



ESTRATÉGIAS DE EVOLUÇÃO DIFERENCIAL APLICADAS A PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO RESTRITOS

Giovana Trindade da Silva Oliveira

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica.

Av. João Naves de Ávila 2121 – Campus Santa Mônica – CEP 38400-902, Uberlândia, MG.

gtrindade@mecanica.ufu.br

Sezimária Fátima Pereira Saramago

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Matemática.

Av. João Naves de Ávila 2121 – Campus Santa Mônica – CEP 38400-902, Uberlândia, MG.

saramago@ufu.br

Resumo: *O objetivo deste artigo é apresentar uma formulação teórica e uma comparação das estratégias de Evolução Diferencial (ED) aplicadas a alguns problemas considerados difíceis no contexto de otimização determinística. ED é um algoritmo evolutivo simples que opera com poucos parâmetros de controle e pequenas populações. A Evolução Diferencial tem-se mostrado eficiente na solução de muitos problemas de otimização em engenharia. Sua idéia principal é gerar novos indivíduos pela adição da diferença ponderada entre dois indivíduos da população a um terceiro indivíduo, constituindo o operador de mutação da evolução natural, realizando em seguida um cruzamento. Uma seleção permite escolher o melhor indivíduo que irá participar da próxima geração. A simplicidade e eficiência da ED são demonstradas através de um problema de otimização multi-objetivo e de algumas funções matemáticas com restrições.*

Palavras-chave: *otimização, evolução diferencial, algoritmos evolutivos, otimização multi-objetivo.*

1. INTRODUÇÃO

O objetivo da otimização é encontrar a melhor configuração de um projeto com mais eficiência e menor custo operacional.

A aplicação de otimização em vários campos da ciência tem crescido consideravelmente nas últimas décadas. Existem muitos métodos de otimização e cada um deles alcança melhor resultado dependendo do tipo de problema a que são aplicados. A escolha do método depende de uma série de características do problema a ser otimizado, principalmente do comportamento da função que o representa (Vanderplaats, 1999). De acordo com estas características, os métodos podem ser classificados em métodos de programação linear e programação não-linear.

A programação linear lida com funções lineares, porém, grande parte dos problemas práticos é não-linear, o que justifica o crescente desenvolvimento das técnicas não-lineares. Os métodos de programação não-linear podem ser divididos em métodos determinísticos e métodos naturais.

Os métodos determinísticos são baseados no cálculo de derivadas ou em aproximações destas, necessitando de informações do vetor gradiente, seja procurando o ponto onde ele se anula ou usando a direção para a qual aponta. Estes métodos só produzem bons resultados para funções contínuas, convexas e unimodais (funções que possuem apenas um ponto de mínimo ou de máximo).

Os métodos naturais ou estocásticos utilizam apenas as informações da função a ser otimizada, que pode ser de difícil representação, não-linear, descontínua, não diferenciável, multimodal (possui muitos pontos de mínimo ou de máximo). Estes métodos buscam o ótimo através de regras de probabilidade operando de maneira “aleatória orientada”.

Entre as técnicas mais conhecidas destacam-se os algoritmos genéticos (AGs), as estratégias evolutivas (EEs), Recozimento Simulado, entre outros (Goldberg, 1989; Schwefel, 1995; Kirkpatrick et al., 1983; Saramago and Faria, 2001).

Os algoritmos evolutivos (AEs) imitam os princípios da evolução natural para fornecer procedimentos de otimização e busca e se baseiam em população de indivíduos, onde cada indivíduo representa um ponto de busca no espaço das soluções candidatas de um dado problema. Os AEs possuem alguns procedimentos de seleção baseados na aptidão dos indivíduos, operadores de cruzamento e mutação.

Neste artigo é apresentado o algoritmo evolutivo denominado Evolução Diferencial desenvolvido por Storn e Price (1995), que tem sido aplicado com sucesso em vários campos da ciência, podendo ser citado entre muitos outros, a solução de: projeto de sistemas (Storn, 1999), solução de sistemas lineares (Cheng and Hwang, 2001), transferência de calor (Babu and Munawar), projeto manipulador de robô (Bergamaschi et al, 2005). ED está sendo identificado como uma fonte potencial para otimização rápida e precisa.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA ÓTIMO

Um problema de otimização pode ser formulado como encontrar um vetor de n variáveis de projeto $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ que otimize uma função objetivo, $f(X)$, e satisfaçam as restrições de igualdade, desigualdade e laterais. X é um vetor de variáveis reais e T representa a transposição do vetor. O problema pode ser escrito conforme as Equações (1) e (2).

$$\text{Minimizar } f(X) \quad (1)$$

$$\text{Sujeito a } \begin{cases} g_j(X) \leq 0, & j = 1, \dots, J. \\ h_l(X) = 0, & l = 1, \dots, L. \\ x_i^{inf} \leq x_i \leq x_i^{sup}, & i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (2)$$

Caso o problema seja multi-objetivo, $f(X)$ é dada como um vetor cujas componentes são k funções objetivo. Esta função vetorial pode ser escrita como $f(X) = [f_1(X), f_2(X), \dots, f_k(X)]^T$.

