



MODELAGEM MATEMÁTICA E SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO MOVIMENTO DE UM CILINDRO E UMA ESFERA EM QUEDA LIVRE

Diego Alves de Moro Martins

Universidade Federal de Uberlândia - UFU, Faculdade de Engenharia Mecânica
Laboratório de Transferência de Calor e Massa e Dinâmica dos Fluidos - LTCM
Av. João Naves de Ávila, 2160, Bairro Santa Mônica, CEP 38400-009, Uberlândia, MG
diegomoro85@yahoo.com.br

Aristeu da Silveira Neto

aristeus@mecanica.ufu.br

Resumo: Neste trabalho estuda-se o comportamento dinâmico de uma esfera e um cilindro em queda livre, em um movimento sem rotação, unidirecional somente na direção vertical, em meio infinito, em fluido Newtoniano, em duas dimensões. Desenvolveram-se soluções analíticas numéricas de uma EDO, utilizando-se de uma correlação para o coeficiente de arrasto. Os resultados são com uma solução numérica das equações de Navier-Stokes.

Palavras-chave: Queda livre, esfera, cilindro, solução analítica, solução numérica.

1. INTRODUÇÃO

A natureza do movimento de um objeto em queda livre foi, há muito tempo, tema de estudos da “Filosofia Natural”. Aristóteles afirmava que “o movimento para baixo de qualquer corpo pesado é tão mais rápido quanto maior for seu tamanho”. Somente séculos depois, quando Galileu Galilei (1564-1642), cientista italiano da Renascença, proclamou e publicou a verdade sobre este assunto, que ele conseguiu descobrir, lançando mão de experiências, é que a autoridade de Aristóteles sobre a questão foi seriamente abalada. Nos últimos anos de sua vida, Galileu escreveu um tratado, intitulado *Diálogos Sobre Duas Novas Ciências*, no qual apresenta seus estudos sobre os movimentos. Este tratado pode ser considerado como o marco inicial do estudo da dinâmica (Resnick e Halliday, 1981).

Desde a época de Aristóteles e Galileu o comportamento de um corpo em queda livre é estudado. Desde então estes estudos não pararam. E graças a estes é que hoje temos conhecimentos o suficiente para projetar um avião, um carro, etc. Uma das correlações entre um corpo em queda livre, e um projeto de um avião, é a aerodinâmica, que é um dos assuntos que estão embutidos neste relatório. O qual tem como principal fundamento à análise do comportamento dinâmico de uma esfera e de um cilindro em queda livre, em meio fluido.

2. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Este é um estudo que relata o comportamento dinâmico de uma esfera e de um cilindro em queda livre, em um movimento unidirecional na vertical, em meio infinito, em um fluido Newtoniano.

Quando um corpo está em queda livre na superfície terrestre, este sofre ações de três forças: A força gravitacional da terra, a resistência ao movimento que o meio provoca no corpo, e o empuxo do fluido.

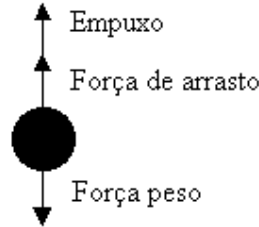


Figura 1: Esquema das forças atuantes em uma esfera em queda livre.

Para realizar a análise do comportamento dinâmico da esfera e do cilindro em queda livre, foi utilizado o princípio fundamental da dinâmica, a 2ª lei de Newton. Onde a taxa de variação no tempo (ou derivada) da quantidade de movimento de um ponto material é igual à soma das forças aplicadas neste ponto (Resnick e Halliday, 1981).

Utilizando a 2ª lei de Newton no estudo do corpo em queda livre foi obtida a Equação 1.

$$(F_p - F_e - F_d) = m_p \left(\frac{dV_p}{dT} \right) \quad (1)$$

Onde a força peso F_p subtraída da força de arrasto F_d e do empuxo F_e , é a resultante das forças aplicadas no corpo, que é igual à massa do corpo m_p multiplicada pela taxa de variação do tempo.

Para discretização da equação geral de um corpo em queda livre, foram utilizados sete métodos numéricos: o método numérico explícito, o método numérico implícito, o método de Adams-Bashfort de segunda ordem, o método de Crank-Nicolson ou método numérico misto, o método de Euler aperfeiçoado que é um método Runge-Kutta de 2ª ordem, e os métodos de Runge-Kutta de ordens superiores, na 3ª e na 4ª ordem, e um método semi-analítico.

