



SIMULAÇÃO NUMÉRICA DA CONVECÇÃO NATURAL ENTRE DOIS CILINDROS CONÊNTRICOS VERTICAIS

Elie Luis Martínez Padilla

Faculdade de Engenharia Mecânica - Universidade Federal de Uberlândia
Campus Santa Mônica - Bloco 1M
Av. João Naves de Ávila, 2.121, 38400-902 - Uberlândia - MG - Brasil
e-mail: epadilla@mecanica.ufu.br

José Eduardo Santos Oliveira

e-mail: jeolivei@mecanica.ufu.br

Aristeu da Silveira-Neto

e-mail: aristeus@mecanica.ufu.br

Resumo: *Escoamentos entre cilindros concêntricos têm uma diversidade de aplicações práticas e tecnológicas, motivo pela qual existe uma constante preocupação em aprofundar os conhecimentos existentes. A convecção natural laminar no interior de cavidades formadas por dois cilindros concêntricos verticais, com temperatura imposta em ambas às superfícies dos cilindros, é estudada numericamente resolvendo as equações de Navier-Stokes e de conservação de energia. Utiliza-se o método dos volumes finitos com malhas deslocadas e esquemas temporal e espacial de segunda ordem na discretização das equações tridimensionais que representam o escoamento. Apresenta-se o comportamento padrão do escoamento para diferentes números de Rayleigh, com análise do coeficiente de troca de calor e das diferentes variáveis representativas da dinâmica do escoamento.*

Palavras-chave: *convecção natural, cilindros concêntricos, escoamento laminar*

1. INTRODUÇÃO

O estudo da convecção natural em cavidades anulares formadas por dois cilindros verticais concêntricos é de considerável importância em problemas de engenharia, uma vez que esta configuração pode ser tomada como uma representação simplificada de muitas situações práticas em diversas áreas da engenharia (nuclear, solar, mecânica). Pode-se citar, por exemplo, estudo da transferência de calor em cavidades anulares formadas entre as varetas de combustível e as paredes do vaso de pressão em um reator nuclear. Também a determinação experimental das propriedades térmicas dos fluidos pode ser feita, confinando o fluido entre dois cilindros aquecidos. Em casos como estes não é importante conhecer o calor total transferido, é necessário separar os efeitos determinando, por exemplo, somente a parcela de calor transferida por condução e conseqüentemente a determinação correta de cada uma das propriedades térmicas do fluido. Neste sentido muitos esforços vêm sendo dedicado no sentido de minimizar os efeitos da convecção natural nos experimentos (Lipkea e Springer, 1968).

A diferença de temperatura entre as paredes do cilindro faz com que o fluido se movimente por convecção natural dentro da cavidade. O fluido inicia um movimento ascendente junto à parede do cilindro aquecido, descendo em seguida ao encontrar o cilindro mais frio. Mostra-se que a física do problema é governada essencialmente por quatro parâmetros: razão de aspecto da cavidade anular, razão entre os raios externo e interno dos cilindros, e pelos números de Prandtl e Rayleigh, (Choi e Korppela, 1980).

A avaliação da influência de cada um destes parâmetros sobre o tipo de escoamento desenvolvido no interior da cavidade, bem como a completa caracterização topológica e estudo da transição representam a maior parte das pesquisas sobre esta configuração, um bom histórico sobre trabalhos desenvolvidos sobre este tema pode ser encontrado em Ball (1987).

Simulações numéricas podem ser usadas neste tipo de análise auxiliando, por exemplo, no projeto de experimentos; determinando a configuração que leve a isolar os efeitos convectivos de modo a avaliar somente a condutividade do gás ou auxiliando no estudo mais detalhado do fenômeno. Um dos primeiros estudos numéricos sobre o fenômeno foi desenvolvido por Vahl Davis e Thomas (1969), que estudou a influência dos parâmetros geométricos no escoamento para números de Rayleigh até 2×10^4 (escoamento laminar).

Neste trabalho são apresentados resultados da simulação numérica do escoamento devido a convecção natural em uma cavidade anular vertical. Foram simulados escoamentos para vários números de Rayleigh, no regime laminar, para uma configuração geométrica. Os resultados do presente trabalho foi comparado com resultados numéricos da literatura verificando uma boa concordância.

