



USO DE OBSERVADORES DINÂMICOS NA INVESTIGAÇÃO DE PROBLEMAS INVERSOS EM CONDUÇÃO DE CALOR

Priscila Ferreira Barbosa de Sousa

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Engenharia Mecânica
Bloco M – Campus santa Mônica
priscila@mecanica.ufu.br

Gilmar Guimarães

gguima@mecanica.ufu.br

Resumo: *Apresenta-se neste trabalho uma nova abordagem para problemas inversos em condução de calor através do uso da teoria de sistemas e controle. A proposta baseia-se na teoria dos observadores dinâmicos de estado e apresenta uma nova interpretação no domínio da frequência. O problema inverso, ou seja, um fluxo desconhecido imposto a uma das extremidades do condutor é estimado a partir de dados medidos de temperatura. Os sinais de temperatura são interpretados por um filtro passa baixa que rejeitam os ruídos inerentes à medição experimental. Assim o observador, é capaz de minimizar com êxito os dois componentes presentes nos erros de medição: o erro aleatório (inerente à medição) e o erro determinístico (inerente ao algoritmo). Uma comparação com o método de estimação sequencial é também apresentada. Observa-se ainda uma grande potencialidade do método do observador dinâmico para aplicações em problemas multidimensionais.*

Palavras-chave: *problema inverso, observadores dinâmicos, controle, fluxo de calor, condução*

1. INTRODUÇÃO

Os problemas inversos são encontrados em várias áreas da ciência e engenharia. Para engenheiros mecânicos, aeroespaciais ou químicos, matemáticos, médicos e demais áreas, os problemas inversos podem ser aplicados sob diferentes formas. A principal característica deste tipo de abordagem é a obtenção da solução do problema físico de maneira indireta, como por exemplo a determinação de campos térmicos em superfícies sem acesso, a obtenção da função resposta em frequência de uma estrutura complexa ou ainda, o diagnóstico de alguma doença por tomografia computadorizada. Em todos os casos, as condições de contorno destes problemas não são conhecidas ou são de difícil acesso. Diante disso, o problema pode ser resolvido a partir de informações oriundas de sensores localizados em pontos acessíveis.

Nos problemas inversos de condução de calor o uso de termopares se faz presente. Nesse sentido, o uso de temperaturas experimentais permite a obtenção da solução do problema térmico, que pode ser: a obtenção das propriedades térmicas, obtenção do fluxo de calor superficial, obtenção da fonte de calor interna ou ainda a obtenção da temperatura superficial numa face sem acesso direto, como por exemplo numa câmara de combustão ou na face de corte da ferramenta durante um processo de usinagem. Geralmente, estes problemas possuem solução direta aproximada e apresentam características dimensionais complexas.

Na literatura, uma variedade de soluções analíticas e numéricas para os problemas inversos de condução de calor podem ser encontradas. Entretanto, a maioria delas se restringem a problemas unidimensionais e bidimensionais. Stolz foi um dos primeiros pesquisadores que desenvolveu uma solução analítica para um problema inverso de condução de linear usando o teorema de Duhamel. Nesse caso, a solução encontrada era instável para pequenos intervalos de tempo (Beck *et al.*, 1985). Baseado no método de mínimos quadrados e também no teorema de Duhamel, Beck *et al.* (1985) desenvolveram o método de função especificada seqüencial. Este procedimento apresenta resultados estáveis em problemas unidimensionais. Em alguns problemas, o método seqüencial pode ser estabilizado introduzindo-se o critério de estabilização proposto por Tikhovov & Arsenin (1977). Outras técnicas que podem ser usadas é o método do gradiente conjugado com equação adjunta, proposta por Özisik (1993) e o método de “marcha - espacial” proposto por Raynaud & Sassi (1994).

