



ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS DE CERÂMICAS PIEZELÉTRICAS COMBINADAS COM CIRCUITOS ELÉTRICOS PARA O CONTROLE PASSIVO DE VIBRAÇÕES

Danuza Santana

Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, caixa postal 593 –CEP 38400-902 Uberlândia
–MG – Brasil

dcsantana@mecanica.ufu.br

Domingos A. Rade

domingos@ufu.br

Valder Steffen Jr.

vsteffen@mecanica.ufu.br

Resumo: *No contexto do amortecimento passivo de vibrações, no presente trabalho a modelagem por elementos finitos de estruturas vibrantes combinadas com materiais piezelétricos e circuitos elétricos passivos (circuitos shunt) é apresentada, com ênfase na análise de duas configurações de circuitos: shunts resistivos e shunts ressonantes. É primeiramente apresentada a formulação e então são apresentadas simulações numéricas de uma placa livre, utilizando um software comercial de elementos finitos. Resultados são apresentados e avaliados em termos da atenuação da vibração.*

Palavras-chave: *vibração, controle passivo, piezelétrico, shunt.*

1. INTRODUÇÃO

No contexto do controle passivo de vibrações mecânicas, muitos trabalhos têm mostrado a viabilidade da utilização de materiais piezelétricos combinados com circuitos elétricos passivos (também chamados circuitos *shunt*). Nesta estratégia, a energia vibratória é convertida em energia elétrica no elemento piezelétrico e então transferida (e possivelmente dissipada) no circuito elétrico. De acordo com Haggod e Von Flotow (1991) e Lesieutre (1998), vários tipos de configurações de circuitos podem ser convenientemente utilizados. Dentre estas, as mais frequentes são: circuito resistivo, que é constituído por apenas um resistor elétrico conectado ao elemento piezelétrico; e o circuito *shunt* ressonante, composto por um resistor e um indutor que podem ser conectados em série ou em paralelo. Hagood e Von Flotow (1991) demonstraram que o efeito do *shunt* resistivo é similar ao amortecimento produzido por materiais viscoelásticos enquanto que o comportamento dos *shunts* ressonantes assemelha-se aos absorvedores dinâmicos de vibrações. Em numerosos estudos recentes, outras configurações de circuito têm sido propostas, tais como *shunts* chaveados (Corr e Clark, 2002), multimodais (Viana *et al.*,) e *shunts* adaptativos (Behrens *et al.*, 2003).

Até o presente momento, os *shunts* piezocerâmicos têm sido amplamente utilizados em aplicações estruturais relativamente simples, como vigas e placas, para as quais é possível escrever modelos analíticos. Para o caso de estruturas mais complexas, de interesse industrial, torna-se necessário utilizar modelos numéricos que considerem adequadamente o acoplamento eletromecânico dos elementos piezelétricos e as características dos componentes elétricos.

Estes modelos são capazes de representar de forma mais precisa o estado de deformações dos elementos piezelétricos que determinam as características do sistema de controle passivo. Com este objetivo, procedimentos de modelagem baseados em elementos finitos foram sugeridos por Saravanos (1999). Este aspecto também é abordado neste trabalho, cuja ênfase está no uso do programa comercial de elementos finitos ANSYS® para modelagem tri-dimensional de estruturas combinadas com *shunts* piezocerâmicos. O interesse consiste em descrever a formulação e detalhes particulares da modelagem por elementos finitos. São apresentadas simulações numéricas realizadas em uma estrutura do tipo placa utilizando elementos sólidos e elementos destinados à modelagem de componentes elétricos, disponíveis no ANSYS®.

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Materiais piezelétricos podem ser utilizados segundo os efeitos piezelétricos direto ou inverso. O efeito piezelétrico direto é o efeito de sensor: quando uma tensão mecânica é aplicada, desenvolvem-se polarizações (distribuições de cargas elétricas por unidade de área), que são proporcionais à tensão aplicada. O efeito piezelétrico inverso traduz o efeito de atuador: quando um campo elétrico é aplicado, o material desenvolve alongamentos e distorções, que são proporcionais ao campo elétrico aplicado.

