |
| 0,80  | 0,20  | [21,00 35,00 54,00 78,00 54,00 41,00] <sup>T</sup>  | 604,26       | 0,21          |
| 0,70  | 0,30  | [25,00 37,00 54,00 70,00 54,00 43,00] <sup>T</sup>  | 608,44       | 0,20          |
| 0,60  | 0,40  | [29,00 39,00 54,00 63,00 54,00 44,00] <sup>T</sup>  | 612,82       | 0,20          |
| 0,50  | 0,50  | [31,00 40,00 54,00 58,00 54,00 46,00] <sup>T</sup>  | 617,27       | 0,20          |
| 0,40  | 0,60  | [34,00 42,00 54,00 53,00 54,00 47,00] <sup>T</sup>  | 621,62       | 0,20          |
| 0,30  | 0,70  | [36,00 43,00 54,00 48,00 54,00 48,00] <sup>T</sup>  | 625,82       | 0,20          |
| 0,20  | 0,80  | [37,00 44,00 54,00 45,00 54,00 49,00] <sup>T</sup>  | 629,86       | 0,19          |
| 0,10  | 0,90  | [39,00 45,00 54,00 41,00 54,00 50,00] <sup>T</sup>  | 633,72       | 0,19          |
| 0,00  | 1,00  | [41,00 46,00 54,00 38,00 54,00 51,00] <sup>T</sup>  | 637,39       | 0,19          |

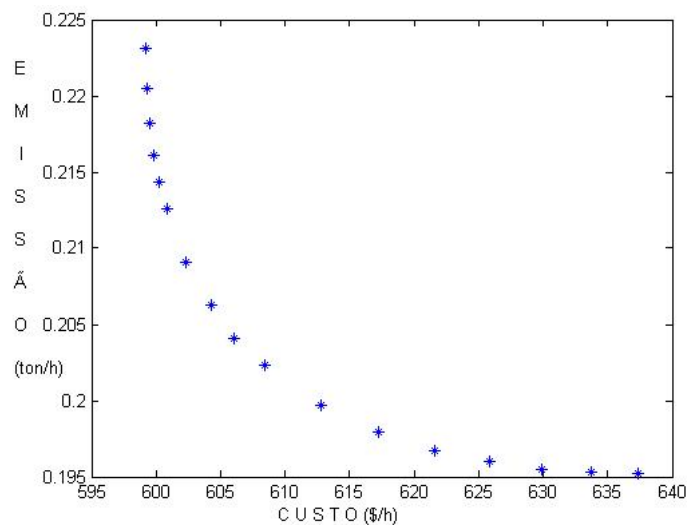


Figura 1: Conjunto ótimo de Pareto, usando o método da Ponderação dos Objetivos.

Para este problema, os valores obtidos foram bem sensíveis à variação dos coeficientes de ponderação  $w_i$ , conforme mostrado na Fig. 1, que representa a curva do conjunto ótimo de Pareto.

## b) Método de Otimização Hierárquico

Caso 1: O custo do combustível é prioritário.

Passo 1:  $\min Fc(P)$  (15)

sujeito a:  $h_1(P) = 0$ ,  $g_\ell(P) \leq 0$ ,  $\ell = 1, \dots, 12$ , obtendo  $Fc^0(P) = 599,22$  \$/h

Passo 2:  $\min Fe(P)$  (16)

sujeito a:  $h_1(P) = 0$ ,  $g_\ell(P) \leq 0$ ,  $\ell = 1, \dots, 12$ ,  $Fc(P) - \left(1 + \frac{\xi_{h_1}}{100}\right) Fc^0 \leq 0$

Tabela 4: Resultados obtidos com o Método Hierárquico considerando  $Fc(P)$  prioritária.

| $\xi_{h_1}$ | $P = [P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6]^T$ (MW)        | $Fc(P)$ (\$/h) | $Fe(P)$ (ton/h) |
|-------------|----------------------------------------------------|----------------|-----------------|
| 0,10        | [14,00 32,00 53,00 93,00 53,00 37,00] <sup>T</sup> | 599,82         | 0,22            |
| 0,50        | [19,00 34,00 53,00 83,00 54,00 40,00] <sup>T</sup> | 602,22         | 0,21            |
| 2,00        | [27,00 38,00 54,00 66,00 54,00 44,00] <sup>T</sup> | 611,20         | 0,20            |
| 5,00        | [37,00 44,00 54,00 45,00 54,00 49,00] <sup>T</sup> | 629,18         | 0,19            |
| 8,00        | [40,00 45,00 54,00 39,00 54,00 51,00] <sup>T</sup> | 636,40         | 0,19            |
| 10,00       | [40,00 46,00 54,00 38,00 54,00 51,00] <sup>T</sup> | 637,38         | 0,19            |
| 20,00       | [40,00 45,00 54,00 40,00 54,00 51,00] <sup>T</sup> | 635,38         | 0,19            |
| 50,00       | [40,00 46,00 54,00 38,00 54,00 51,00] <sup>T</sup> | 637,36         | 0,19            |