Mais recentemente, técnicas de filtro como filtro de Kalman e observadores dinâmicos (Marquardt and Auracher, 1990) tem sido empregado para a solução de problemas inversos em condução de calor. Esse trabalho se dedica a investigar o uso de observadores dinâmicos em problemas inversos e baseia-se no trabalho apresentado por Blum and Marquardt (1997). O principal objetivo é a sua comparação com técnicas inversas bem consolidadas como a técnica de função especificada (Beck et al., 1985). Objetiva-se ainda a verificação da possibilidade de estendê-la para a aplicação em modelos multidimensionais visando ampliar o campo de aplicação dos problemas inversos de condução de calor.

2. MODELO MATEMÁTICO

Uma das características das técnicas de problemas inversos é a necessidade de se obter uma equação que forneça uma correlação de uma variável a ser medida (nesse caso $T(x,t)$) em função do parâmetro a ser estimado, $q(t)$. Assim, torna-se necessário, inicialmente, obter-se a solução do problema direto em questão.

2.1- Modelo proposto – problema direto

A técnica proposta baseia-se num problema de condução de calor unidimensional linear, normalizado como mostra a Figura 1.

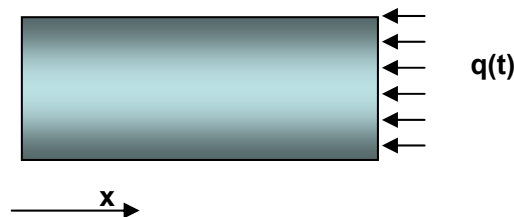


Figura 1: Esquema do problema unidimensional

A equação da difusão de calor que governa o problema pode ser escrita como:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (1a)$$

sujeita às condições de contorno

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad t > 0 \quad (1b)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=1} = q(t) \quad t > 0 \quad (1c)$$

e à condição inicial

$$\theta(x, t = 0) \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (1d)$$

Uma vez conhecido o fluxo de calor $q(t)$ o problema descrito pela Eq. (1) é chamado problema direto que será resolvido numericamente.

2.1.1- Solução Numérica

A Equação (1) é então discretizada usando-se a técnica de diferenças finitas com o método implícito, ou seja

$$T_i = T_i - W \left(\frac{awT_{i-1} + aeT_{i+1} + b - apT_i}{-ap} \right) \quad (2)$$

onde aw , ae e ap são coeficientes que dependem da malha e do passo de tempo, W um fator de convergência definido pelo solver SOR.

2.2 - Problema inverso

Observa-se que o fluxo de calor imposto em $x=1$ é desconhecido e deve ser estimado. Nota-se ainda que o problema dado pela Eq. (1) também pode ser resolvido aplicando-se a transformada de Laplace ou a transformada “z”, ou seja:

$$\bar{\theta}(x, s) = -\frac{\cosh(x \times \sqrt{s})}{\sqrt{s} \times \sinh(\sqrt{s})} \times q(s) \Leftarrow \text{Equação Contínua} \quad (3)$$

ou também aplicando-se a transformada de Laplace na equação discretizada espacialmente. Nesse caso, obtém-se a solução em forma matricial

$$\begin{bmatrix} \left(1 + \frac{\Delta x^2}{2}s\right) & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 0 & -1 & (2 + \Delta x^2 s) & -1 & 0 & 0 \\ & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & 0 \\ & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ M \\ M \\ M \\ M \\ T_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M \\ M \\ M \\ M \\ Q(s)\Delta x \end{bmatrix} \quad (4)$$

ou resolvendo para um nó qualquer, pode-se obter a equação transferência no domínio s como

$$T(x, s) = -\frac{\sum_{i=0}^{mh} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{nh} a_i s^i} \times Q(s) \Leftarrow \text{Equação Discreta} \quad (5)$$

Assim, pode-se definir G_h como a função de transferência de calor que relaciona a temperatura medida ao fluxo desconhecido:

$$Gh = \frac{\sum_{i=0}^{mh} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{nh} a_i s^i} = \frac{T}{Q} \Leftarrow \text{Função transferencial} \quad (6)$$