O acoplamento eletromecânico característico dos materiais piezelétricos é representado pela seguinte equação constitutiva, na forma matricial (Saravanos, 1999):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^T & \mathbf{d} \\ \mathbf{d}_t & \mathbf{s}^E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} \quad (1)$$

onde: $\mathbf{D}$ é o vetor de deslocamentos elétricos; $\mathbf{d}$ é a matriz dos módulos piezelétricos do material; $\boldsymbol{\varepsilon}$ é a matriz de permissividade do material piezelétrico; $\mathbf{E}$ é o vetor campo elétrico e $\mathbf{s}$ é a matriz de flexibilidade. O superescrito $()^T$ indica que estes valores foram medidos com tensão mecânica constante, o superescrito $()^E$ significa que foram medidos em campo elétrico constante e o subscrito $()_t$ indica a transposição matricial.

2.1 Modelos de elementos finitos

Considere-se o sistema mecânico ilustrado na Figura 1, que consiste de uma estrutura primária não amortecida, para a qual busca-se atenuar a vibração utilizando um elemento piezelétrico conectado ao circuito elétrico passivo, cuja impedância é indicada por Z . Após a discretização, a equação de equilíbrio para estruturas com *piezo-shunts* acoplados pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{xx} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}(t) \\ \ddot{\boldsymbol{\phi}}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{xx} & \mathbf{K}_{x\phi} \\ \mathbf{K}_{\phi x} & \mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \boldsymbol{\phi}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{q}(t) \end{Bmatrix} \quad (2)$$

onde: $\mathbf{x}(t)$, $\boldsymbol{\phi}(t)$, $\mathbf{f}(t)$ and $\mathbf{q}(t)$ são os vetores dos graus de liberdade mecânicos (deslocamentos), potenciais elétricos nodais, forças externas nodais e cargas elétricas nodais, respectivamente. $\mathbf{M}_{xx}$ é a matriz de massa, $\mathbf{K}_{xx}$ é a matriz de rigidez, $\mathbf{K}_{\phi x} = (\mathbf{K}_{x\phi})_t$ é a matriz de acoplamento piezelétrico e $\mathbf{K}_{\phi\phi}$ é a matriz de permissividade.

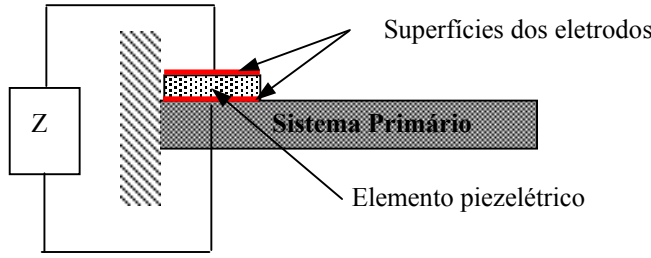


Figura 1 – Esquema da estrutura primária combinada com *shunt* piezelétrico.

Os nós que constituem cada eletrodo são equipotenciais elétricos, como mostra a Figura 1, onde ϕ^U e ϕ^L indicam os potenciais elétricos associados aos eletrodos superior e inferior, respectivamente. Introduzindo esta condição na equação (2) são obtidas as seguintes equações do movimento modificadas:

$$\mathbf{M}_{xx} \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}_{xx} \mathbf{x}(t) + \bar{\mathbf{K}}_{x\phi} \bar{\phi}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (3)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{\phi x} \mathbf{x}(t) + \bar{\mathbf{K}}_{\phi\phi} \bar{\phi}(t) = \bar{\mathbf{q}}(t) \quad (4)$$