2. PROBLEMA FÍSICO

A configuração geométrica do problema físico a ser estudado consiste de uma cavidade formada por dois cilindros concêntricos verticais isotérmicos de raios R_i e R_o , como mostrado na Fig. 1, com a temperatura $T_i > T_o$. A cavidade está preenchida com fluido de viscosidade cinemática ν , difusividade térmica α , coeficiente de expansão térmica β e condutividade térmica κ .

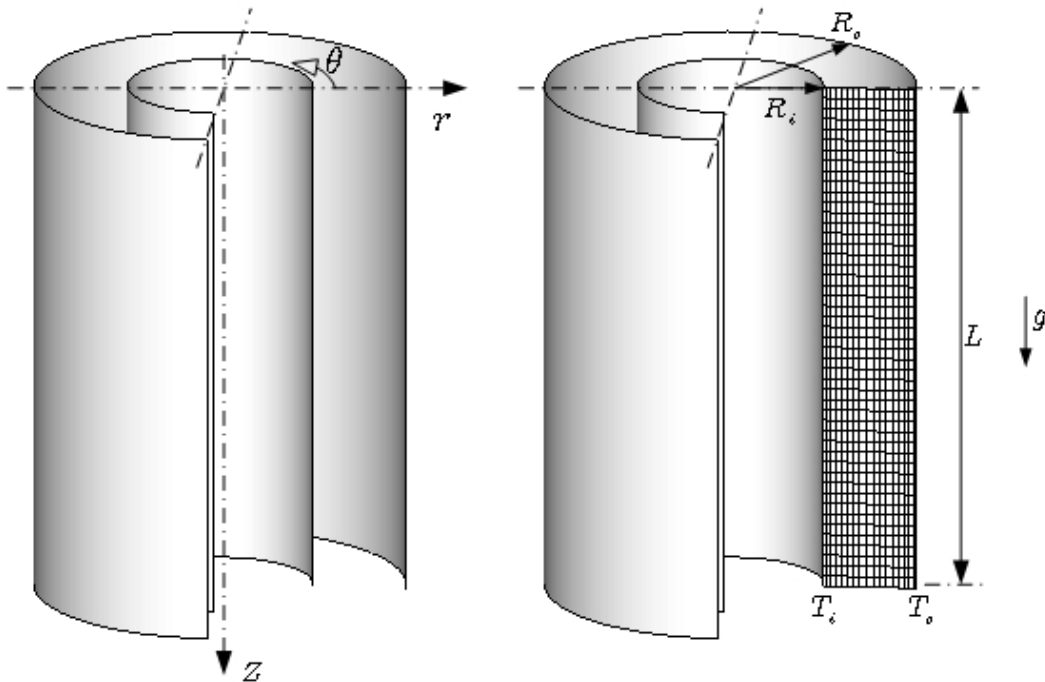


Figura 1: Representação esquemática do problema físico.

Em função do espaçamento entre os cilindros $R = (R_o - R_i)$ e do comprimento axial L , define-se os parâmetros geométricos adimensionais: a relação de raios $\eta = R_o/R_i$ e razão de aspecto $\gamma = L/R$. Outros dois parâmetros adimensionais importantes para este problema são o número de Rayleigh (Ra) e o número de Prandtl (Pr):

$$Ra = \frac{g\beta(T_i - T_o)R^3}{\nu\alpha} \quad \text{e} \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \quad (1)$$

onde g é a aceleração da gravidade. O escoamento se inicia devido a ação da força de empuxo causada pela diferença de temperatura entre os cilindros.

3. MODELO MATEMÁTICO

O escoamento é governado pelas equações de conservação de massa, quantidade de movimento e conservação de energia, aplicadas a um escoamento incompressível para um fluido Newtoniano com propriedades físicas constantes, exceto para o termo de empuxo onde são consideradas variações de densidade.

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_j} - \frac{Ra}{Pr} T g_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(u_j T)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{1}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right] \quad (4)$$

onde u representa o campo de velocidade, p o campo de pressão e T o campo de temperatura. O termo de empuxo é modelado pela hipótese de Boussinesq, onde a variação na densidade do fluido é dada pelo gradiente de temperatura.

Para estas equações, foram impostas como condições de contorno para a velocidade não-deslizamento e impermeabilidade nas direções radial e axial. Para temperatura, paredes isotérmicas ($T_i > T_o$) e derivada nula na direção axial. Foi imposta condição de periodicidade para todas as variáveis na direção tangencial.