A equação (6) pode então ser representada no domínio “z” definido por

$$s = \frac{2}{T_d} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \Rightarrow \text{transformação bilinear} \quad (7)$$

como:

$$Gh = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \Lambda + b_{n_n-1} z^{-(n_n-1)} + b_{n_n} z^{-n_n}}{1 + a_1 z^{-1} + \Lambda + a_{n_n-1} z^{-(n_n-1)} + a_{n_n} z^{-n_n}} \quad (8)$$

ou

$$Gh = \frac{\sum_{i=0}^{n_n} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{n_n} a_i z^{-i}}, \quad \text{mas } Gh = \frac{T(z)}{Q(z)} \quad (9)$$

Da Eq. (9) e da definição de um modelo dinâmico tipo entrada/saída pode-se obter a equação diferença,

$$T(z) + \sum_{i=1}^{n_n} a_i z^{-i} T(z) = \sum_{i=0}^{n_n} b_i z^{-i} Q(z) \quad (10)$$

ou ainda

$$T(k) = \sum_{i=0}^{n_n} b_i q(k-i) - \sum_{i=1}^{n_n} a_i T(k-i) \Rightarrow \text{Equação diferença} \quad (11)$$

que é equivalente à Eq.(10). A Equação (11) é base na construção do algoritmo baseado em observadores dinâmicos para a solução do problema inverso.

3. Problema Inverso

3.1-Método seqüencial com função especificada

O método de estimação seqüencial proposto por Beck et al (1985) baseia-se nos seguintes conceitos básicos:

- 1- uma forma funcional para q(t) é assumido para os tempos t_{M+1} , t_{M+2} ,, t_{M+r-1} sendo que para $t < t_M$ o fluxo de calor é conhecido;
- 2- uma função erro quadrática é usada para esses tempos;
- 3- componentes de fluxos de calor são estimados para a forma funcional assumida;
- 4- somente a primeira componente q_M é retirada;
- 5- M é aumentado em passo e o procedimento é repetido.

O algoritmo seqüencial (Beck et al. ,1985) pode escrito como

$$q_M = \frac{\sum_{i=1}^r \left(Y_{M+i-1} + \hat{T}_{M+i-1} \Big|_{q_M=\dots=0} \right)^2 \Phi_i}{\sum_{i=1}^r \Phi_i^2} \quad (12)$$

ou

$$q_M = \sum_{i=1}^r K_i \left(Y_{M+i-1} + \hat{T}_{M+i-1} \Big|_{q_M=\dots=0} \right)^2$$

sendo

$$K_i = \frac{\Phi_i}{\sum_{j=1}^r \Phi_j^2} \text{ e } \Phi_i = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_i} \quad (13)$$

onde K representa o coeficiente de ganho e Φ o coeficiente de sensibilidade.

3.2 – Método do observador dinâmico

Considere a estrutura do problema inverso de condução de calor como descrito no diagrama de bloco.

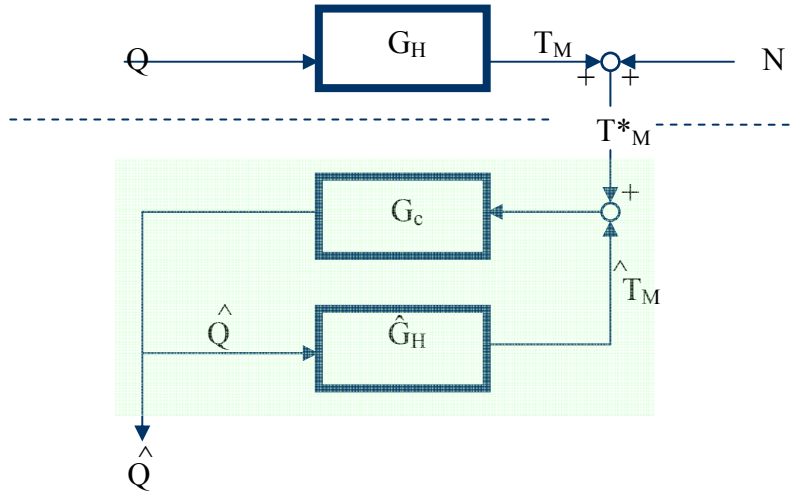


Figura 2: Diagrama de bloco de um sistema dinâmico no domínio da frequência.