A partir deste ponto, as equações do movimento do sistema podem ser transformadas afim de considerar o circuito *shunt* conectado aos eletrodos. Para tanto, assume-se que entre as duas superfícies dos eletrodos as cargas elétricas são apenas transferidas e que não são introduzidas ou removidas cargas de outros nós dentro da pastilha piezelétrica. O interesse aqui é obter estas equações no domínio da frequência, embora a representação no domínio do tempo seja igualmente possível. Então, aplicando a transformada de Fourier às equações (3) e (4) e negligenciando as condições iniciais, obtém-se:

$$(-\omega^2 \mathbf{M}_{xx} + \mathbf{K}_{xx}) \mathbf{X}(\omega) + \bar{\mathbf{K}}_{x\phi} \bar{\Phi}(\omega) = \mathbf{F}(\omega) \quad (5)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{\phi x} \mathbf{X}(\omega) + \bar{\mathbf{K}}_{\phi\phi} \bar{\Phi}(\omega) = \bar{\mathbf{Q}}(\omega) \quad (6)$$

O vetor de correntes elétricas que flui através do circuito *shunt*, cuja impedância é dada por $Z(\omega)$, é introduzido através das seguintes relações:

$$\bar{\mathbf{Q}}(\omega) = \frac{1}{j\omega} \mathbf{I}(\omega) \quad (7)$$

$$\mathbf{I}(\omega) = Z^{-1}(\omega) \mathbf{L} \bar{\Phi}(\omega) \quad (8)$$

A matriz $\mathbf{L}$ é apresentada nas relações abaixo, onde o vetor dos potenciais elétricos é ordenado de forma que os componentes correspondentes aos eletrodos superior e inferior ocupem as duas primeiras posições.

$$\mathbf{I}(\omega) = \begin{Bmatrix} \mathbf{I}(\omega) \\ -\mathbf{I}(\omega) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} = \mathbf{Z}^{-1}(\omega) \begin{Bmatrix} \phi^U(\omega) - \phi^L(\omega) \\ \phi^L(\omega) - \phi^U(\omega) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} = \mathbf{Z}^{-1}(\omega) \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \phi^U(\omega) \\ \phi^L(\omega) \\ \phi_i(\omega) \\ \phi_{i+1}(\omega) \\ \vdots \end{Bmatrix}}_{\mathbf{\Phi}} \quad (9)$$

Combinando as equações (6), (7) e (8), escreve-se:

$$\bar{\mathbf{K}}_{\phi x} \mathbf{X}(\omega) + \left(\bar{\mathbf{K}}_{\phi\phi} - \frac{\mathbf{Z}^{-1}(\omega)}{j\omega} \mathbf{L} \right) \mathbf{\Phi}(\omega) = \mathbf{0} \quad (10)$$

As equações (5) e (10) podem ser combinadas a fim de expressar a equação do movimento no domínio da frequência, em termos apenas das coordenadas globais. Então:

$$\left[-\omega^2 \mathbf{M}_{xx} + \mathbf{K}_{xx} - \bar{\mathbf{K}}_{x\phi} \left(\bar{\mathbf{K}}_{\phi\phi} - \frac{1}{j\omega} \mathbf{Z}^{-1}(\omega) \right)^{-1} \bar{\mathbf{K}}_{\phi x} \right] \mathbf{X}(\omega) = \mathbf{F}(\omega) \quad (11)$$

Á partir da equação (11), a matriz das funções de resposta em frequência (FRFs) da piezo-estrutura combinada com o circuito elétrico pode ser expresso sobre a seguinte forma:

$$\mathbf{X}(\omega) = \mathbf{H}(\omega) \mathbf{F}(\omega) \quad (12)$$

$$\mathbf{H}(\omega) = \left[-\omega^2 \mathbf{M}_{xx} + \mathbf{K}_{xx} - \bar{\mathbf{K}}_{x\phi} \left(\bar{\mathbf{K}}_{\phi\phi} - \frac{1}{j\omega} \mathbf{Z}^{-1}(\omega) \right)^{-1} \bar{\mathbf{K}}_{\phi x} \right]^{-1} \quad (13)$$

As FRFs calculadas de acordo com (13) serão usadas a seguir para avaliar a influência dos circuitos *shunt* em termos da atenuação dos níveis de vibração. Em particular, serão avaliadas três configurações de circuito: circuito *shunt* resistivo (Figura 2(a)), circuito *shunt* resistivo-indutivo em série (Figura 2(b)) e circuito *shunt* resistivo-indutivo em paralelo (Figura 2(c)).

