



OTIMIZAÇÃO MULTI-CRITÉRIOS APLICADA A UM PROBLEMA DINÂMICO.

Lidiane S. Oliveira

Universidade Federal de Uberlândia
Av. João Naves de Ávila, 2160, CEP: 38408-100
Fax: (34) 3239-4126 - Uberlândia (MG) - Brasil
lsoliveira@mecanica.ufu.br

Sezimária F. P. Saramago

Universidade Federal de Uberlândia
Av. João Naves de Ávila, 2160, CEP: 38408-100
Fax: (34) 3239-4126 - Uberlândia (MG) - Brasil
saramago@ufu.br

Resumo. *Existem várias situações em problemas de otimização nas quais o pesquisador necessita minimizar ou maximizar não apenas uma função objetivo, mas várias funções simultaneamente, que estão usualmente em conflito uma com a outra. Muitos problemas de tomada de decisão implicam em vários critérios que devem ser balanceados da melhor forma possível. Observa-se que problemas de otimização multi-objetivo surgem em diferentes aplicações científicas, sendo que várias pesquisas visam desenvolver métodos para solucioná-los. Existem vários critérios que podem ser considerados para resolver este complexo problema de otimização. Alguns métodos clássicos são baseados em escalonar as funções, sendo que o vetor função objetivo é transformado em uma função escalar; outros métodos são desenvolvidos com base na abordagem min-max. Este trabalho apresenta uma contribuição ao estudo de alguns métodos que podem ser aplicados na solução de problemas de otimização multi-objetivo. As metodologias estudadas são aplicadas à solução de um problema dinâmico.*

Palavras-chave: *otimização multi-critério, objetivos ponderados, hierárquico, negociação, critério global.*

1. INTRODUÇÃO

Um problema de otimização multi-critério é definido quando deseja-se minimizar ou maximizar várias funções objetivo simultaneamente, sendo que, em vários casos, uma função está em conflito com outra (Eschenauer et al, 1990). Nestes problemas, procura-se um vetor ótimo definido no espaço Euclidiano n -dimensional de variáveis de projeto E^n , que seja a melhor solução para um vetor formado por funções objetivo, definido no espaço Euclidiano k -dimensional de funções objetivo E^k (Osyszka, 1981). Este problema pode estar sujeito a restrições e todas as funções envolvidas podem ser não-lineares. Vários critérios estão disponíveis e podem ser considerados para resolver este complexo problema de otimização. Alguns métodos clássicos são baseados em escalonar as funções, sendo que o vetor função objetivo é transformado em uma função escalar. Outros métodos são desenvolvidos com base na abordagem min-max.

Problemas de otimização multi-objetivo surgem em diferentes aplicações científicas, sendo que várias pesquisas visam desenvolver métodos para solucioná-los. No artigo de Vankan e Maas (2002) é feita a modelagem e a otimização de projetos aeronáuticos através da utilização de funções multi-objetivo. Ambrósio (2002) utiliza programação multicritério como um instrumento para

planejamento agro-ambiental. Saramago e Steffen (2002) apresentam o problema de otimização multi-objetivo que visa obter a trajetória ótima de um robô manipulador na presença de obstáculos móveis, minimizando o tempo total de percurso e a energia mecânica dos atuadores.

Este trabalho apresenta uma contribuição ao estudo de alguns métodos que podem ser aplicados na solução de problemas de otimização multi-objetivo. Pretende-se criar um conhecimento básico que possa ser útil durante o desenvolvimento de pesquisas que dependam deste tipo de otimização. Para ilustrar as metodologias estudadas, apresenta-se a solução de um problema dinâmico, no qual tem-se uma viga engastada-livre, com um sistema massa-mola suspenso, onde deseja-se maximizar a primeira frequência natural e distanciar as três primeiras frequências entre si.

2. ALGUNS MÉTODOS CLÁSSICOS DE OTIMIZAÇÃO MULTI-OBJETIVO

Seja um problema de otimização multi-objetivo para programação matemática formulado como a seguir:

$$\text{Encontrar } x^* \text{ tal que } f(x^*) = \text{opt } f(x), \quad x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T, \quad f(x) = [f_1(x) \ f_2(x) \ \dots \ f_k(x)]^T \quad (1)$$

$$\text{sujeita a: } g_u(x) \geq 0 \text{ para } u = 1, 2, \dots, m \quad (2)$$

$$h_j(x) = 0 \text{ para } j = 1, 2, \dots, p < n$$

onde x é um vetor de variáveis de decisão, $f(x)$ é um vetor da função objetivo, $g_u(x)$, $h_j(x)$ são restrições, x^* representa a solução ótima (ou o conjunto das soluções ótimas).