Neste artigo, o método dos objetivos ponderados é usado para transformar um problema de otimização multi-objetivo em um problema de otimização escalar (Osyczka, 1981), criando uma função da forma:

$$f(X) = \sum_{k=1}^K w_k \frac{f_k(X)}{f_k^0} \quad (3)$$

onde, os coeficientes de ponderação w_k são usualmente assumidos como:

$$\sum_{k=1}^K w_k = 1 \quad (4)$$

Na Equação (3), a função vetorial é normalizada pelo uso da solução ideal f_k^0 , que é determinada obtendo separadamente o mínimo alcançável, para todas as funções objetivos. Em outras palavras:

$$\begin{cases} f_k^0 = \min f_k(X), & k = 1, \dots, K. \\ \text{sujeito as restrições (2).} \end{cases} \quad (5)$$

Muitos algoritmos de otimização são desenvolvidos para resolver problemas irrestritos, então, no caso de problemas com restrições, é necessário introduzir modificações no método. Neste artigo, é utilizado o conceito de Função de Penalidade (Vanderplaats, 1999). Nesta técnica, os problemas com restrições são transformados em problemas sem restrições adicionando uma função de penalidade $P(X)$ à função objetivo original para limitar as violações das restrições. Esta nova função objetivo, chamada *pseudo objetivo*, é penalizada de acordo com um fator de penalidade toda vez que encontrar uma restrição ativa. Seja a função pseudo objetivo, Φ , dada conforme a Equação (6).

$$\Phi(X) = f(X) + r_p P(X) \quad (6)$$

$$P(X) = \left[\sum_{j=1}^J \left\{ \max \left[0, g_j(X) \right] \right\}^2 + \sum_{l=1}^L \left[h_l(X) \right]^2 \right] \quad (7)$$

Onde $f(X)$ é a função objetivo original dada na Equação (1) ou (3), $P(X)$ é uma função de penalidade imposta dada pela Equação (7), $g_j(X)$ e $h_l(X)$ são funções de restrições de desigualdade e igualdade, respectivamente, conforme a Equação (2). O escalar r_p é um multiplicador que quantifica a magnitude da penalidade. Para a eficiência do método, um valor grande do fator de penalidade deve ser usado para garantir a satisfação próxima de todas as restrições.

3. EVOLUÇÃO DIFERENCIAL

A Evolução Diferencial foi desenvolvida por Storn e Price em meados da década de noventa e surgiu de tentativas de resolver o problema de ajuste polinomial de Chebychev (Storn and Price, 1995).

O algoritmo é iniciado criando uma população inicial escolhida aleatoriamente devendo cobrir todo o espaço de busca. Geralmente, é criada por uma distribuição de probabilidade uniforme, quando não há nenhum conhecimento sobre o problema.

A idéia principal da evolução diferencial é gerar novos indivíduos, denotados vetores modificados ou doadores, pela adição da diferença ponderada entre dois indivíduos aleatórios da população a um terceiro indivíduo. Esta operação é chamada *mutação*.

As componentes do indivíduo doador são misturadas com as componentes de um indivíduo escolhido aleatoriamente (denotado vetor alvo), para resultar o chamado vetor tentativa, ou vetor experimental. O processo de misturar os parâmetros é referido freqüentemente como "*cruzamento*" na comunidade dos algoritmos evolutivos.

Se o vetor experimental resultar um valor da função objetivo menor que o vetor alvo, então o vetor experimental substitui o vetor alvo na geração seguinte. Esta última operação é chamada *seleção*.

O procedimento é finalizado através de algum critério de parada.