Para realizar estes cálculos foram usados algoritmos na linguagem Dev-C++, e para plotagem dos gráficos foi usado o programa Tecplot. Os programas desenvolvidos dão a cada iteração sua respectiva velocidade, tempo, posição no eixo Oy , a força de arrasto e a aceleração da esfera.

3. DESENVOLVIMENTO DAS EQUAÇÕES

As equações abaixo representam respectivamente, a força peso, a força de arrasto e o empuxo (Fox e McDonald, 1988).

$$F_p = m_p g \quad (2)$$

$$F_d = \frac{C_d \rho_f V_p^2 A_p}{2} \quad (3)$$

$$F_e = V_p \rho_f g \quad (4)$$

A força peso é representada pela Equação 2, é o produto da massa do corpo m_p com a gravidade g . A força de arrasto representada pela Equação 3, tem como componentes, o coeficiente de arrasto C_d , a densidade do fluido ρ_f , a velocidade do corpo V_p , a área longitudinal do corpo A_p . E o empuxo representado pela Equação 4, é o produto do volume do corpo V_p a densidade do fluido ρ_f e a gravidade do corpo g .

Para o calculo da força de arrasto é necessário saber o valor do coeficiente de arrasto C_d da esfera e do cilindro, que é dado respectivamente pelas Equações 5 e 6 (White, 1991), onde ν_f é a viscosidade do fluido, D_p o diâmetro do corpo, e Re é o numero de Reynolds, que é representado pela Equação 7.

$$C_d = \frac{24\nu_f}{V_p D_p} + \frac{6}{1 + \sqrt{Re}} + 0,4 \quad (5)$$

$$C_d = 1 + \frac{10}{Re^{\frac{2}{3}}} \quad (6)$$

$$Re = \frac{V_p D_p}{\nu_f} \quad (7)$$

A equação geral de um corpo em queda livre é dada pela união das Equações 2, 3, 4 com a Equação 1.

$$\left(\frac{dV_p}{dT} \right) = \left(g - \frac{C_d \rho_f V_p^2 A_p}{2m_p} - \frac{V_p \rho_f g}{m_p} \right) \quad (8)$$

$$f(V_p) = \left(g - \frac{C_d \rho_f V_p^2 A_p}{2m_p} - \frac{V_p \rho_f g}{m_p} \right)$$

A equação 3.7 foi desenvolvida em oito métodos: o método numérico explícito, o método numérico implícito, o método de Adams-Bashfort de segunda ordem, o método de Crank-Nicolson ou método numérico misto, o método de Euler aperfeiçoado que é um método Runge-Kutta de 2ª ordem, os métodos de Runge-Kutta de ordens superiores, na 3ª e na 4ª ordem, o pelo método dos trapézios (Ruggiero e Lopes, 1988). Estes métodos são representados respectivamente pelas equações abaixo.

Método numérico explícito.

$$V_p^{n+1} = V_p^n + \Delta t \left(g - \frac{C_d \rho_f (V_p^n)^2 A_p}{2m_p} - \frac{V_p^n \rho_f g}{m_p} \right) \quad (9)$$

Método numérico implícito.

$$V_p^{n+1} = V_p^n + \Delta t \left(g - \frac{C_d \rho_f (V_p^{n+1})^2 A_p}{2m_p} - \frac{V_p \rho_f g}{m_p} \right) \quad (10)$$

Método de Adams-Bashfort de segunda ordem.

$$\frac{V_p^{n+1} - V_p^n}{\Delta t} = \frac{3}{2} f(V_p^n) - \frac{1}{2} f(V_p^{n-1}) \quad (11)$$

Método de Crank-Nicolson.

$$\frac{V_p^{n+1} - V_p^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} [f(V_p^{n+1}) + f(V_p^n)] \quad (12)$$

Método de Runge-Kutta de 2ª ordem.

$$\begin{aligned} V_p^{n+\frac{1}{2}} &= V_p^n + \left(\frac{2}{\Delta t} \right) f(V_p^n) \\ \frac{V_p^{n+1} - V_p^n}{\Delta t} &= f\left(V_p^{n+\frac{1}{2}}\right) \end{aligned} \quad (13)$$

Método de Runge-Kutta de 3ª ordem.