Seja uma solução chamada de “solução ideal”. Para determinar esta solução, deve-se encontrar, separadamente, o mínimo atingível para todas as funções objetivo. Assumindo que este mínimo pode ser encontrado, seja $x^{o(i)} = [x_1^{o(i)} \ x_2^{o(i)} \ \dots \ x_n^{o(i)}]^T$ o vetor de variáveis que minimiza cada i -ésima função objetivo $f_i(x)$. Em outra formulação, o vetor $x^{o(i)} \in X$ é tal que

$$f_i^o = f_i(x^{o(i)}) = \min f_i(x) \quad (3)$$

Usa-se f_i^o para denotar o valor mínimo de cada i -ésima função. O vetor $f^o = [f_1^o \ f_2^o \ \dots \ f_k^o]^T$ é ideal para um problema de otimização multi-critério e o ponto no F^n o qual determina este vetor é a solução ideal.

Pareto (1896) formulou o conceito de ótimo que continua sendo muito importante para a análise multi-critério. A maneira mais comum de definir este ótimo é dada por:

Um ponto $x^* \in X$ é ótimo de Pareto se para todo $x \in X$

$$f_i(x) \geq f_i(x^*) \text{ para todo } i \in I = [1, 2, \dots, k] \quad (4)$$

ou, existe pelo menos um $i \in I$ tal que

$$f_i(x) > f_i(x^*) \text{ para no mínimo um } i \in I \quad (5)$$

Esta definição é baseada no conceito intuitivo de que o ponto x^* é escolhido como o ótimo se nenhum critério pode ser melhorado sem prejudicar pelo menos um outro critério. Infelizmente, o ótimo de Pareto quase sempre não dá uma única solução mas, um conjunto de soluções chamadas de soluções não-inferiores ou soluções não-dominadas. Usa-se X^p para denotar este conjunto de soluções e F^p para denotar o mapa de X^p no espaço das funções objetivo.

2.1 Método da Ponderação dos Objetivos (Weighting Objectives Method)

Neste método transforma-se o vetor de funções objetivo em uma função escalar. Minimizando esta função pode-se obter a solução ótima de Pareto ou um conjunto de tais soluções. No método da

ponderação dos objetivos, os problemas de otimização multi-critérios são substituídos por um problema de otimização escalar, por exemplo, através da criação de uma função da forma:

$$f(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i f_i(x), \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1 \quad (6)$$

onde $\alpha_i \geq 0$ são os coeficientes de ponderação, que representam a importância relativa de cada critério. Para os métodos numéricos de procura do mínimo dado pela Eq.(6) a localização, depende não somente dos valores α_i , mas também das unidades nas quais as funções são expressas. Para que α_i possa refletir bem a importância dos objetivos, todas as funções devem ser expressas em unidades que aproximem os mesmos valores numéricos (Deb, 2001). Com este objetivo a Eq.(6) será escrita na seguinte forma:

$$f(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i f_i(x) c_i, \quad \text{onde } c_i \text{ são fatores de multiplicação.} \quad (7)$$

Os melhores resultados são usualmente obtidos se $c_i = (1/f_i^o)$, onde f_i^o representa a solução ideal para o problema.

2.2 Método de Otimização Hierárquico (Hierarchical Optimization Method)

Considere a situação em que o usuário deseje ordenar os critérios em termos de importância. Seja a numeração de 1 a k que reflita esta ordem, no sentido que o primeiro critério é mais importante e o k -ésimo critério é menos importante (Osyczka, 1981).

Conservando esta ordem, minimiza-se cada função objetivo separadamente, adicionando em cada passo uma nova restrição a qual limita o acréscimo ou o decréscimo assumido previamente (ξ_i) para a função considerada. Este método pode ser descrito como:

- (1) Encontre o mínimo para o primeiro critério:
obter $x^{(1)} = [x_1^{(1)} \ x_2^{(1)} \ \dots \ x_n^{(1)}]^T$ tal que $f_1(x^{(1)}) = \min f_1(x)$, $x \in X$
Faça o passo 2 para $i = 1, 2, \dots, k$
- (2) Encontre o mínimo da i -ésima função objetivo:
obter $x^{(i)} = [x_1^{(i)} \ x_2^{(i)} \ \dots \ x_n^{(i)}]^T$ tal que $f_i(x^{(i)}) = \min f_i(x)$, $x \in X$
com as restrições adicionais:

$$f_{j-1}(x) \leq \left(1 \pm \frac{\xi_{j-1}}{100}\right) f_{j-1}(x^{j-1}) \quad \text{para } j = 2, 3, \dots, i \quad (8)$$

sendo ξ_{j-1} são os coeficientes assumidos para os acréscimos ou decréscimos das funções dadas em porcentagem. O sinal '+' refere-se às funções que estão sendo minimizadas, ao passo que o sinal '-' refere-se às funções que estão sendo maximizadas. O ponto $x^{(k)} = [x_1^{(k)} \ x_2^{(k)} \ \dots \ x_n^{(k)}]^T$ é o ótimo determinado para este método.