3.1. Operadores da Evolução Diferencial

Os operadores da evolução diferencial se baseiam no princípio da evolução natural cujos objetivos são manter a diversidade da população e evitar convergências prematuras. São eles:

Mutação: Sejam os vetores X_α , X_β e X_γ escolhidos aleatoriamente e distintos entre si. Na geração q um par de vetores (X_β, X_γ) define uma diferença $X_\beta - X_\gamma$. Esta diferença é multiplicada por $F > 0$, sendo denotada por diferença ponderada, e é usada para perturbar o terceiro vetor X_α ou o melhor vetor X_{best} da população. Este processo que resulta o vetor doador $V^{(q+1)}$ pode ser escrito matematicamente como:

$$V^{(q+1)} = X_\alpha^{(q)} + F(X_\beta^{(q)} - X_\gamma^{(q)}) \quad \text{ou} \quad V^{(q+1)} = X_{best}^{(q)} + F(X_\beta^{(q)} - X_\gamma^{(q)}) \quad (8)$$

Onde os índices aleatórios $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, \dots, Np\}$ são inteiros distintos entre si e diferentes do índice d . O número de indivíduos da população, Np , deve ser maior ou igual a 4. F é um número real e constante pertencente ao intervalo $[0, 2]$ que controla a amplitude da diferença ponderada. A figura 1 mostra um exemplo bidimensional que ilustra os diferentes vetores que participam da geração do vetor doador $V^{(q+1)}$.

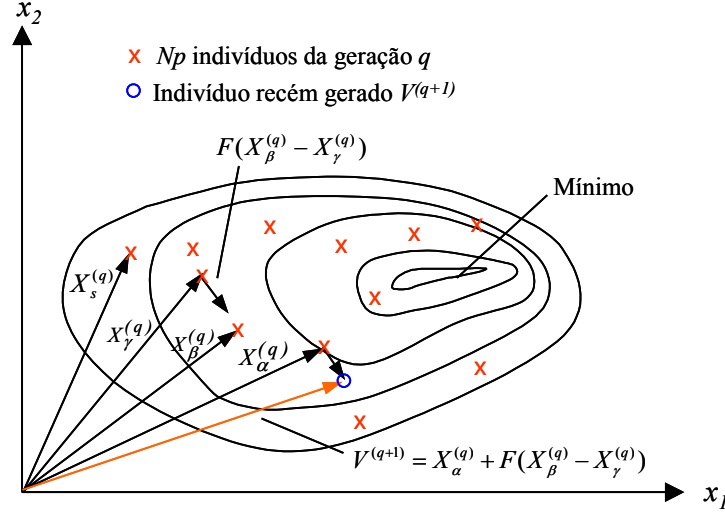


Figura 1: Processo de gerar o vetor doador $V^{(q+1)}$ para uma função objetivo bidimensional.

Se o número de indivíduos da população é grande o suficiente, a diversidade da população pode ser melhorada usando duas diferenças ponderadas para perturbar um vetor existente, ou seja, cinco vetores distintos são escolhidos aleatoriamente na população atual. O vetor diferença ponderada usa dois pares de diferenças ponderadas e é usado para perturbar o quinto vetor ou o melhor vetor da população atual. Este processo pode ser escrito conforme as Equações (9) e (10).

$$V^{(q+1)} = X_{\alpha}^{(q)} + F(X_{\lambda}^{(q)} - X_{\beta}^{(q)} + X_{\gamma}^{(q)} - X_{\delta}^{(q)}) \quad (9)$$

ou

$$V^{(q+1)} = X_{best}^{(q)} + F(X_{\alpha}^{(q)} - X_{\beta}^{(q)} + X_{\gamma}^{(q)} - X_{\delta}^{(q)}) \quad (10)$$

Os índices aleatórios $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \delta \in \{1, \dots, Np\}$, são inteiros mutuamente distintos e diferentes do índice d , tal que $Np \geq 6$.

Cruzamento: O cruzamento é introduzido para aumentar a diversidade dos indivíduos que sofreram a mutação. Assim, as componentes do vetor experimental $U^{(q+1)}$ são formadas conforme a Equação (11).

$$u_i^{(q+1)} = \begin{cases} v_i^{(q+1)}, & \text{se } r_i \leq CR. \\ x_{d,i}^{(q)}, & \text{se } r_i > CR, \quad i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (11)$$

Onde r_i é um número gerado aleatoriamente com resultado no intervalo $[0, 1]$. $x_{d,i}$ são as componentes do vetor alvo $X_d^{(q)}$. CR é a probabilidade do cruzamento ocorrer, representa a probabilidade do vetor experimental herdar os valores das variáveis do vetor doador, e está compreendida entre 0 e 1, sendo fornecida pelo usuário. Quando $CR = 1$, por exemplo, todas as componentes do vetor experimental virão do vetor doador $V^{(q+1)}$. Por outro lado, se $CR = 0$, todas as componentes do vetor experimental virão do vetor alvo $X_d^{(q)}$.