$$\begin{aligned} K_1 &= \Delta t f(V_p^n) \\ K_2 &= \Delta t f\left(V_p^n + \frac{K_1}{2}\right) \\ K_3 &= \Delta t f\left(V_p^n + \frac{3K_2}{4}\right) \\ V_p^{n+1} &= V_p^n + \frac{2K_1}{9} + \frac{K_2}{3} + \frac{4K_3}{9} \end{aligned} \quad (14)$$

Método de Runge-Kutta de 4ª ordem.

$$\begin{aligned} K_1 &= \Delta t f(V_p^n) \\ K_2 &= \Delta t f\left(V_p^n + \frac{K_1}{2}\right) \\ K_3 &= \Delta t f\left(V_p^n + \frac{K_2}{2}\right) \\ K_4 &= \Delta t f(V_p^n + K_3) \\ V_p^{n+1} &= V_p^n + \frac{1}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \end{aligned} \quad (15)$$

Método dos trapézios.

$$\int_0^{V_p(t)} \frac{dV_p}{f(V_p)} = t$$

$$\Delta V_p = \frac{V_p \tau}{n} \quad (16)$$

$$V_p^n = n \Delta V_p$$

$$t_n = t_{n-1} + f(V_p^n) \Delta V_p$$

4. RESULTADOS E ANÁLISES GRÁFICAS

Os resultados foram obtidos dos métodos utilizados, usando os dados do cilindro, que estão na Tabela 1.

Tabela 1: Características do corpo e do fluido.

Propriedades	S.I.
Diâmetro do cilindro	0,01 m
Profundidade do cilindro	Unitária
Densidade do cilindro	3 kg/m ³
Densidade do fluido	1 kg/m ³
Viscosidade do fluido	0,0001 Kg/ms
Variação de tempo	0,01 s

A Figura 2 indica a velocidade do cilindro em função de tempo, e compara todos os métodos utilizados, a Figura 3 compara as posições em relação ao tempo.

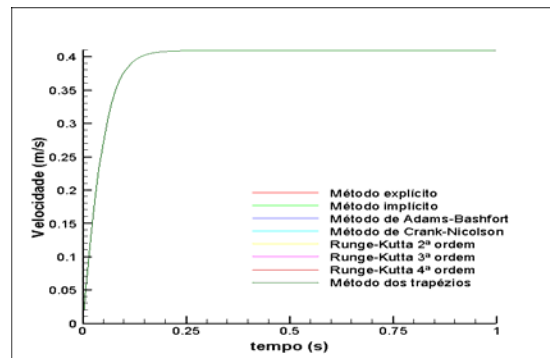


Figura 2: Gráfico da velocidade em função de tempo, comparando os métodos utilizados.

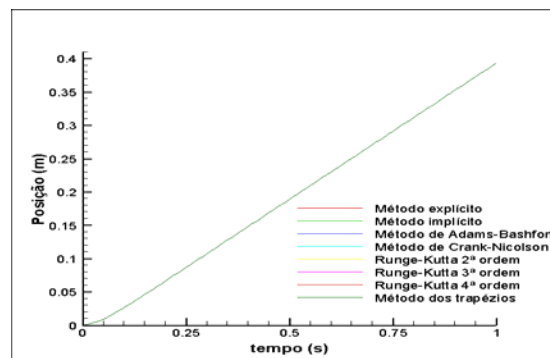


Figura 3: Gráfico da posição em função de tempo, comparando os métodos utilizados.

As Figuras 4 e 5 representam respectivamente os gráficos da aceleração em função do tempo, e da soma da força de arrasto com o empuxo em função do tempo.

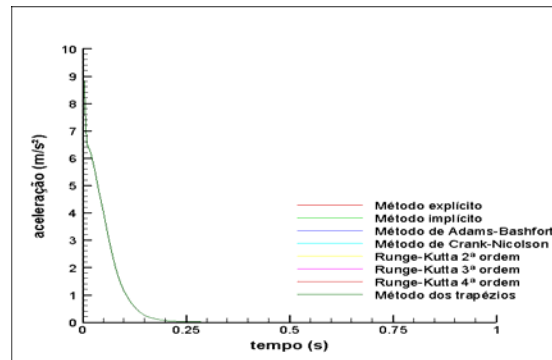


Figura 4: Gráfico da aceleração em função do tempo, comparando os métodos utilizados.