2.3 Método da Negociação (Trade-Off Method)

Classifica-se um método na categoria da negociação se o conceito de trocar um valor de uma função objetivo por um outro valor da função é usado para determinar o próximo passo na busca da solução. Em muitos casos o conceito acima é utilizado através da minimização de uma das funções objetivo considerando as outras como restrições flexíveis. Desse modo, este método é também chamado método restrito ou método ξ -restrito (Deb, 2001). Uma simples descrição deste método é dada a seguir:

- (1) Encontre o mínimo da r -ésima função objetivo:

obter x^* tal que $f_r(x^*) = \min f_r(x)$, $x \in X$ sujeita às restrições adicionais da forma

$$f_r(x) \leq \xi_i, \text{ para } i = 1, 2, \dots, k \text{ e } i \neq r \quad (9)$$

onde ξ_i são os valores adotados, os quais não podem ser ultrapassados pelas funções objetivo.

(2) Repita o processo (1) para diferentes valores de ξ_i . Uma boa escolha do conjunto ξ_i pode ser útil durante a decisão. A busca é interrompida quando se encontrar uma solução satisfatória.

Pode ser necessário repetir o procedimento acima para diferentes índices r . De forma a ajudar na escolha razoável de ξ_i , utilizando os valores da solução ideal, uma forma mais adequada é escrever a Eq.(9) como segue:

$$f_i(x) \leq f_i^0 + \Delta f_{ji}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, k \text{ e } i \neq r \quad (10)$$

onde Δf_{ji} são os valores assumidos da função incremento, definido por:

$$\Delta f_{ji} = |f_j(x^{0(i)}) - f_j^0| \quad \text{ou} \quad \Delta f_{ji}^r = \frac{\Delta f_{ji}}{f_j(x^{0(i)})} \quad (11)$$

2.4 Método do Critério Global (Global Criterion Method)

Neste método uma solução ótima é um vetor de variáveis de decisão o qual minimiza algum critério global. A função a qual descreve este critério global deve ser definida de forma que obtenha uma solução mais próxima possível da solução ideal. A forma mais comum desta função é:

$$f(x) = \sum_{i=1}^k \left(\frac{f_i^0 - f_i(x)}{f_i^0} \right)^m \quad (12)$$

Para esta equação Boychuk e Ovchimikov (1973) propuseram $m = 1$ e Salukvadze (1974) propôs $m = 2$, mas outros valores para m podem também ser usados. Naturalmente, a solução obtida após a minimização da Eq.(12) diferirá grandemente de acordo com os valores escolhidos para m .

Desse modo, o problema é determinar qual m resultaria em uma solução que seja a mais satisfatória para o pesquisador. Também pode acontecer qualquer que seja a escolha de m , a Eq.(12) forneça uma solução que é inaceitável.

2.4 Método da Programação de Metas (Goal Programming Method)

Este método requer que o pesquisador especifique metas para cada objetivo que deseja atingir. A idéia principal da programação de metas é encontrar soluções que atinge uma meta predefinida considerando uma ou mais funções objetivo. Se não existir a solução que atinja essas metas pré-especificadas em todas as funções objetivo, a tarefa é encontrar soluções que minimizam desvios para as metas. Por outro lado, se esta solução existir, a tarefa do método é identificar esta solução particular. Em certo sentido, esta tarefa é semelhante à tomada de decisão e a solução obtida é uma solução satisfatória, que pode ser diferente da solução ótima.

As metas, isto é, seus valores quantitativos, são considerados como restrições adicionais. Assim, novas variáveis são acrescentadas para representar os desvios em relação às metas pré-determinadas. Seja uma função objetivo $f(x)$ com um vetor solução x . Sem perder a generalidade, considere que esta função objetivo está sendo minimizada. Na programação de metas, um valor alvo t é escolhido para cada uma das funções objetivo pelo usuário, e a tarefa é então encontrar uma solução que tem um valor objetivo igual a t , sujeito a condição que a solução encontrada seja viável ($x \in S$). Formulação do problema de otimização:

$$\text{Meta } (f_i(x) = t_i), i = 1, k; x \in S, \text{ onde } S \text{ é a região viável.} \quad (13)$$

Na Eq.(13) as metas foram escritas iguais a t_i ($f_i(x) = t_i$). Mas, as metas podem ser de quatro tipos diferentes: menor ou igual a t ($f(x) \leq t$), maior ou igual a t ($f(x) \geq t$), igual a t ($f(x) = t$) e dentro da faixa ($f(x) \in [t^l, t^u]$). De forma a permitir a obtenção das metas acima, duas variáveis não-negativas denominadas desvios (n e p) são usualmente introduzidas. Assim, para resolver o problema de programação de metas, cada meta é convertida em ao menos uma restrição de igualdade, e o objetivo é minimizar todos os desvios p e n .