Se após o cruzamento uma ou mais componentes do vetor experimental estiver fora da região de busca, fazem-se as correções:

$$\begin{aligned} \text{Se } u_i < x_i^L, \text{ então faz-se } u_i &= x_i^L, \\ \text{Se } u_i > x_i^U, \text{ então faz-se } u_i &= x_i^U \end{aligned} \quad (12)$$

Seleção: A seleção é o processo de produzir melhores filhos. Diferentemente de outros algoritmos evolutivos, a evolução diferencial não usa hierarquia (elitismo) nem seleção proporcional. Em vez disso, o custo do vetor experimental $U^{(q+1)}$ é calculado e comparado com o custo do vetor alvo $X_d^{(q)}$. Se o custo do vetor alvo for menor que o custo do vetor experimental, o vetor alvo é permitido avançar para a próxima geração. Caso contrário, o vetor experimental substitui o vetor alvo na geração seguinte. Em outras palavras, este processo pode ser escrito conforme a Equação (13).

$$\begin{aligned} \text{Se } f(U^{(q+1)}) &\leq f(X_d^{(q)}), \text{ então } X_d^{(q+1)} \text{ será substituído por } U^{(q+1)}, \\ \text{Se } f(U^{(q+1)}) &> f(X_d^{(q)}), \text{ então } X_d^{(q+1)} \text{ será substituído por } X_d^{(q)}. \end{aligned} \quad (13)$$

O procedimento acima é finalizado através de algum critério de parada, sendo que um número máximo de gerações deve ser estabelecido. Para problemas com restrição, um critério pode ser a não violação das restrições ou o melhor indivíduo ter encontrado um valor dentro de uma precisão pré-estabelecida.

3.2. Estratégias da Evolução Diferencial

As estratégias da evolução diferencial podem variar de acordo com o tipo de indivíduo a ser modificado na formação do vetor doador, o número de indivíduos considerados para a perturbação e o tipo de cruzamento a ser utilizado, podendo ser escritas como: ED/a/b/c.

- a – especifica o vetor a ser perturbado, podendo ser “rand” (um vetor da população escolhido aleatoriamente) ou “best” (o vetor de menor custo da população);
- b – determina o número de diferenças ponderadas usadas para a perturbação de a ;
- c – denota o tipo de cruzamento (exp: exponencial; bin: binomial).

Em 1995, Storn and Price deram o princípio de trabalho da estratégia básica usando apenas o operador cruzamento binomial (devido aos experimentos binomiais independentes), onde o cruzamento é executado em cada variável sempre que um número $r \in [0, 1]$ aleatório for menor que a probabilidade de cruzamento CR .

Alguns anos mais tarde, Storn and Price (1997) desenvolveram mais estratégias usando o operador cruzamento exponencial, em que o cruzamento é executado nas variáveis em um laço até que esteja dentro do limite de CR . A primeira vez que um número $r \in [0, 1]$ aleatório ultrapassa o valor de CR , nenhum cruzamento é executado e as variáveis restantes são deixadas intactas.

Resumidamente, as dez estratégias podem ser descritas de acordo com a Tabela 1.

Uma estratégia que funciona bem para um dado problema pode não funcionar bem quando aplicada a outro problema. A estratégia a ser adotada para um problema é determinada por tentativa e erro.

Tabela 1: Representação das estratégias da evolução diferencial.

Número	Mutação	Notação
1	$V^{(q+1)} = X_{\alpha}^{(q)} + F(X_{\beta}^{(q)} - X_{\gamma}^{(q)})$	ED/rand/1/bin
2	$V^{(q+1)} = X_{best}^{(q)} + F(X_{\beta}^{(q)} - X_{\gamma}^{(q)})$	ED/best/1/bin
3	$V^{(q+1)} = X_{\alpha}^{(q)} + F(X_{\lambda}^{(q)} - X_{\beta}^{(q)} + X_{\gamma}^{(q)} - X_{\delta}^{(q)})$	ED/rand/2/bin
4	$V^{(q+1)} = X_{best}^{(q)} + F(X_{\alpha}^{(q)} - X_{\beta}^{(q)} + X_{\gamma}^{(q)} - X_{\delta}^{(q)})$	ED/best/2/bin
5	$V^{(q+1)} = X_{old}^{(q)} + F(X_{best}^{(q)} - X_{old}^{(q)} + X_{\gamma}^{(q)} - X_{\delta}^{(q)})$	ED/rand-to-best/2/bin
6	$V^{(q+1)} = X_{\alpha}^{(q)} + F(X_{\beta}^{(q)} - X_{\gamma}^{(q)})$	ED/rand/1/exp
7	$V^{(q+1)} = X_{best}^{(q)} + F(X_{\beta}^{(q)} - X_{\gamma}^{(q)})$	ED/best/1/exp
8	$V^{(q+1)} = X_{\alpha}^{(q)} + F(X_{\lambda}^{(q)} - X_{\beta}^{(q)} + X_{\gamma}^{(q)} - X_{\delta}^{(q)})$	ED/rand/2/exp
9	$V^{(q+1)} = X_{best}^{(q)} + F(X_{\alpha}^{(q)} - X_{\beta}^{(q)} + X_{\gamma}^{(q)} - X_{\delta}^{(q)})$	ED/best/2/exp
10	$V^{(q+1)} = X_{old}^{(q)} + F(X_{best}^{(q)} - X_{old}^{(q)} + X_{\gamma}^{(q)} - X_{\delta}^{(q)})$	ED/rand-to-best/2/exp

4. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Neste artigo, é feita uma comparação de todas as estratégias da Evolução Diferencial descritas na Tabela 1. O código computacional foi implementado em MATLAB[®]. Os parâmetros utilizados foram: número de indivíduos da população $N_p = 10$ no primeiro e último problema e $N_p = 30$ no segundo problema; multiplicador da diferença ponderada $F = 0.8$; probabilidade de cruzamento $CR = 0.5$ e o fator de penalidade $r_p = 1000$. Os problemas restritos foram transformados em irrestritos conforme as Equações (6) e (7).

4.1. Funções Matemáticas com Restrições

Nos exemplos a seguir, tanto as funções matemáticas quanto as restrições são não-lineares.

Exemplo 1 – Minimizar $f(X) = x_1^2 - 5x_1 + x_2^2 - 5x_2 + 2x_3^2 - 21x_3 + x_4^2 + 7x_4 + 50$,

Sujeito a: $g_1(X) = x_1^2 - x_1 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2 - x_4 - 10 \leq 0$,

$g_2(X) = x_1^2 + x_1 + x_2^2 - x_2 + x_3^2 + x_3 + x_4^2 - x_4 - 8 \leq 0$,

$g_3(X) = 2x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - x_2 + x_3^2 - x_4 - 5 \leq 0$, $x_i \in [-10, 10]$.

Tabela 2: Resultados da otimização restrita para o exemplo 1.

Estratégias ED	$f(X)$	g_1	g_2	g_3	x_1	x_2	x_3	x_4
1	6.0021	-5.0119	-0.0026	0.0005	0.0055	1.0066	1.9947	-1.0039
2	5.9984	-5.0657	0.0009	0.0006	0.0069	0.9912	1.9977	-1.0048
3	6.2238	-4.9139	-0.0186	-0.0677	-0.0786	0.9282	2.0440	-0.9658
4	6.0544	-4.7774	-0.0228	-0.0098	-0.0128	1.0516	1.9926	-0.9908
5	5.9987	-4.9172	0.0012	0.0006	-0.0076	1.0141	2.0014	-0.9958
6	5.9965	-5.1860	0.0020	0.0036	0.0204	0.9743	1.9935	-1.0128
7	5.9983	-4.9841	0.0011	0.0003	-0.0020	1.0018	2.0009	-0.9990
8	6.2077	-5.2508	-0.1141	-0.0356	0.0353	0.9410	1.9908	-0.9835
9	6.0059	-5.0436	-0.0060	0.0005	0.0040	0.9861	2.0022	-0.9977
10	5.9989	-5.0019	-0.0010	0.0015	0.0057	1.0109	1.9935	-1.0048

A solução teórica é $X = [0 \ 1 \ 2 \ -1]$, $f(X) = 6$, $g_1 = -5$, $g_2 = 0$ e $g_3 = 0$. Observando a Tabela 2 verifica-se que todas as estratégias da ED, exceto as estratégias 3 e 8, apresentam bons resultados, isto mostra a eficiência do método. Observe que quando as restrições não são obedecidas, seus valores são pequenos.