O problema inverso de condução de calor consiste em duas partes:

i) o fluxo de calor desconhecido aplicado ao condutor G_h , resulta na temperatura medida T_M^* corrompida por um ruído (N),

$$T_M^* = T_M + N = G_h Q + N \quad (14)$$

ii) um fluxo de calor estimado $\hat{Q}$ é calculado a partir de uma entrada de valores medidos de temperatura T_M^* . O estimador pode então ser representado pela função de transferência em malha fechada,

$$\hat{Q} = \frac{G_c}{1 + G_c G_h} T_M^* \quad (15)$$

que caracteriza o comportamento do algoritmo de solução. As funções de transferência do sinal e do ruído G_Q e G_N são encontradas combinando as Eqs.(14) e (15),

$$\hat{Q} = \frac{G_c G_h}{1 + \frac{G_c G_h}{G_Q}} Q + \frac{G_c}{1 + \frac{G_c G_h}{G_Q}} N \quad (16)$$

Da Eq. (16) obtém-se:

$$G_N = G_Q G_H^{-1} \quad \text{ou} \quad |G_N(j\omega)| = \frac{|G_Q(j\omega)|}{|G_H(j\omega)|} \quad (17)$$

Observa-se que na Eq. (17), existem 2 possibilidades para a amplificação do ruído $|G_N|$, que dependem de G_Q :

- i) se a frequência ω , se encontra dentro da banda e $|G_Q|=1$, $|G_N(j\omega)| = |G_H(j\omega)|^{-1}$.
- ii) se a frequência ω , está além de ω_c e $|G_Q| \rightarrow 0$. O $|G_N| \rightarrow 0$, se $|G_Q| \rightarrow 0$ mais rápido que $|G_H| \rightarrow 0$.

Quanto mais rápida for a atenuação de $|G_Q|$ além de ω_c , menor a sensibilidade do algoritmo a ruídos. Desta forma a equação que se refere ao estimador pode ser escrita como,

$$\hat{Q}(s) = G_N(s) \times T_M^*(s) \quad (18)$$

Como o observador é um esquema on-line, i.e. estima o fluxo requerido com base em medidas de temperaturas do tempo, atual e passado, isso acarreta uma mudança ou atraso de fase, interferindo nos valores estimados. A correção desse fato requer uma filtragem dos dados estimados para a remoção do atraso e permitir maior estabilidade ao algoritmo.

3.2.1 Construção do filtro

Conclui-se assim que a amplificação do ruído medido $|G_N|$ para um dado filtro passabanda do sinal da função transferência G_Q pode ser minimizado, maximizando o “roll-off” de $|G_Q|$. Assim a formulação da função de transferência do filtro G_Q deve ser tal que satisfaça as propriedades de filtragem desejadas:

- i) comportamento passa-baixa;
- ii) curva monotônica;
- iii) queda no sinal mais acentuada possível a partir da frequência de corte.

Os principais critérios para escolha de um filtro apropriado são: i) a sua estrutura (recursivo ou não recursivo); ii) o seu tipo e; iii) sua ordem.

Quanto à formulação, o filtro escolhido é o recursivo (IIR), i.e., a saída depende não só do valor da entrada, mas também do valor da saída anterior.