4. PROCEDIMENTO NUMÉRICO

Para a discretização das equações usou-se o método dos volumes finitos com malhas deslocadas, considerando esquemas de segunda ordem no espaço e no tempo: diferenças centradas e Adams-Bashforth, respectivamente. Método de acoplamento pressão-velocidade do tipo passo fracionado (Kim e Moin, 1985) com dois passos, o passo preditor dado por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} = & \frac{3}{2} \left[-\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right]^n \\ & - \frac{1}{2} \left[-\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right]^{n-1} - \frac{\partial p^n}{\partial x_i} - \rho g_i, \end{aligned} \quad (5)$$

e o passo corretor:

$$u_i^{n+1} = u_i^* - \left(\frac{dt}{\rho} \right) \left(\frac{\partial p'}{\partial x_i} \right). \quad (6)$$

A correção da pressão é obtida por:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p'}{\partial x_i} \right)^{n+1} = \frac{1}{dt} \left[\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} \right], \quad (7)$$

que é a equação de Poisson para a pressão resolvida usando o método SIP (Strongly Implicit Procedure) proposto por Stone (1968).

5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Foram simulados escoamentos na faixa de $10^3 \leq Ra \leq 10^5$ para um fluido de Prandtl unitário em uma cavidade de $\eta = 2$ e $\gamma = 5$, com malha $20 \times 2 \times 80$ nas direções radial, tangencial e axial, respectivamente. Todas as simulações realizadas abaixo do regime crítico de transição a turbulência. Para a apresentação dos resultados define-se as seguintes variáveis adimensionais:

$$X = \frac{(r - R_i)}{(R_o - R_i)}, \quad Z = \frac{z}{L}, \quad U = \frac{uR}{\alpha}, \quad V = \frac{vL}{\alpha} \quad \text{e} \quad \theta = \frac{(T - T_o)}{(T_i - T_o)}.$$

Define-se também o número de Nusselt (Nu) que é o coeficiente médio de transferência de calor local dado por:

$$Nu = - \int_0^1 \frac{\partial \theta}{\partial X} \Big|_{X=0} dZ. \quad (7)$$

Na Fig. 2 apresenta-se uma comparação do Nu global em função do Ra , calculado no presente trabalho com os resultados obtidos por Vahl Davis e Thomas (1969). Observa-se que o coeficiente de transferência de calor aumenta a medida que o Ra é incrementado, como consequência da predominância do processo convectivo. Sendo que para menores valores de Ra o processo de transferência de calor se dá basicamente por condução. Os resultados apresentam uma boa concordância com os resultados da referência chegando a uma diferença máxima na ordem de 6%, correspondente ao caso de $Ra = 1 \times 10^5$.

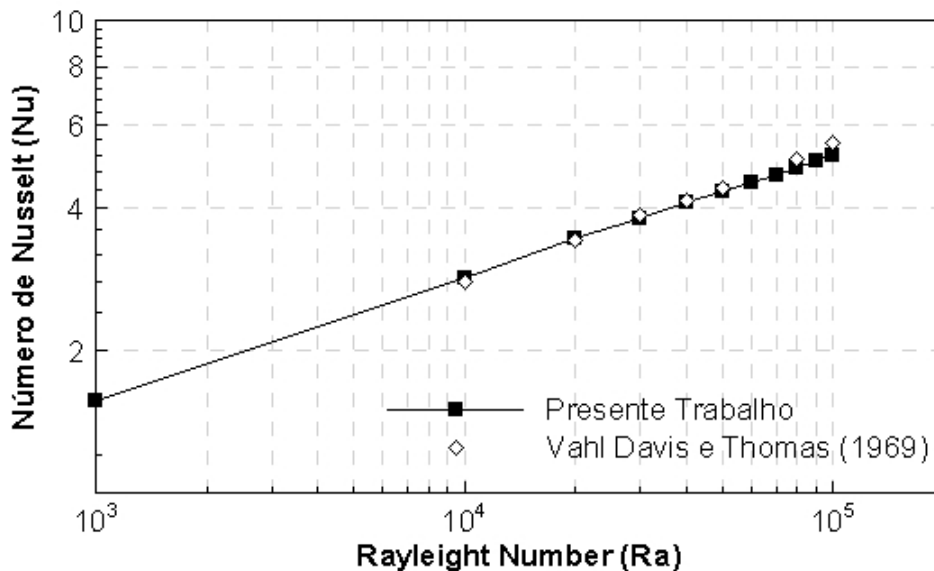


Figura 2: Nusselt global em função do Rayleigh, comparação com as simulações de Vahl Davis e Thomas (1969).