Exemplo 2 – Esta função foi originalmente proposta por Himmelblau (1972), possuindo cinco variáveis de projeto, dez restrições laterais e seis restrições de desigualdade, sendo formulada como segue:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } f(X) &= 5.3578547x_3^2 + 0.83568915x_1x_5 + 37.293239x_1 - 40792.141, \\ \text{Sujeito a: } g_1(X) &= 85.334407 + 0.0056858x_2x_5 + 0.0006262x_1x_4 - 0.0022053x_3x_5 \geq 0, \\ g_2(X) &= 85.334407 + 0.0056858x_2x_5 + 0.0006262x_1x_4 - 0.0022053x_3x_5 \leq 92, \\ g_3(X) &= 80.51249 + 0.0071317x_2x_5 + 0.0029955x_1x_2 + 0.0021813x_3^2 \geq 90, \\ g_4(X) &= 80.51249 + 0.0071317x_2x_5 + 0.0029955x_1x_2 + 0.0021813x_3^2 \leq 110, \\ g_5(X) &= 9.300961 + 0.0047026x_3x_5 + 0.0012547x_1x_3 + 0.0019085x_3x_4 \geq 20, \\ g_6(X) &= 9.300961 + 0.0047026x_3x_5 + 0.0012547x_1x_3 + 0.0019085x_3x_4 \leq 25, \\ 78 \leq x_1 \leq 102, \quad 33 \leq x_2 \leq 45, \quad 27 \leq x_i \leq 45, \quad i=3,4,5. \end{aligned}$$

Tabela 3: Resultados da otimização restrita para o exemplo 2.

Estratégias ED	$f(X)$	g_2	g_5	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	-30.768	-1.2252	0.2135	78.0535	33.3751	29.5910	44.5984	36.4263
2	-30.795	-0.2973	0.2540	79.3971	34.7698	28.2305	41.3324	40.7200
3	-31.000	-0.0727	0.2452	78.1358	33.5612	27.1765	42.2196	43.8167
4	-30.789	-0.8055	0.1892	78.3340	33.8330	28.9888	42.7454	38.8470
5	-30.707	-1.0104	0.0274	79.7360	33.0387	29.1804	44.9731	38.2418
6	-30.782	-0.0913	-0.0566	80.4575	33.0204	27.3810	43.2410	44.5157
7	-30.673	0.0571	-0.3244	78.6005	34.4066	28.3681	44.1620	43.7384
8	-30.910	0.1867	0.0783	78.0312	34.5389	27.4973	42.2611	44.1643
9	-30.748	-0.0706	-0.0045	81.7518	33.0281	27.1863	43.0821	44.4257
10	-30.680	-0.0202	0.0672	80.5749	33.9249	27.7350	38.7731	44.2823

A solução $X = [78 \ 33 \ 29.995 \ 45 \ 36.776]$ e $f(X) = -30.665,5$ foi obtida por Himmelblau (1972). Posteriormente, Deb (2000) e Coelho Coelho (2002) realizaram vários testes e obtiveram resultados semelhantes. Neste estudo, todas as estratégias da ED mostraram melhores resultados, observando que as restrições g_2 e g_5 são ativas (Deb, 2000).

Na Tabela 3 verifica-se que as estratégias 6 e 9, ou seja, ED/rand/1/exp e ED/best/2/exp, respectivamente, apresentam os melhores resultados obedecendo todas as restrições. A estratégia 3 apresenta menor valor da função objetivo, porém a restrição g_5 não é obedecida.

Todas as restrições foram obedecidas, exceto g_2 e g_5 , em algumas estratégias.

4.2. Problema de Engenharia: Despacho Econômico e Ambiental (DEA)

O objetivo do problema do despacho econômico e ambiental de geração de energia elétrica é selecionar as potências geradoras assim como encontrar a demanda de carga em custo mínimo, poluição e emissão mínima na atmosfera, enquanto satisfaz todas as unidades e restrições do sistema. Assim, o objetivo é minimizar duas funções objetivo conflitantes, o custo do combustível e a emissão, satisfazendo as restrições de igualdade e laterais. O vetor das potências reais dos geradores é representado por $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$.

As curvas do custo $F_c(X)$ do gerador são representadas por funções quadráticas. Assim, o custo total (\$/h) do combustível pode ser expresso conforme a Equação (14).

$$F_c(X) = \sum_{i=1}^N a_i + b_i x_i + c_i x_i^2 \quad (14)$$

Onde N é o número de geradores, a_i , b_i e c_i , são os coeficientes do custo do i -ésimo gerador e x_i é a potência real para cada gerador.

A emissão total $F_e(X)$ dos poluentes atmosféricos (em ton/h), tais como o óxido de enxofre SO_x e o óxido de nitrogênio NO_x causados por unidades térmicas que consomem combustíveis fósseis pode ser expresso através da Equação (15).

$$F_e(X) = \sum_{i=1}^n 10^{-2} (\alpha_i + \beta_i x_i + \gamma_i x_i^2) + \xi_i e^{(\lambda_i x_i)} \quad (15)$$

onde α_i , β_i , γ_i , ξ_i e λ_i são os coeficientes característicos de emissão do i -ésimo gerador.