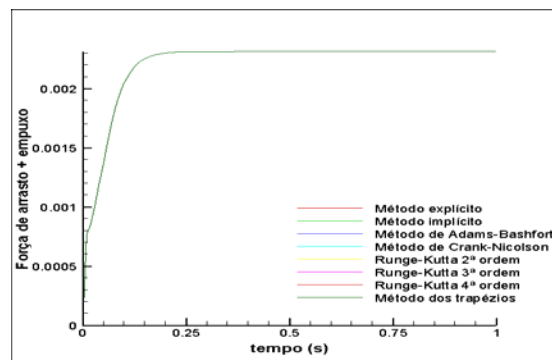


Figura 5: Gráfico da força de arrasto somada ao empuxo em relação ao tempo.

A Figura 6 compara a solução analítica desenvolvida explicitamente, com uma solução numérica desenvolvida pelas equações de Navier-Stokes.

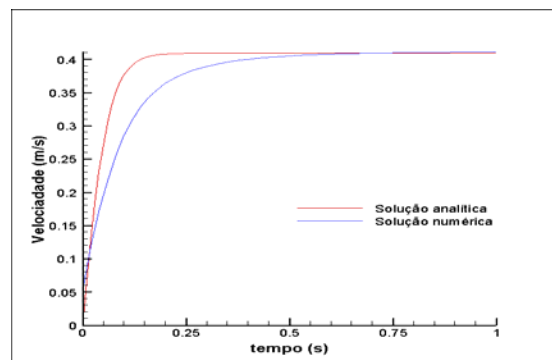


Figura 6: Gráfico de velocidade comparando a solução analítica com a numérica.

As figuras abaixo comparam as sensibilidades aos espaços de tempo utilizados em cada método, tendo como corpo à esfera, com os dados da Tabela 2.

Tabela 2: Características do corpo e do fluido.

Propriedades	S.I.
Diâmetro da esfera	0,05 m
Densidade da esfera	7870 kg/m ³
Densidade do fluido	1,225 kg/m ³
Viscosidade do fluido	1,45 x 10 ⁻⁵ m ² /s

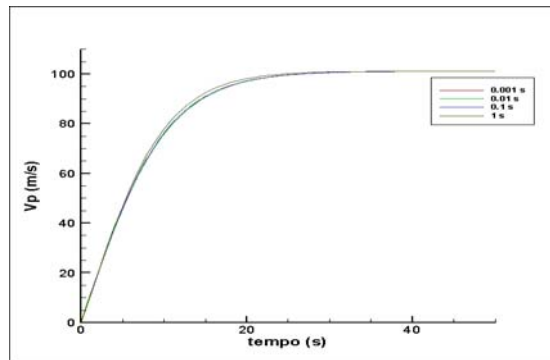


Figura 7: Gráfico de comparação da sensibilidade ao espaço de tempo do método explícito.

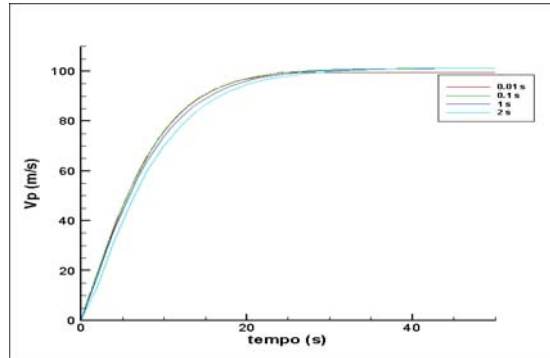


Figura 8: Gráfico de comparação da sensibilidade ao espaço de tempo do método implícito.

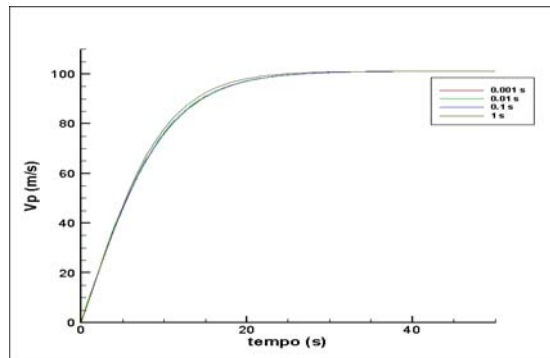


Figura 9: Gráfico de comparação da sensibilidade ao espaço de tempo do método de Adams-Bashfort.