Nas Fig. 3 e 4 são apresentadas visualizações dos campos de temperatura e linhas de corrente para o regime permanente. Observa-se, na Fig. 3, que para $Ra = 1 \times 10^3$ a transferência de calor entre os cilindros ocorre quase exclusivamente por condução. Note que as isotermas estão bastante alinhadas com as paredes, indicando a presença de um gradiente de temperatura aproximadamente constante ao longo de toda a direção axial. A medida em que se aumenta o Ra a distorção das isotermas na parte superior da cavidade vão se amplificando, devido ao aumento da força de empuxo e a condição de contorno imposta na parede superior da cavidade (adiabática). A camada limite térmica formada próxima às superfícies interna e externa dos cilindros torna-se menos espessa com o incremento do Ra .

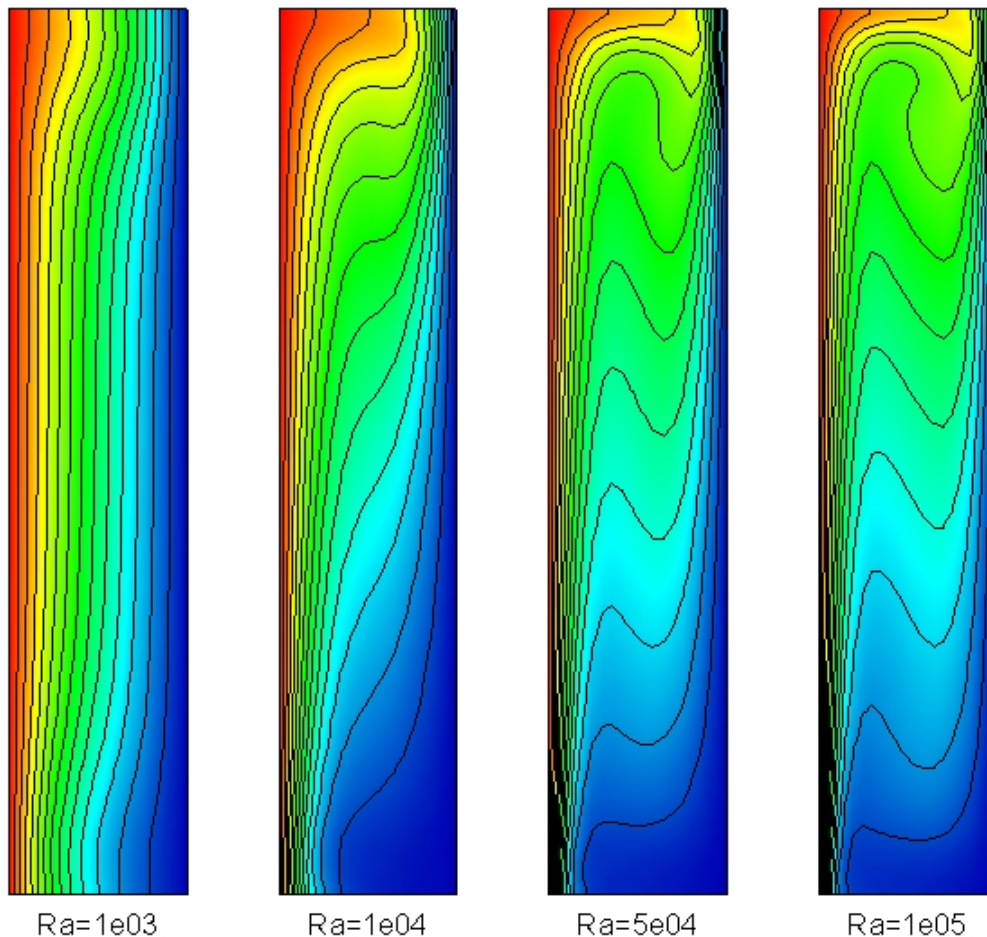


Figura 3: Campos de temperatura, regime permanente, para diversos números de Rayleigh.

Para $Ra = 1 \times 10^3$ verifica-se, na Fig. 4, o desenvolvimento de apenas uma célula recirculante aproximadamente simétrica com respeito ao plano radial médio ($X = 0, 5$).

O escoamento ocorre no sentido horário, promovido pela diferença de temperatura entre as superfícies dos cilindros, isso faz com que a força de empuxo leve o fluido, junto a parede do cilindro interno ($\theta = 1$), a movimentar no sentido ascendente até a parte superior da cavidade.