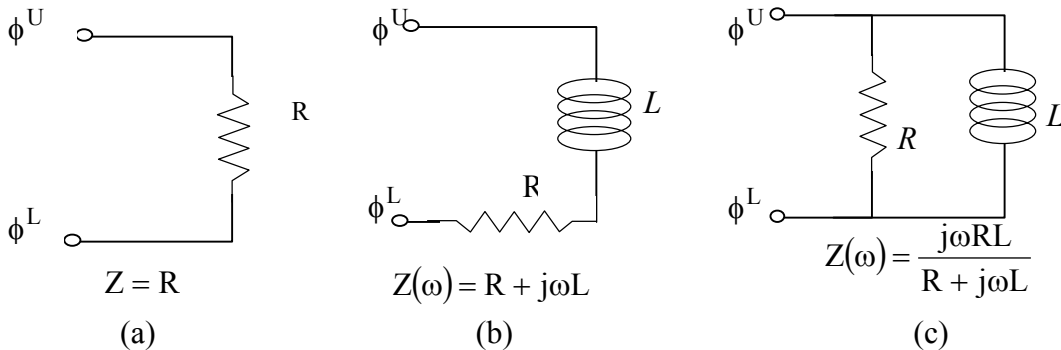


Figura 2- Configurações dos circuitos *shunt*

3. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Utilizando o software ANSYS®, foi construído um modelo tri-dimensional de elementos finitos de uma placa livre retangular de aço, contendo um *shunt* piezelétrico colado à sua superfície, como está representado na Figura 3. As características físicas e geométricas da placa são dadas a seguir:

- Dimensões da placa : 400mm×300mm×1mm;
- Módulo de Young : $E = 2.07 \times 10^{11} \text{ Pa}$;
- Densidade de Massa: $\rho = 7870 \text{ Kg/m}^3$;
- Coeficiente de poisson: $\nu = 0.29$.

As características da pastilha piezelétrica são dadas por:

- Dimensões: 100mm×100mm × 0.1mm;
- Densidade de massa: $\rho = 7870 \text{ Kg/m}^3$.

As matrizes dos módulos piezelétricos, de rigidez e de permissividade relativa são dadas por:

$$e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -11.8163 \\ 0 & 0 & -11.8163 \\ 0 & 0 & 13.5987 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ C/V; } c = \begin{bmatrix} 8.8531 & 3.5454 & 2.9648 & 0 & 0 & 0 \\ 3.5454 & 8.8531 & 2.9648 & 0 & 0 & 0 \\ 2.9648 & 2.9648 & 6.918 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.35 \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ (N/m}^2\text{)}$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 8.85 & 0 & 0 \\ 0 & 8.85 & 0 \\ 0 & 0 & 8.85 \end{bmatrix}$$

O sistema eletromecânico foi discretizado da seguinte forma:

- **Placa de aço:** 2304 elementos SOLID45, cada um contendo 8 nós e 3 graus de liberdade por nó.
- **Pastilha piezelétrica:** 576 elementos SOLID5, cada um contendo 8 nós e 4 graus de liberdade por nó.
- **Circuito *shunt*** : CIRCU94 elementos.

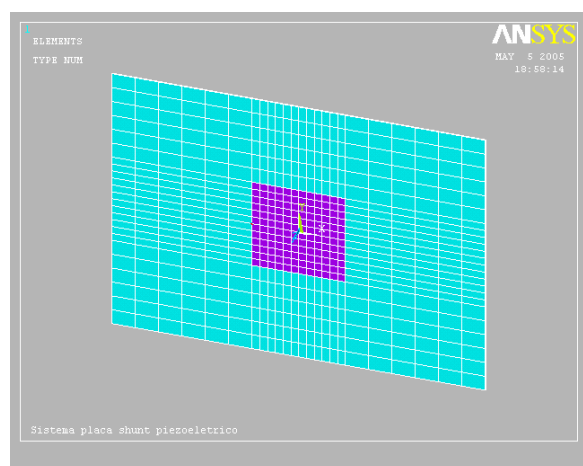


Figura 3 – Malha de elementos finitos do conjunto (circuito *shunt* não é apresentado)