Nota-se que o problema de otimização é sensível à variação de  $\xi_{h_1}$ , ou seja, na medida que o  $\xi_{h_1}$  aumenta, a solução ótima tende para a solução ideal da função de emissão.

Caso 2: A emissão de poluentes é prioritário.

Passo 1:  $\min Fe(P)$  (17)

sujeito a:  $h_1(P) = 0$ ,  $g_\ell(P) \leq 0$ ,  $\ell = 1, \dots, 12$  obtendo  $Fe^0(P) = 0,19$  ton/h

Passo 2:  $\min Fc(P)$  (18)

sujeito a:  $h_1(P) = 0$ ,  $g_\ell(P) \leq 0$ ,  $\ell = 1, \dots, 12$ ,  $Fe(P) - \left(1 + \frac{\xi_{h_2}}{100}\right) Fe^0 \leq 0$

Tabela 5: Resultados obtidos com o Método Hierárquico considerando  $Fe(P)$  prioritária.

| $\xi_{h_2}$ | $P = [P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6]^T$ (MW)         | $Fc(P)$ (\$/h) | $Fe(P)$ (ton/h) |
|-------------|-----------------------------------------------------|----------------|-----------------|
| 0,10        | [41,00 46,00 53,00 38,00 54,00 51,00] <sup>T</sup>  | 637,53         | 0,19            |
| 0,50        | [40,00 48,00 53,00 37,00 53,00 52,00] <sup>T</sup>  | 639,40         | 0,19            |
| 2,00        | [41,00 46,00 54,00 38,00 54,00 51,00] <sup>T</sup>  | 637,35         | 0,19            |
| 5,00        | [29,00 39,00 54,00 63,00 54,00 44,00] <sup>T</sup>  | 612,85         | 0,20            |
| 8,00        | [22,00 35,00 54,00 76,00 54,00 41,00] <sup>T</sup>  | 605,05         | 0,20            |
| 10,00       | [19,00 34,00 54,00 83,00 54,00 40,00] <sup>T</sup>  | 602,37         | 0,21            |
| 15,00       | [13,00 31,00 53,00 96,00 53,00 37,00] <sup>T</sup>  | 599,48         | 0,22            |
| 20,00       | [11,00 30,00 52,00 101,00 52,00 36,00] <sup>T</sup> | 599,22         | 0,22            |

Também neste caso, a solução é modificada com a variação de  $\xi_{h_2}$ , à medida que este cresce, tende para a solução ideal da função custo de combustível.

## c) Método da Negociação

Caso 1: Minimizar o custo do combustível, tratando Fe(P) como restrição.

$$\begin{aligned} \min Fc(P) \\ \text{sujeito a: } h_1(P) = 0, \quad g_\ell(P) \leq 0, \ell = 1, \dots, 12, \quad \left( \frac{Fe - Fe^o}{Fe} \right) \leq \xi_{n_2} \end{aligned} \quad (19)$$

De acordo com a “tabela de pagamento” (Oliveira, 2005), verifica-se que o valor limite para Fe(P) é  $\xi_{n_2} = 0,14$  e os resultados são mostrados na Tab. 6.

Tabela 6: Resultados do método da Negociação obtidos minimizando Fc(P).

| $\xi_{n_2}$ | $P = [P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6]^T$ (MW)         | Fc(P) (\$/h) | Fe(P) (ton/h) |
|-------------|-----------------------------------------------------|--------------|---------------|
| 0,05        | [28,00 38,00 54,00 65,00 54,00 44,00] <sup>T</sup>  | 611,85       | 0,20          |
| 0,10        | [18,00 33,00 53,00 86,00 53,00 39,00] <sup>T</sup>  | 601,36       | 0,21          |
| 0,14        | [12,00 30,00 53,00 99,00 53,00 36,00] <sup>T</sup>  | 599,28       | 0,22          |
| 0,20        | [11,00 30,00 52,00 101,00 52,00 36,00] <sup>T</sup> | 599,22       | 0,22          |
| 0,30        | [11,00 30,00 52,00 101,00 52,00 36,00] <sup>T</sup> | 599,22       | 0,22          |

Observe que para valores maiores que  $\xi_{n_2}$  temos a solução ideal  $Fc^o$ . Para valores menores ou iguais que  $\xi_{n_2}$ , negocia-se a solução dando maior importância à minimização de Fe(P).