Para uma operação estável, a potência real para cada gerador é restrita pelos limites inferiores x_i^{min} e superiores x_i^{max} , $i = 1, \dots, n$.

A potência total gerada deve cobrir a demanda total P_D e a potência real dissipada na linha de transmissão P_{loss} , conforme a Equação (16).

$$\sum_{i=1}^n X_i = P_D + P_{loss} \quad (16)$$

Tabela 4: Coeficientes do custo e da emissão de 6 geradores.

		G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6
Custo	a	10	10	20	10	20	10
	b	200	150	180	100	180	150
	c	100	120	40	60	40	100
Emissão	α	4,091	2,543	4,258	5,426	4,258	6,131
	β	- 5,554	- 6,047	- 5,094	- 3,550	- 5,094	- 5,555
	γ	6,490	5,638	4,586	3,380	4,586	5,151
	ξ	2×10^{-4}	5×10^{-4}	1×10^{-6}	2×10^{-3}	1×10^{-6}	1×10^{-5}
	λ	2,857	3,333	8,000	2,000	8,000	6,667

Seja $N=6$ geradores, os coeficientes do custo e os coeficientes característicos da emissão dados na Tabela 4 de acordo com Abido (2003) e a restrição de igualdade dada na Equação (16) escrita como duas restrições de desigualdade. O problema pode ser matematicamente formulado como um problema de otimização multi-objetivo restrito não-linear, conforme as Equações (1) a (7), como segue:

$$\text{Minimizar } \Phi(X) = f(X) + r_p P(X) \quad (17)$$

$$\text{Sujeito a } \begin{cases} g_1(X) = \sum_{i=1}^6 x_i - 290 \leq 0 & (MW), \\ g_2(X) = 280 - \sum_{i=1}^6 x_i \leq 0 & (MW), \\ 10 \leq x_i \leq 120, & i = 1, \dots, 6 \quad (MW). \end{cases} \quad (18)$$

$$\text{Onde } \begin{cases} f(X) = w_1 \frac{F_c(X)}{F_c^0} + w_2 \frac{F_e(X)}{F_e^0}, \\ P(X) = \{ \max[0, g_1(X)] \}^2 + \{ \max[0, g_2(X)] \}^2. \end{cases} \quad (19)$$

A solução ideal foi calculada utilizando todas as estratégias da evolução diferencial, resultando $F_c^0 = 550.1248$ \$/h e $F_e^0 = 0.1952$ ton/h. Os coeficientes de ponderação foram $w_1 = w_2 = 0.5$.

Tabela 5: Resultados da otimização do problema DEA, com potências em MW.

Estratégias ED	F_c (\$/h)	F_e (ton/h)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	617.0532	0.1992	25.43	40.89	68.71	52.56	46.45	47.74
2	606.1748	0.1997	26.73	39.05	56.66	62.33	51.12	44.17
3	646.4563	0.2058	37.39	41.97	90.34	45.40	30.24	42.79
4	567.2400	0.2250	14.97	31.29	82.25	65.07	51.84	44.52
5	609.1248	0.1985	31.60	41.22	53.68	60.61	48.71	44.16
6	607.8273	0.2044	22.68	38.47	66.10	70.93	46.12	38.58
7	611.3541	0.1979	32.44	40.10	47.36	57.93	54.50	47.67
8	613.0314	0.2053	28.94	45.71	29.62	71.69	66.42	40.26
9	607.0605	0.2071	10.88	48.95	56.58	64.07	66.44	35.45
10	607.2288	0.1994	30.02	41.80	50.08	63.12	53.23	41.80

Como este é um problema multi-objetivo, a melhor solução depende do interesse do projetista na solução compromisso. As estratégias 2, 5, 6, 9 e 10 podem apresentar uma boa solução caso se queira um compromisso razoável entre o custo do combustível e a emissão de poluentes. Vale registrar que as restrições foram obedecidas em todas as estratégias.

5. CONCLUSÕES

A comparação realizada entre as dez estratégias da Evolução Diferencial teve como objetivo testar o algoritmo e sua implementação e ver quais as estratégias apresentam melhores resultados. Na primeira função testada, apenas as estratégias 3 e 8 não mostraram bons resultados, o que era esperado para uma pequena população (Storn and Price, 1997). No exemplo 2, todas as estratégias mostram bons resultados, porém com duas restrições não sendo atendidas na totalidade, o que pode ser resolvido aumentando-se a penalidade ou mudando a técnica de penalização.