Foi escolhido o primeiro modo de vibração da placa afim de avaliar a eficiência sistema *shunt* piezelétrico proposto. O cálculo dos valores ótimos do parâmetro R para o *shunt* resistivo (Figura 2(a)) e dos parâmetros R e L para o *shunt* ressonante em série e em paralelo (Figuras 2(b) e 2(c)) foi realizado utilizando a teoria desenvolvida por Hagood e Von Flotow (1991) e Wu. Esta otimização requer o cálculo da capacitância da pastilha piezelétrica e das freqüências do sistema em duas situações diferentes: circuito aberto e circuito fechado. No primeiro caso, o eletrodo superior e inferior são mantidos isolados um do outro, preservando assim os deslocamentos elétricos gerados no material piezelétrico. No segundo caso, é imposto o mesmo potencial elétrico aos eletrodos superior e inferior, indicando que as cargas elétricas fluem de um eletrodo para outro com uma resistência nula. Nestas duas situações os valores das freqüências naturais da placa foram calculados realizando análise modal e os valores obtidos estão apresentados na Tabela 1. Verifica-se que o valor da freqüência de circuito aberto é ligeiramente superior ao valor da freqüência de circuito fechado. O valor da capacitância do PZT foi calculado realizando análise estática e o valor obtido foi de $0,1915 \times 10^{-5}$ F.

Os valores dos parâmetros ótimos dos circuitos foram calculados a partir dos valores de freqüências naturais de circuito aberto, circuito fechado e da capacitância do PZT, e os valores obtidos estão apresentados na Tabela 2.

Tabela 1: Valores das freqüências naturais de circuito aberto e circuito fechado (Hertz)

Circuito Aberto	Circuito Fechado
33,3423	33,3034

Tabela 2: Valores ótimos obtidos para os parâmetros do circuito *shunt*

Configuração do Circuito	R _{ótimo} [Ω]	L _{ótimo} [H]
Resistivo	$2,338 \times 10^3$	-
Ressonante em Série	170,3030	11,8951
Ressonante em Paralelo	$3,6464 \times 10^4$	11,9369

A eficiência do amortecimento do *shunt* piezelétrico pode ser avaliado nas Figuras 4(a), 4(b) e (c), que permitem comparar as amplitudes da FRF da placa na vizinhança do primeiro modo de vibração em duas situações: sem *shunt* e com *shunt*. Pode ser observada uma significativa atenuação indicada pelo modelo de elementos finitos. Verifica-se também uma maior atenuação é obtida para o circuito *shunt* ressonante quando comparada com o circuito *shunt* resistivo. É obtida praticamente a mesma atenuação para as duas configurações de *shunt* ressonante (série e paralelo).

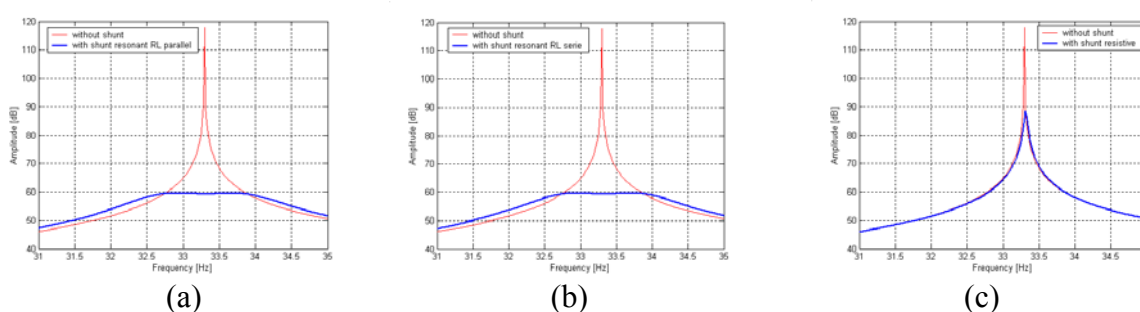


Figura 4— FRFs da placa. (a): *shunt* ressonante em série; (b) *shunt* ressonante em paralelo; (c) *shunt* resistivo