Caso 2: Minimizar a emissão de poluentes, tratando Fc(P) como restrição.

$$\begin{aligned} \min Fe(P) \\ \text{sujeito a: } h_1(P) = 0, \quad g_\ell(P) \leq 0, \ell = 1, \dots, 12, \quad \left( \frac{Fc - Fc^o}{Fc} \right) \leq \xi_{n_1} \end{aligned} \quad (20)$$

Novamente na “tabela de pagamento”, calculada por Oliveira (2005) obtém-se que o valor limite para Fe(P) é  $\xi_{n_1} = 0,06$  e os resultados são mostrados na Tab. 7.

Tabela 7: Resultados do método da Negociação obtidos minimizando Fe(P)

| $\xi_{n_1}$ | $P = [P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6]^T$ (MW)        | Fc(P) (\$/h) | Fe(P) (ton/h) |
|-------------|----------------------------------------------------|--------------|---------------|
| 0,01        | [23,00 36,00 54,00 76,00 54,00 41,00] <sup>T</sup> | 605,27       | 0,20          |
| 0,04        | [35,00 42,00 54,00 50,00 54,00 48,00] <sup>T</sup> | 624,19       | 0,20          |
| 0,06        | [40,00 46,00 54,00 38,00 54,00 51,00] <sup>T</sup> | 637,33       | 0,19          |
| 0,10        | [40,00 46,00 54,00 38,00 54,00 51,00] <sup>T</sup> | 637,33       | 0,19          |
| 0,20        | [40,00 46,00 54,00 38,00 54,00 51,00] <sup>T</sup> | 637,34       | 0,19          |

Observe que para valores maiores ou iguais que  $\xi_{n_1}$  temos a solução ideal Fe(P). Para valores menores que  $\xi_{n_1}$ , negocia-se a solução dando maior importância à minimização de Fc(P).

#### d) Método do Critério Global

Considere as seguintes métricas que serão testadas para o problema, sujeitas as restrições (13):

$$\text{Métrica-}L_\infty: \min L_\infty(f) = |Fc^o - Fc| + |Fe^o - Fe| \quad (21)$$

$$\text{Métrica-}L_2 \text{ relativa: } \min f(x) = \left( \frac{Fc^o - Fc}{Fc^o} \right)^2 + \left( \frac{Fe^o - Fe}{Fe^o} \right)^2 \quad (22)$$

$$\text{Métrica-}L_2: \min L_p(f) = \left[ (Fc^o - Fc)^2 + (Fe^o - Fe)^2 \right]^{1/2} \quad (23)$$

$$\text{Métrica-}L_3: \min L_3(f) = \left( |Fc^o - Fc|^3 + |Fe^o - Fe|^3 \right)^{1/3} \quad (24)$$

$$\text{Métrica-}L_3 \text{ relativa: } \min f(x) = \left( \left| \frac{Fc^o - Fc}{Fc^o} \right|^3 + \left| \frac{Fe^o - Fe}{Fe^o} \right|^3 \right)^{1/3} \quad (25)$$

Utilizando a Métrica- $L_2$  relativa e a Métrica- $L_3$  relativa, os resultados foram semelhantes e representam um compromisso entre as duas funções objetivo, apresentados na Fig. 2. Já nas outras métricas apresentadas, os valores também foram semelhantes e aproximaram-se da solução ideal  $Fc^o$ , uma vez que o valor absoluto de  $Fc(P)$  é predominante sobre  $Fe(P)$ .

Tabela 8: Resultados do método do Critério Global, aplicando diversas métricas.

| Técnica                  | $P = [P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6]^T$ (MW)          | $Fc(P)$ (\$/h) | $Fe(P)$ (ton/h) |
|--------------------------|------------------------------------------------------|----------------|-----------------|
| Métrica- $L_2$ relativa  | $[32,00 \ 41,00 \ 54,00 \ 56,00 \ 54,00 \ 46,00]^T$  | 618,98         | 0,20            |
| Métrica- $L_2$           | $[11,00 \ 30,00 \ 52,00 \ 101,00 \ 52,00 \ 36,00]^T$ | 599,22         | 0,22            |
| Métrica- $L_\infty$      | $[11,00 \ 30,00 \ 52,00 \ 101,00 \ 52,00 \ 36,00]^T$ | 599,22         | 0,22            |
| Métrica- $L_3$ :         | $[11,00 \ 30,00 \ 52,00 \ 101,00 \ 52,00 \ 36,00]^T$ | 599,23         | 0,22            |
| Métrica- $L_3$ relativa: | $[33,00 \ 41,00 \ 54,00 \ 55,00 \ 54,00 \ 46,00]^T$  | 619,52         | 0,20            |