Nota-se que para $Ra = 1 \times 10^4$ o centro da recirculação se desloca em direção a parte superior da cavidade, devido aos efeitos convectivos mais intensos; mas com a presença ainda de apenas uma recirculação e assimetria notória. Uma recirculação secundária começa a surgir na parte superior da cavidade para $Ra = 5 \times 10^4$. Para o $Ra = 1 \times 10^5$ a recirculação secundária é mais evidente e está localizada no quarto superior da cavidade, influenciando na modificação do padrão do escoamento que agora passa a ser multicelular. A recirculação principal se desloca para próximo do plano axial médio da cavidade ($Z = 0, 5$). A presença da recirculação secundária, intensifica a distorção das isotermas.

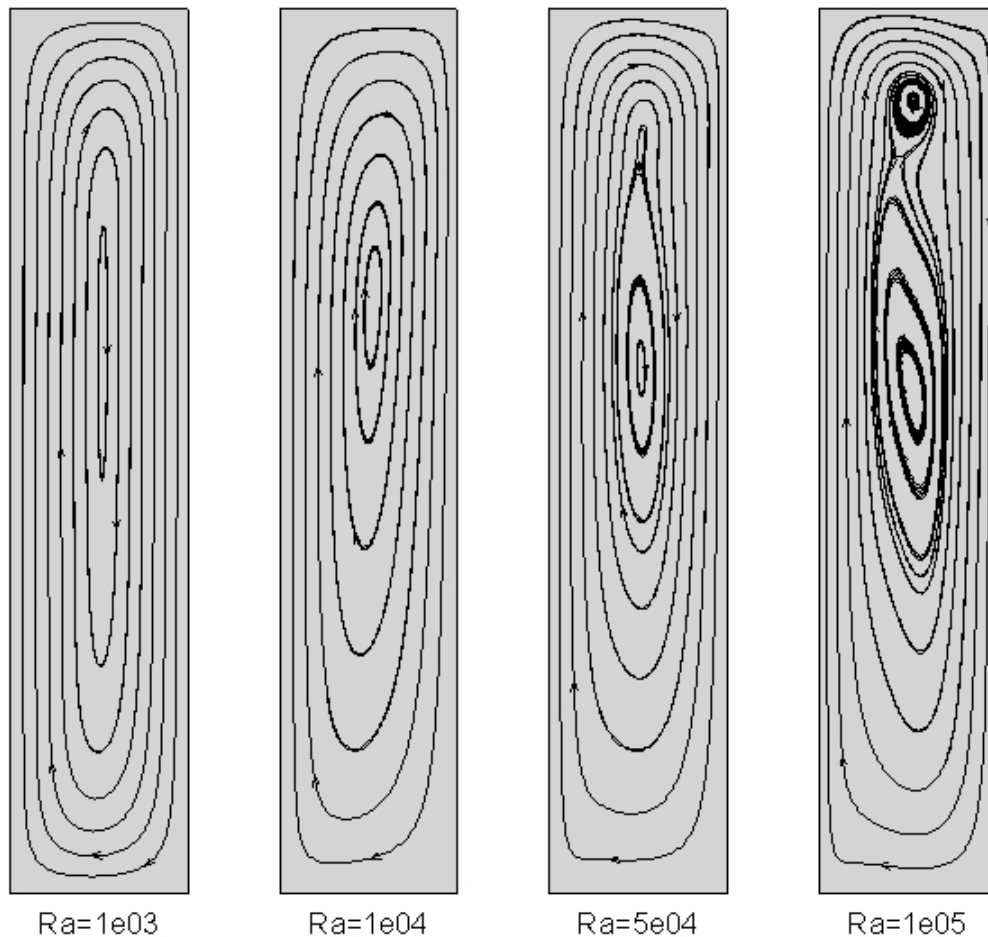


Figura 4: Linhas de corrente, regime permanente, para diversos números de Rayleigh.

Perfis das componentes da velocidade foram extraídos ao longo de planos médios da cavidade, os resultados são apresentados na Fig. 5. A velocidade axial (Fig. 5-a) nas proximidades das superfícies evidencia o desenvolvimento da camada limite, a qual torna-se mais fina a medida em que se aumenta o Ra . Junto a parede fria os gradientes de velocidade são menos intensos. Para $Ra = 1 \times 10^5$ observa-se uma assimetria mais acentuada do perfil de velocidade axial, devido a distorção da recirculação principal, ocasionada pela presença da célula secundária.