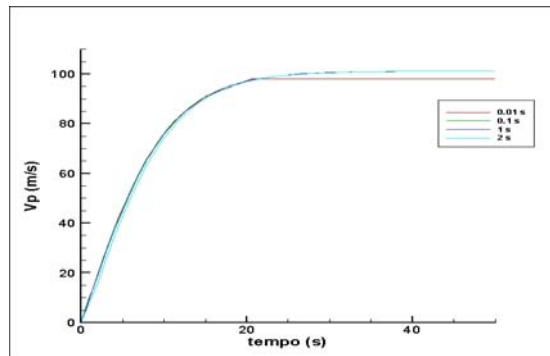


Figura 10: Gráfico de comparação da sensibilidade ao espaço de tempo do método de Crank-Nicolson.

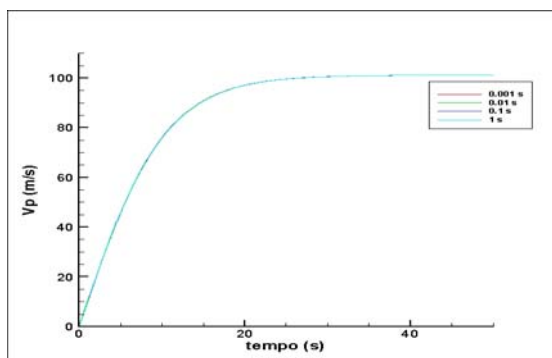


Figura 11: Gráfico da sensibilidade ao espaço de tempo do método Runge-Kutta 2ª ordem.

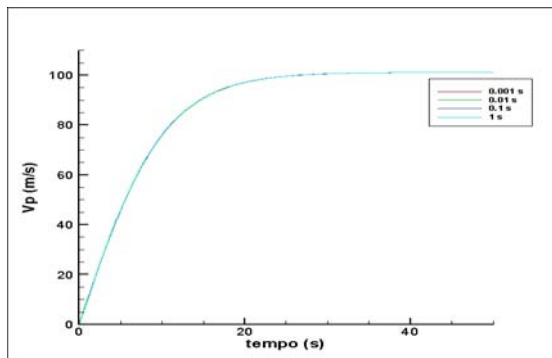


Figura 12: Gráfico da sensibilidade ao espaço de tempo do método Runge-Kutta 3ª ordem.

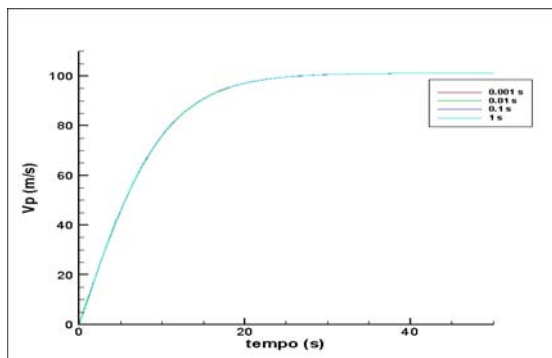


Figura 13: Gráfico da sensibilidade ao espaço de tempo do método Runge-Kutta 4ª ordem.

5. ANÁLISE DE CUSTOS E BENEFÍCIOS DOS MÉTODOS UTILIZADOS

Esta é uma análise que compara os custos e os benefícios dos métodos utilizados neste estudo, com base nos gráficos apresentados no capítulo 5. No requisito custo, foi analisado o tempo de processamento (tempo que o computador gasta para processar dados) dos programas, de cada método utilizado, e a complexidade das equações. No requisito benefício, foi analisada a eficiência de cada método, em determinados passos de tempos. Abaixo uma relação dos métodos utilizados:

Método numérico explícito: Em cálculos com espaços de tempo diminutos este método tem precisão refinada, apresentando um transiente bem coerente, e convergindo corretamente. Tendo como conseqüente suas características, este método é utilizado em cálculos mais refinados. O Método numérico explícito é um método de custo baixo, pois suas equações são simples e seu tempo de processamento é relativamente curto.

Método numérico implícito: Este método é utilizado em cálculos onde os espaços de tempo são relativamente mais longos. Pelo fato deste conseguir corrigir seu transiente apresentando-o com coerência, e realizando a convergência corretamente. Quando utilizado em cálculos com espaços de tempo mais curtos, por exemplo, 0,001s, os resultados apresentam um transiente correto, mais uma convergência precoce. O tempo de processamento deste método é relativamente baixo, mas as equações utilizadas sustentam uma certa complexidade, o que o torna um método de médio custo.