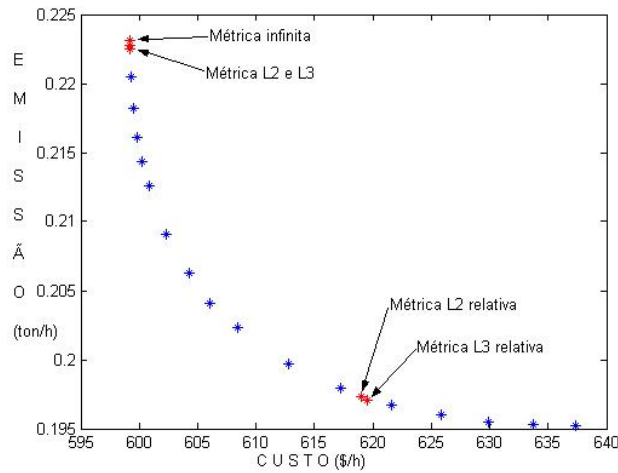


Figura 2: Resultados obtidos pelo Método Critério Global, aplicando diversas métricas.

### e) Método da Programação de Metas

Seja a solução do problema (12) e (13) considerando as metas estabelecidas para cada função objetivo como o seu valor ideal, dados na Tab. 2. Assim o problema de otimização será escrito como:

$$\text{Minimizar } f(P) = w_1 p_1 + w_2 p_2 \quad (26)$$

$$\text{sujeito a: } \begin{cases} h_1(P) = 0 & g_\ell(P) \leq 0 \quad \ell = 1, \dots, 12 \\ g_{13}(P) = \frac{Fc}{Fc^o} - p_1 \leq 1 & g_{14}(P) = \frac{Fe}{Fe^o} - p_2 \leq 1 \\ -0,5 < p_i < 0,5 \end{cases}$$

Tabela 9: Resultados obtidos com o Método da Programação de Metas.

| $w_1$ | $w_2$ | $P = [P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6]^T$ (MW)        | Fc(P) (\$/h) | Fe(P) (ton/h) |
|-------|-------|----------------------------------------------------|--------------|---------------|
| 0,99  | 0,01  | [10,00 26,00 42,00 94,00 42,00 32,00] <sup>T</sup> | 519,37       | 0,22          |
| 0,90  | 0,10  | [10,00 26,00 42,00 94,00 42,00 32,00] <sup>T</sup> | 519,37       | 0,22          |
| 0,80  | 0,20  | [10,00 26,00 42,00 94,00 42,00 32,00] <sup>T</sup> | 519,37       | 0,22          |
| 0,70  | 0,30  | [20,00 34,00 52,00 78,00 52,00 40,00] <sup>T</sup> | 587,67       | 0,21          |
| 0,60  | 0,40  | [26,00 37,00 53,00 65,00 53,00 43,00] <sup>T</sup> | 598,49       | 0,20          |
| 0,50  | 0,50  | [31,00 40,00 53,00 57,00 53,00 45,00] <sup>T</sup> | 605,67       | 0,20          |
| 0,40  | 0,60  | [33,00 41,00 53,00 50,00 53,00 47,00] <sup>T</sup> | 610,80       | 0,20          |
| 0,30  | 0,70  | [36,00 43,00 53,00 46,00 53,00 48,00] <sup>T</sup> | 614,72       | 0,20          |
| 0,20  | 0,80  | [37,00 44,00 53,00 42,00 53,00 49,00] <sup>T</sup> | 617,76       | 0,19          |
| 0,10  | 0,90  | [38,00 44,00 52,00 39,00 52,00 49,00] <sup>T</sup> | 620,20       | 0,19          |
| 0,01  | 0,99  | [40,00 45,00 52,00 37,00 52,00 50,00] <sup>T</sup> | 626,59       | 0,19          |

Os resultados obtidos são apresentados na Tab. 9, onde pode-se notar que este método obteve resultados satisfatórios em relação aos resultados obtidos através dos métodos anteriores. Quando se tem a prioridade para  $w_1$  os valores obtidos caminha em direção ao valor ideal  $Fc^0$ , quando a prioridade é para  $w_2$ , os valores tendem para a solução ideal  $Fe^0$ .