A melhor solução para o problema do despacho econômico e ambiental depende do interesse do projetista, pois as funções objetivos são conflitantes. Na Tabela 5, por exemplo, a estratégia 4 apresenta o menor custo do combustível, no entanto, resulta maior emissão de poluentes na atmosfera.

É recomendado que o usuário teste todas as estratégias e compare os resultados ótimos obtidos, pois este procedimento é simples, uma vez que todas as estratégias estão disponíveis no programa, o custo computacional é baixo e a estratégia que parece ser boa para um problema pode não ser para outro.

5. AGRADECIMENTOS

O primeiro autor agradece o suporte do CNPq.

6. REFERÊNCIAS

- Abido, M. A., 2003, "A niched Pareto genetic algorithm for multiobjective environmental/economic dispatch", *Electrical Power and Energy Systems*, vol. 25, pp. 97–105.
- Babu, B. V. and Munawar, S. A., 2001, "Optimal Design of Shell and Tube Heat Exchanger by Different strategies of Differential Evolution", *PreJournal.com - The Faculty Lounge*.
- Bergamaschi, P.R., Saramago, S.F.P. e Coelho, L.S., 2005, "Evolução Diferencial aplicada à otimização do volume do espaço de trabalho de um manipulador", VII SBAI / II IEEE LARDS. São Luís.

- Cheng, S. L. and Hwang, C., 2001, "Optimal Approximation of Linear Systems by a Differential Evolution Algorithm", IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics – Part A: Systems and Humans, vol. 31, n. 6, pp. 698–707.
- Coello Coello, C. A., 2002, "Theoretical and numerical constraint-handling techniques used with evolutionary algorithms: a survey of state of the art", Computer methods in applied mechanics and engineering, 191, pp. 1245-1287.
- Deb, K., 2000, "An efficient constraint handling method for genetic algorithms", Computer methods in applied mechanics and engineering, 186, pp. 311-338
- Goldberg, D. E., 1989, "Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning", Reading, MA: Addison-Wesley.
- Himmelblau, D. M., 1972, Applied Nonlinear Programming, McGraw-Hill, New York.
- Kirkpatrick, S., Gelatt, C. D. and Vecchi, M. P., 1983, "Optimization by simulated annealing", Science, vol. 220, n. 4598, pp. 671–680.
- Saramago, S. F. P., and Faria, E. D., 2001, "Constraint Optimization Problems Using Simulated Annealing", Ciência & Engenharia, Brasil, vol. 10, n. 1, pp. 69–75.
- Schwefel, H.P., 1995, "Evolution and Optimum Seeking", John Wiley & Sons.
- Storn, R. and Price, K., 1995, "Differential Evolution: a simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous spaces", Technical Report TR-95-012, International Computer Science Institute, Berkeley.
- Storn, R. and Price, K., 1997, "Differential Evolution – A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces", Journal of Global Optimization vol. 11, pp. 341–359.
- Storn, R., 1999, "System Design by Constraint Adaptation and Differential Evolution", IEEE Transactions on Evolutionary Computation, vol. 3, n. 1, pp. 22–34.
- Vanderplaats, G. N., 1999, "Numerical Optimization Techniques for Engineering Design", Vanderplaats Research & Development, Inc., Colorado Springs, CO, 3rd ed.

DIFFERENTIAL EVOLUTION STRATEGIES APPLIED TO CONSTRAINED OPTIMIZATION PROBLEMS

Giovana Trindade da Silva Oliveira

Federal University of Uberlândia, School of Mechanical Engineering
2160 João Naves de Ávila Av., Campus Santa Mônica, CEP 38400-902, Uberlândia, Brazil
gtrindade@mecanica.ufu.br

Sezimária Fátima Pereira Saramago

Federal University of Uberlândia, School of Mathematics
2160 João Naves de Ávila Av., Campus Santa Mônica, CEP 38400-902, Uberlândia, Brazil
saramago@ufu.br

Abstract: *The objective of this paper is to present a theoretical formulation and a comparison of the strategies of Differential Evolution (DE) applied to some problems considered difficult in the context of deterministic optimization. DE is a simple evolutionary algorithm that operates with few control parameters and small populations. Differential Evolution has revealed efficient in the solution of many engineering optimization problems. The main idea is to generate new individuals by addition of the weighed difference between two individuals of the population to one third individual, constituting the operator of mutation of the natural evolution, taking place afterwards a crossover. A selection allows choosing the best individual that will go to participate of the next generation. The simplicity and efficiency of the DE are demonstrated through a multi-objective optimization problem and some constrained mathematical functions.*

Keywords: *optimization, differential evolution, evolutionary algorithm, multi-objective optimization.*