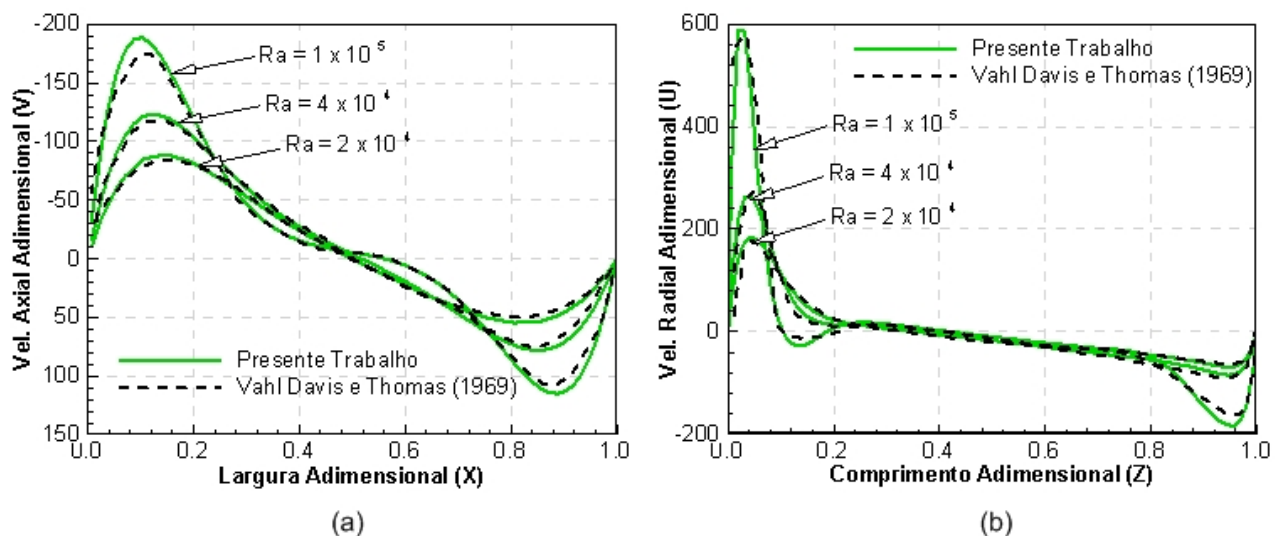


Figura 5: Distribuição da velocidade axial e radial nos planos médios da cavidade ($X=0,5$ e $Z=0,5$).

A presença das duas células de recirculação que foram observadas na Fig. 4 para o caso de $Ra = 1 \times 10^5$ provoca o aparecimento de dois pontos de inflexão no perfil de velocidade radial (Fig. 5-b). Os perfis de velocidade radial são predominantemente negativos a partir de $Z > 0,2$ para todos os Ra mostrados, indicando que o centro da recirculação está mais próximo da parede fria. Observa-se também que a magnitude desta componente da velocidade na parte superior da cavidade é cerca de 3 vezes maior do que na parte inferior.

As distribuições da velocidade calculadas mostram uma boa concordância, tanto em magnitude quanto em tendência, com os dados de Vahl Davis e Thomas (1969).