Quanto ao tipo, opta-se pelo Chebychev tipo I, pois a resposta da magnitude da frequência cai monotonicamente além da frequência de corte como anteriormente requerido. A magnitude do filtro Chebychev tipo I é representada como:

$$|G_Q(j\omega)|^2 = \frac{k_{cheby}}{1 + \delta T_n^2(\omega)} \quad (19)$$

onde, δ determina a amplitude do “ripple”, ou seja, a tolerância que se permite à magnitude da frequência oscilar ao redor do valor ideal 1 até atingir a frequência de corte, e T_n é o polinômio de Chebychev de ordem n . No domínio de Laplace a função transferência do filtro Chebychev tipo I assume a seguinte forma:

$$G_Q(s) = \frac{k_{cheb}}{(s - s_{Cheb,1})(s - s_{Cheb,2})\Lambda(s - s_{Cheb,n_Q})} \quad (20)$$

Observa-se que para se satisfazer a condição de $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G_N| = 0$, a ordem do denominador de G_N deve ser maior que a do numerador, ou seja,

$$n_N > m_N \quad (21)$$

Se n_Q e m_Q são a ordem do denominador e do numerador de G_Q respectivamente, e n_h e m_h são a ordem do denominador e do numerador do modelo do condutor de calor discretizado, logo

$$n_N = n_Q + m_h \text{ e } m_N = n_h \quad (22)$$

e m_h depende do esquema da discretização espacial e a ordem n_h , da discretização espacial, depende da posição de medição de temperatura (nesse exemplo, $x=0.5$),

Observa-se a seguinte relação entre o numero de zeros m_h e o numero de pólos n_h :

$$m_h = \frac{n_h}{2} \quad (n_h \text{ par}) \text{ e } m_h = \frac{n_h - 1}{2} \quad (n_h \text{ ímpar}) \quad (23)$$

Para o caso simétrico proposto ($x=0.5$), os zeros são cancelados por um número correspondente de pólos, (*, notação para n_h e m_h depois de cancelados pólos e zeros)

$$m^*_h = 0; \quad n^*_h = \frac{n_h}{2} \quad (n_h \text{ par}); \quad n^*_h = \frac{n_h + 1}{2} \quad (n_h \text{ ímpar}) \quad (24)$$

e portanto obtém-se

$$n_Q > \frac{n_h + 1}{2} \quad (25)$$

como sendo a condição necessária para $|G_N|$ decair assintoticamente.

3.2.2 O Algoritmo

Com o filtro escolhido obtém-se a função de transferência, G_Q . A função de transferência do observador G_N , é obtida através da relação entre a função transferência do modelo condutor e a função transferência do filtro, Eq. (17).

A Equação (18) que descreve o estimador pode ser escrita na forma,

$$G_N(s) = \frac{\hat{Q}(s)}{T_M^*(s)} \quad (26)$$

e representada no domínio “z” como,

$$G_N = \frac{\sum_{i=0}^{n_n} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{n_n} a_i z^{-i}}, \quad (27)$$

obtendo-se

$$\hat{q}(k) = \sum_{i=0}^{n_n} b_i T_M^*(k-i) - \sum_{i=1}^{n_n} a_i \hat{q}(k-i) \Rightarrow \text{Equação diferença} \quad (28)$$

Se o problema inverso for resolvido off-line, o atraso de fase pode ser removido, adaptando uma filtragem de trás para frente. Pela filtragem reversa de um sinal no tempo, entendemos filtrar a seqüência do tempo reversa por:

$$f_k \rightarrow F(z) \quad e \quad f_{-k} \rightarrow \bar{F}(z)$$

$$1^\circ \text{ passo: } Q_F(z) = G_N(z) T_M^*(z); \quad 2^\circ \text{ passo: } Q_B(z) = G_Q(z) \bar{Q}_F(z); \quad 3^\circ \text{ passo: } \hat{Q}(z) = \bar{Q}_F(z)$$

Os passos acima descrevem o funcionamento do algoritmo. Logo aplicando transformada “z” na equação do segundo passo, obtemos mais uma equação diferença.

$$\hat{q}(k) = \sum_{i=0}^{n_n} b_i q(k-i) - \sum_{i=1}^{n_n} a_i \hat{q}(k-i) \Rightarrow \text{Equação diferença} \quad (29)$$

È possível se estimar o fluxo desconhecido, a partir das equações (28) e (29). Com os valores medidos de temperatura na posição $x=0.5$, faz-se uma primeira estimativa do fluxo, através da Eq.(29). Reverte-se a seqüência obtida no tempo e filtra-se este fluxo com a Eq.(28). Revertendo a seqüência de fluxo filtrada, têm-se o fluxo estimado.