Método semi-analítico: O método semi-analítico é bem eficaz, apresentando bons resultados utilizando espaços de tempo curtos e longos, com transientes coerentes e com convergências corretas. Porém é um método com custo alto, com equações complexas e um tempo de processamento relativamente alto.

Método de Adams-Bashfort: O método de Adams-Bashfort tem as características semelhantes com as do método numérico explícito, com eficácia nos cálculos com espaços de tempo curtos. Porém este método tem maior precisão em espaços de tempos médios.

O custo do método de Adams-Bashfort é médio, Por consequência de suas equações, que são maiores, e pelo seu tempo de processamento que é relativamente médio.

Método de Crank-Nicolson: Também conhecido como método misto, este método tem as vantagens e desvantagens do método numérico implícito. Com grande capacidade de corrigir o transiente quando o espaço de tempo é relativamente extenso, acarretando uma convergência correta. E a deficiência em convergir com espaços de tempo diminutos.

O método misto tem custo relativamente médio, pelo fato de suas equações serem maiores e seu tempo de processamento ser mais longo.

Método de Runge-Kutta (2ª ordem): O método de Runge-Kutta de segunda ordem, consegue produzir resultados coerentes para cálculos com espaços de tempo relativamente pequenos e longos também. Este é um método de médio custo, pois suas equações são complexas, e seu tempo de processamento é relativamente médio.

Método de Runge-Kutta (3ª ordem): Este método tem as mesmas características do método de 2ª ordem de Runge-Kutta. Este é um método de custo alto, por consequência de suas complexas equações, e seu longo tempo de processamento.

Método de Runge-Kutta (4ª ordem): Quando se é utilizados pequenos espaços de tempo, este método é de boa precisão. Com transientes corretos e convergências precisas. O mesmo acontece quando se usa espaço de tempo relativamente maior. O método de Runge-Kutta de Quarta ordem tem um custo alto, pois são várias as equações usadas neste método, e também seu tempo de processamento é relativamente longo.

6. AGRADECIMENTOS

Agradeço ao conselho nacional de desenvolvimento científico e tecnológico pelo apoio financeiro, ao laboratório de transporte de calor e massa e dinâmica dos fluidos da Universidade Federal de Uberlândia pelo espaço e equipamentos utilizados neste estudo e ao professor Aristeu da Silveira Neto pela orientação neste trabalho.

7. REFERÊNCIAS

- Breck, W. G., R. J. C. Brown, J. D., McCoway, "Chemistry for science and engineering", 1981.
 Canuto, C., M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, T. A. Zang, "Spectral methods in fluid dynamics", 1986.
 Fox, R. W., and A. T. McDonald, "Introdução à mecânica dos fluidos.", 1988.
 Resnick, R., and D. Halliday, "Física vol. 1", 1981.
 Ruggiero, M. A. G., and V. L. R. Lopes, "Calculo numérico aspectos teóricos e computacionais", 1988.
 Simmons, G. F., "Cálculo com geometria analítica", 1987.
 White, F. M., "Viscous fluid flow", 1991.

MATHEMATIC MODEL AND NUMERICAL SIMULATION OF THE MOTION OF A SPHERE AND A CILINDER IN FREE FALL

Diego Alves de Moro Martins

Universidade Federal de Uberlândia - UFU, Faculdade de Engenharia Mecânica
Laboratório de Transferência de Calor e Massa e Dinâmica dos Fluidos - LTCM
Av. João Naves de Ávila, 2160, Bairro Santa Mônica, CEP 38400-009, Uberlândia, MG
diegomoro85@yahoo.com.br

Aristeu da Silveira Neto

aristeus@mecanica.ufu.br

Abstract: *In this work is study the dynamic comportment of a sphere and a cylinder in free fall, in a motion without rotation, unidirectional in a vertical direction, in an infinity way, in a Newtonians fluid, in two dimensions. It was developed analytics numerical solutions of an ODE, utilizing a drag coefficient correlation. The results are with a numerical solution of Navier-Stokes equations.*

Keywords: *free fall, sphere, cylinder, analytic solution, numerical solution.*