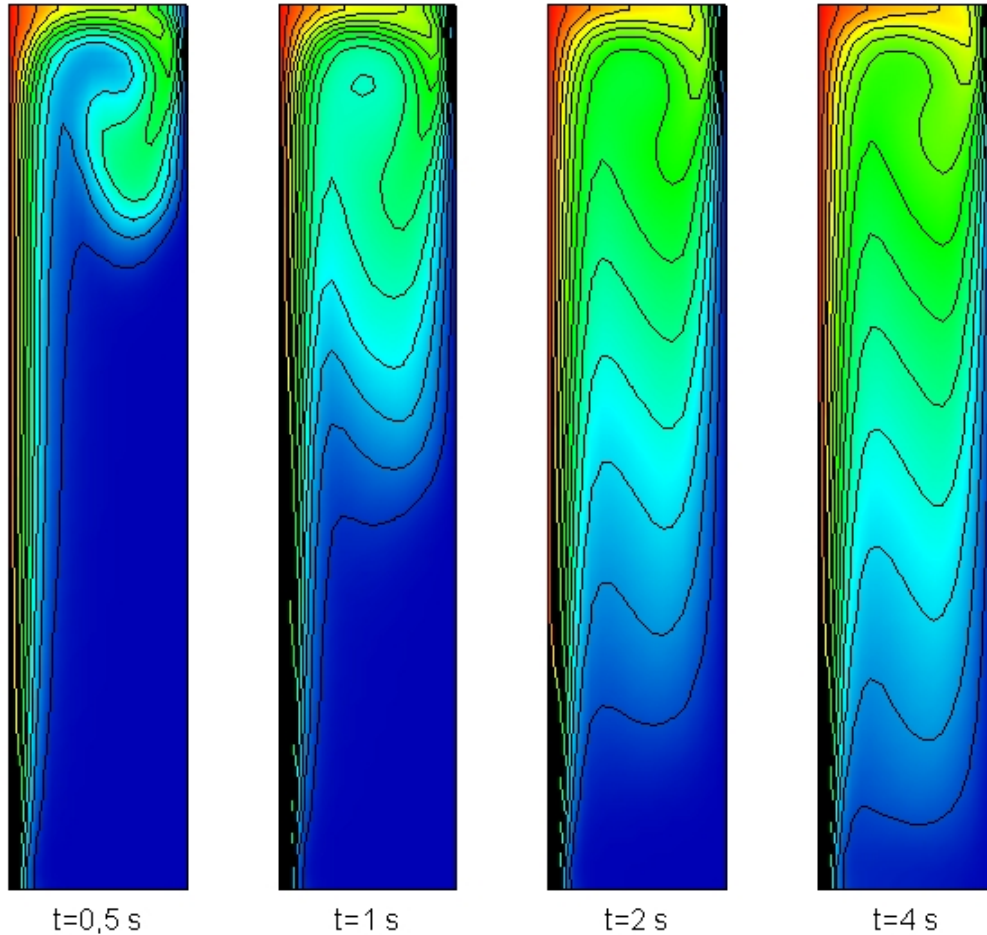


Figura 6: Evolução temporal do campo de temperatura na cavidade para $Ra = 1 \times 10^5$.

A evolução temporal dos campos de temperatura e linhas de corrente, para $Ra = 1 \times 10^5$ são mostradas nas Fig. 6 e 7, respectivamente. Inicialmente o fluido é aquecido nas proximidades da parede do cilindro interno, e então conduzido pela força de empuxo até a parte superior da cavidade. Parte do fluido quente localizado na parte superior entra em contato com a parede fria e então desloca-se para parte inferior da cavidade, iniciando o movimento recirculatório. Como o gradiente de temperatura junto a parede interna é maior no início do escoamento ($t = 0,5 \text{ s}$), a velocidade de ascensão é mais elevada do que a de descida, o que faz com que o fluido quente se acumule na parte superior da cavidade ($t = 0,5$ e 1 s). Nos instantes posteriores observa-se que o calor se propaga em direção a região inferior da cavidade, esse processo termina com o estabelecimento do regime permanente que acontece a partir dos 9 s .