4 - RESULTADOS

Para a análise do problema proposto obtém-se as temperaturas experimentais através da simulação numérica. Ou seja, supõe-se que o fluxo de calor, $q(t)$ seja conhecido obtendo-se então a solução do problema direto. Esta temperatura, acrescida de um ruído, ε_i , é assumida como a temperatura medida e é usada para a estimação do fluxo de calor cujo valor inicial é zero, ou seja,

$$Y(x,t) = T(x,t) + \varepsilon_i$$

A Figura 3 apresenta a distribuição de temperatura “experimental” no centro da amostra.

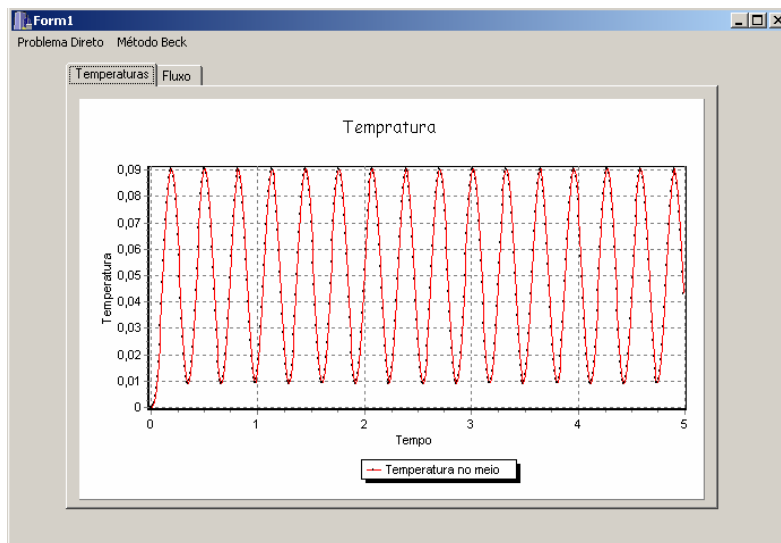


Figura 3: Dados de entrada, temperatura na posição $x=0.5$.

A Figura 4 apresenta uma comparação entre o fluxo de calor estimado usando-se a técnica de estimação seqüencial com função especificada e o observador dinâmico. Assume-se em ambos os casos como dados de entrada, a distribuição de temperatura mostrada na Figura 3, sem a presença de ruído.

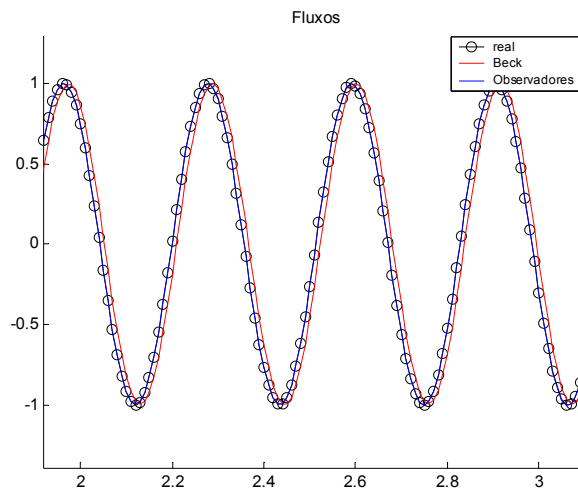


Figura 4: Comparação entre fluxo de calor real e estimado usando-se usando-se a técnica de estimação seqüencial com função especificada e o observador dinâmico sem a presença de ruído.