#### 4. CONCLUSÕES

As cinco técnicas estudadas mostraram que é possível trabalhar com funções multi-objetivo possibilitando a obtenção de boas soluções ótimas. O método Hierárquico e da Negociação são indicados quando se deseja priorizar um determinado objetivo, sendo que o resultado é fortemente influenciado pela escolha do objetivo mais importante. O método da Ponderação dos Objetivos também pode ser usado nesta situação, sendo que a escolha dos fatores de ponderação permite a priorização. O método Global é indicado para os casos onde se deseja obter a solução que atenda todas as funções objetivo, considerando-as com o mesmo nível de importância. No último método requer a escolha das metas, a priorização dos objetivos e ainda a escolha do intervalo dos  $p_i$ , sendo necessário um bom conhecimento do problema em estudo. O usuário possui várias ferramentas ao seu dispor, sendo recomendável a utilização de diferentes técnicas de otimização multi-objetivo na solução do problema, o que permitirá a comparação dos resultados obtidos.

#### 5. REFERÊNCIAS

- Abido, M. A., 2003, “A niched Pareto Genetic Algorithm for Multiobjective environmental/economic dispatch”, Electrical Power and Energy Systems, Vol. 25, pp 97 – 105.
- Ambrósio, L. A., 2002, “Programação Multicritério: Um Instrumento Para Planejamento Agroambiental”, Curso De Especialização Em Gestão Agroambiental, Laboratório de Análises e Métodos Quantitativos, FAEF.
- Deb, K., 2001, “Multi-Objective Optimization using Evolutionary Algorithms”, John Wiley, New York.
- Boychuk, L. M. and Ovchinnikov, V. O., 1973, “Principal Methods of Solution Multicriterial Optimization Problems (survey)”, Soviet Automatic Control, Vol. 6, pp1– 4.
- Eschenauer, H., Koski, J., Osyczka, A., (1990), “Multicriteria Design Optimization”, Berlin, Springer-Verlag.
- Oliveira, L. S., 2005, “Contribuição ao Estudo dos Métodos de Otimização Multi-objetivo”, Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFU, Uberlândia, MG.
- Osyczka, A., 1981, “An Approach to Multicriterion Optimization for Structural Design”, Proceedings of International Symposium on Optimum Structural Design, University of Arizona.

- Salukvadze, M. E., 1974, "On the Existence of Solution in Problems of Optimization under Vector Valued Criteria", Journal of Optimization Theory and Applications, Vol.12, nº 2, pp203 – 217.
- Saramago, S. F. P.; Steffen Jr, V., 2000, "Optimal trajectory planning of robot manipulators in the presence of moving obstacles", Mechanism And Machine Theory, Elsevier Science Ltda, Vol. 35, nº. 8, pp. 1079-1094.
- Vankan, W.J., Maas,R.,2002, "Approximate modelling and multi objective optimisation in aeronautic design", CMMSE, National Aerospace Laboratory NLR, Alicante, Spain.

## GENERATORS OF SELECTION USING MULTI-OBJECTIVE OPTIMIZATION

### **Oliveira, Lidiane S.**

Faculdade de Engenharia Mecânica - Universidade Federal de Uberlândia  
Av. João Naves de Ávila, 2160, CEP: 38408-100  
Fax: (34) 3239-4126 - Uberlândia (MG) - Brasil  
[lsoliveira@mecanica.ufu.br](mailto:lsoliveira@mecanica.ufu.br)

### **Saramago, Sezimária F. P.**

Faculdade de Matemática -Universidade Federal de Uberlândia  
[saramago@ufu.br](mailto:saramago@ufu.br)

**Abstract.** *In optimization problems, there are many situations in which the users' goal is to minimize and or maximize several functions simultaneously instead of a single objective function. These functions form a mathematical description of performance criteria which are usually in conflict with each other. This situation is formulated as a multicriterion optimization problem, that is also called multi-performance, multiple objective or vector optimization. Multicriterion optimization problems arise in different scientifically applications and researches are devoting attention to developing methods for solving them. The classic methods, based on function scalarization in which a vector function is transformed to a scalar function, are represented here by weighting objectives and global criterion. A different approach is given in hierarchical, trade-off and goal programming, which treats the objective functions as additional constraints. . The methodology studied here are applied to the solution of a given problem related to the selection of power generators for a power plant.*

**Keywords:** *multicriterion optimization, weighting objectives, global criterion, hierarchical, trade-off, goal programmin.*