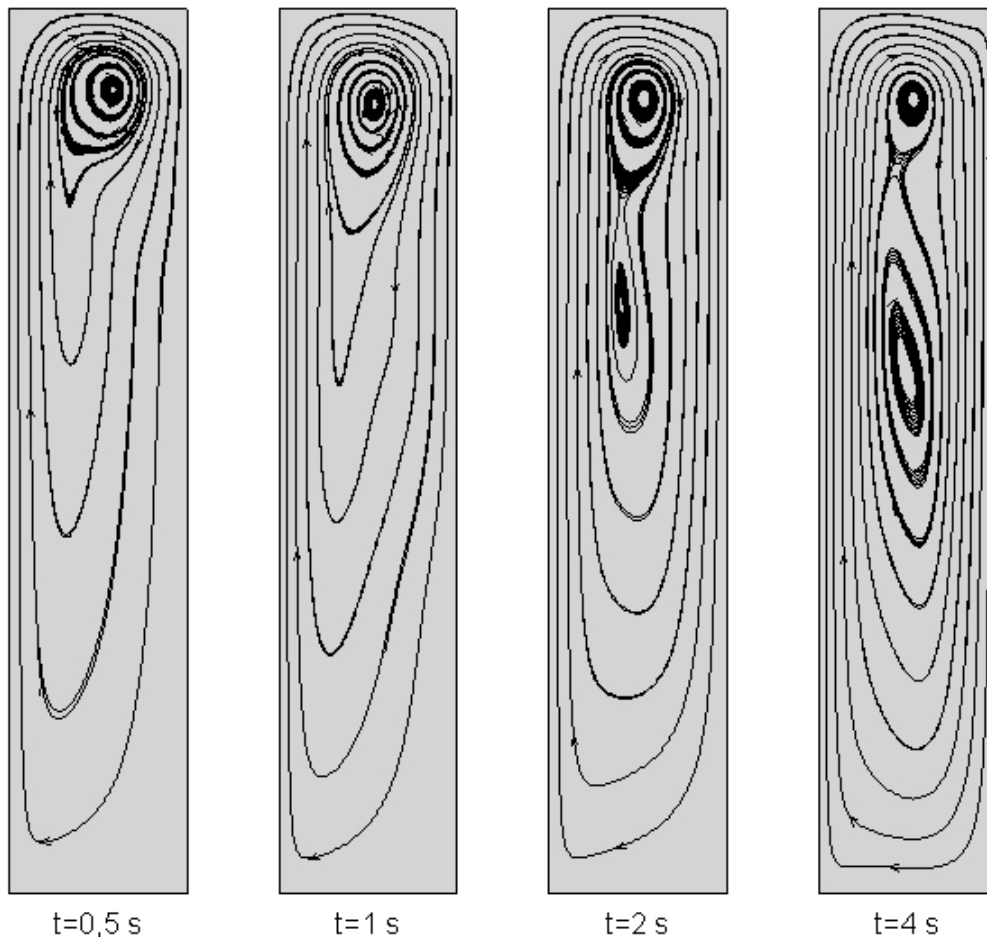


Figura 7: Evolução temporal das linhas de corrente na cavidade para $Ra = 1 \times 10^5$.

6. CONCLUSÕES

A convecção natural laminar no interior de cavidades cilíndricas verticais foi estudada. Os resultados reproduzem adequadamente o padrão do escoamento e sua influência sobre o processo de transferência de calor. A configuração geométrica foi mantida constante ($\eta = 2$ e $\gamma = 5$), sendo estudado a influência do número de Rayleigh. Os resultados apresentados mostram boa concordância com valores da referência. A ferramenta numérica mostrou-se apropriada para análise de escoamentos com transferência de calor. O que motiva, em etapas futuras, a implementação de modelos de turbulência para a análise de escoamentos instáveis.

7. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq, FAPEMIG e CENPES/PETROBRAS, pelo auxílio financeiro.

8. REFERÊNCIAS

- Ball, K. S., 1987. Mixed Convection Heat Transfer in Rotating Systems. PhD thesis, Drexel University.
- Choi, I. G. & Korppela, S. A., 1980. Stability of the conduction regime of natural convection in a tall vertical annulus. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 99, pp. 725–738.
- Kim, J. & Moin, P., 1985. Application of a fractional step method to incompressible navier-stokes equations. *Journal of Computational Physics*, vol. 59, pp. 308–323.

- Lipkea, W. H. & Springer, G. S., 1968. Heat transfer through gases contained between two vertical cylinders at different temperatures. *International of Heat and Mass Transfer*, vol. 11, pp. 1341–1350.
- Stone, H. L., 1968. Iterative solution of implicit approximations of multidimensional partial differential equations. *SIAMJ Numer. Anal.*, vol. 5, pp. 530–558.
- Vahl Davis, G. & Thomas, R. W., 1969. Natural convection between concentric vertical cylinders. *Physics Fluids (Supplement II)*, vol. 12, pp. 198–207.

NUMERICAL SIMULATION OF THE NATURAL CONVECTION BETWEEN TWO CONCENTRIC VERTICAL CYLINDERS

Elie Luis Martínez Padilla

Faculdade de Engenharia Mecânica - Universidade Federal de Uberlândia
Campus Santa Mônica - Bloco 1M
Av. João Naves de Ávila, 2.121, 38400-902 - Uberlândia - MG - Brasil
e-mail: epadilla@mecanica.ufu.br

José Eduardo Santos Oliveira

e-mail: jeolivei@mecanica.ufu.br

Aristeu da Silveira-Neto

e-mail: aristeus@mecanica.ufu.br

Abstract: *Natural convection in a closed annular cavity formed by two concentric vertical cylinders is a very common problem in many practical and technologic applications. In the present study three-dimensional analysis of the natural convection was study by the numerical solution of the Navier-Stokes and energy equations. The finite volume method is applied in cylindrical coordinates with a staggered grid. The second order Adams-Bashforth temporal scheme and the second order central-difference spatial scheme were used. In this paper we presented the results of the fluid flow and heat transfer coefficient for several Rayleigh numbers up to 1×10^5 in a single geometric configuration.*

Keywords: *natural convection, concentric cylinders, laminar flow*