4. CONCLUSÕES

As simulações numéricas demonstraram que a modelagem por elementos finitos é uma estratégia conveniente para a análise e projeto de sistemas passivos de amortecimento de vibrações baseado no uso de elementos piezelétricos combinados com circuitos *shunt* passivos. Esta estratégia de modelagem possibilita o desenvolvimento de modelos detalhados de estruturas complexas, detalhando as distribuições de deformações que determinam a eficiência da estratégia de controle e evitando algumas hipóteses simplificadoras, comumente utilizadas. O código de elementos finitos utilizado possui todos os elementos necessários para integrar na modelagem, o elemento piezelétrico, as superfícies dos eletrodos e os circuitos elétricos, o que proporciona grande flexibilidade de modelagem em termos de geometria e configuração do circuito *shunt*.

5. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à CAPES pelo suporte às atividades de pesquisa.

6. REFERÊNCIAS

- Behrens, S., Fleming, A.J.e Moheimani, S.O.R., 2003, “A broadband controller for shunt piezoelectric damping of structural vibration”, Smart Materials and Structures, Vol 12, 18-28.
- Corr, R.L. e Clark, W. W., 2002, “Comparison of low frequency piezoelectric switching shunt techniques for structural damping”, Smart Materials and Structures, Vol 11, 370-376
- Hagood, N.W. e Von Flotow , A., 1991, “Damping of Structural Vibrations with Piezoelectric Materials and Passive Electrical Networks”, Journal Of Sound And Vibration , Vol 146(2), 243-268.
- Lesieutre, G.A., 1998, “Vibration Damping and Control Using Shunted Piezoelectric Materials”, The Shock and Vibration Digest, Vol 30(3),187-195.
- Saravanos, D.A.,1999, “Damped Vibrations of Composite Plates with Passive Piezoelectric-Resistor Elements”, Journal of Sound and Vibrations, Vol 221(5), 867-885.
- Wu, Su., "Piezoelectrics with a Parallel R-L Circuit for Structural Damping and Vibration Control", SPIE, Vol 2720, 259-269
- Viana, F.A.C., Santana, D.C., Rade, D. A. e Steffen Jr, V., 2005, “Multimodal Passive Vibration Suppression by using Shunted Piezoceramics” ,Proceedins of the Inter-noise.

7. DIREITOS AUTORAIS

Os autores retém os direitos autorais por este trabalho.

FINITE ELEMENT ANALYSIS OF SHUNTED PIEZOCERAMICS FOR PASSIVE VIBRATION CONTROL

Danuza Cristina Santana

School of Mechanical Engineering, Federal University of Uberlandia, P.O. Box 593 –CEP 38400-902 Uberlândia –MG – Brasil.

dcsantana@mecanica.ufu.br

Domingos Alves Rade

School of Mechanical Engineering, Federal University of Uberlandia, P.O. Box 593 –CEP 38400-902 Uberlândia –MG – Brasil.

domingos@ufu.br

Valder Steffen Jr

School of Mechanical Engineering, Federal University of Uberlandia, P.O. Box 593 –CEP 38400-902 Uberlândia –MG – Brasil.

vsteffen@mecanica.ufu.br

Abstract: *In the present paper, the finite element modeling of vibrating structures combined with piezoelectric materials and passive electric circuits (shunt circuits) is addressed, with emphasis placed on the analysis of two circuit topologies: resistive shunts and resistive-inductive shunts. The underlying formulation is first presented and then some numerical simulations using commercial finite element software are performed considering a free-free square plate and a complex piezoelectric vibrating beam accelerometer cell for which some target vibration modes must be attenuated. Results are presented and evaluated in terms of the vibration attenuation attained in each case analyzed.*

Keywords: *Vibration, Passive control, Piezoelectric, Shunts.*