A Figura 5 apresenta uma comparação similar, porém agora considerando a presença de ruído experimental em torno de 20% do sinal da temperatura. Observa-se que uma vez que o método do observador filtra os dados minimizando o erro aleatório e erro sistemático, ele apresenta um melhor resultado na estimativa do fluxo de calor.

4. CONCLUSÃO

O método dos observadores se mostrou um método eficiente para a solução de problemas inversos em condução de calor e com grande potencial para ser aplicado em problemas multidimensionais uma vez que a função transferência pode ser obtida facilmente através de formulação integral ou séries de potência.

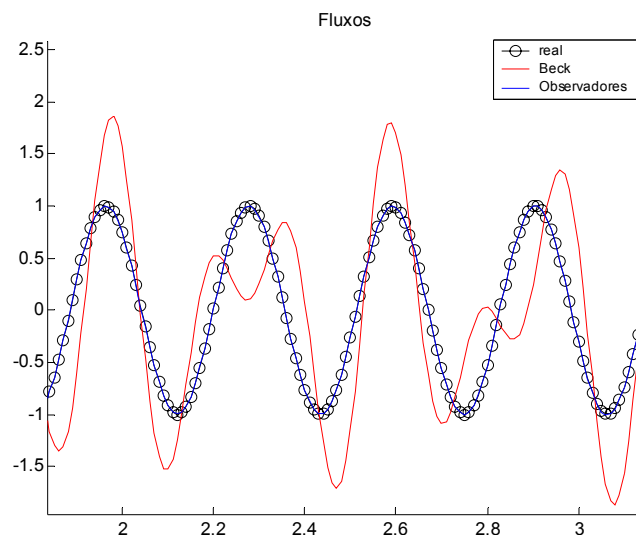


Figura 5: Comparação entre fluxo de calor real e estimado usando-se a técnica de estimação seqüencial com função especificada e o observador dinâmico na presença de 20% de ruído.

5. REFERÊNCIAS

- ALIFANOV, O. M., 1975 “Solution of na Inverse Problem of Heat Conduction by Iterations Methods”, Journal of Engineering Physics, Nov.10.
- BECK, J.V., BLACKWELL, B. & ST. CLAIR, C. R., 1985, “Inverse Heat Conduction, Ill-posed Problems”, Wiley Interscience Publication, New York.
- Blum, J.W. Marquardt, W., 1997“An optimal solution to inverse heat conduction problems based on frequency-domain interpretation and observers”, Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals, 32, December 1997, 453-478.
- ÖZISIK, M. N., 1993, “Heat Conduction”, John Wiley & Sons, New York.
- RAYNAUD, M. & SASSI, M., 1994, “Étude de Faisabilité de la Détermination des Températures et Flux Surfamiques Transitoires D’une Enveloppe Sphérique a Partir de Mesures de Températures Internes”, Rapport Final, Institut National des Sciences Appliquees de Lyon, 1994.
- TIKHONOV, A. N. & ARSENIN, V. Y., 1977, “Solutions of Ill-posed Problems”, Winston, Washington, DC, 1977.

USE OF DYNAMIC OBSERVERS IN THE STUDY OF INVERSE HEAT CONDUCTION PROBLEM

Priscila Ferreira Barbosa de Sousa

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Engenharia Mecânica
Bloco M – Campus santa Mônica
priscila@mecanica.ufu.br

Gilmar Guimarães

gguima@mecanica.ufu.br

Abstract: This work presents a new way to solve inverse heat conduction problems through of use the filter theory and control system. The derivation of optimal observer equations follows directly from a novel interpretation on inverse heat conduction in the frequency domain: solving the IHCP is viewed as a filter design problem in which the reconstructed heat flux is obtained by low-pass filtering of the true heat flux. It is demonstrated that the observers are easier to tune, yield a better trade-off between the deterministic bias and the sensitivity to measurement, and lead to smaller-size computational problems the other solutions approaches.

In order to evaluate the technique a comparison with the sequential specification method of Beck is presented.

Keywords: *Observers, inverse heat conduction, control, heat flux estimation, conduction*