2.4.1 Programação de metas ponderada

Considere uma função multi-objetivo, onde para cada função objetivo estabelece-se uma meta:

$$\begin{aligned} &\text{Minimize } \sum_{j=1}^k (\alpha_j p_j + \beta_j n_j) \\ &\text{sujeito a : } f_j(x) - p_j + n_j = t_j \quad j = 1, 2, \dots, k \\ &\quad \quad \quad x \in S, n_j, p_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, k \end{aligned} \quad (14)$$

Aqui, os parâmetros α_j e β_j são fatores de ponderação para minimizar os desvios do j -ésimo objetivo em relação a j -ésima meta. Para a meta menor ou igual a t ($f(x) \leq t$), o parâmetro β_j é zero ($n_j = 0$). Analogamente, para a meta maior ou igual a t ($f(x) \geq t$), o parâmetro α_j é zero ($p_j = 0$). Para o intervalo de t ($f(x) \in [t^l, t^u]$), existe um par de restrições para cada função objetivo. Usualmente, os fatores de ponderação α_j e β_j são valores fixados pelo pesquisador.

Assim, observa-se que a solução do problema de programação de metas ponderada depende largamente da escolha dos fatores de ponderação e que possui dificuldades análogas àquelas encontradas no método de ponderação estudado anteriormente.

3. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS – RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste trabalho, as simulações foram realizadas utilizando o Método dos Multiplicadores de Lagrange Aumentado (MMLA). O código computacional aplicado foi o DOT (Design Optimization Tools Program) desenvolvido por Vanderplaats (1995), usando um micro computador Pentium 4.

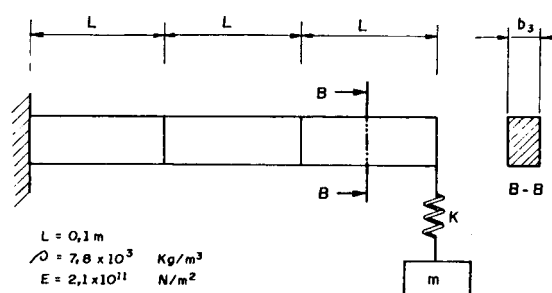


Figura 1. Otimização de Frequências de um Sistema

Seja o problema de otimização em dinâmica, considerando uma viga engastada-livre, com um sistema massa - mola suspenso em sua extremidade livre, discretizada em três elementos de mesmo comprimento, conforme Fig. 1. Acoplou-se ao programa de otimização subrotinas capazes de obter as três primeiras frequências naturais (ω_1 , ω_2 e ω_3), pelo Mét. dos Elementos Finitos. O objetivo é maximizar a primeira frequência natural e distanciar as frequências entre si:

$$\begin{aligned}
f(x) &= [f_1(x) \ f_2(x) \ f_3(x)] \\
f_1(x) &= \text{máx } \omega_1 \\
f_2(x) &= \text{máx } (\omega_2 - \omega_1) \\
f_3(x) &= \text{máx } (\omega_3 - \omega_2)
\end{aligned} \tag{15}$$

sujeito a : $0,02 \leq h_i \leq 0,03 \text{ m}$, $i = 1, 3$

$$0,02 \leq b_i \leq 0,03 \text{ m} \tag{16}$$

$$190.10^3 \leq K \leq 760.10^3 \text{ N / m}$$

sendo dados: $L = 0,1 \text{ m}$ $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ Kg/m}^3$ $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ $m = 0,1$ $M_{\text{viga}} = 0,14625 \text{ Kg}$

Seja inicialmente a obtenção da solução ideal, conforme a Eq. (3), sendo que os resultados encontrados são mostrados na Tab.1. Considere: **Caso 1:** $f_1^o = \text{máx } f_1(x)$; **Caso 2:** $f_2^o = \text{máx } f_2(x)$; **Caso 3:** $f_3^o = \text{máx } f_3(x)$.

Tabela 1: Resultados obtidos para a solução ideal

Ptos. Iniciais		Caso 1	Caso 2	Caso 3
$b_1 \text{ (mm)}$	25	30	20	30
$b_2 \text{ (mm)}$	25	30	20	30
$b_3 \text{ (mm)}$	25	20	20	20
$h_1 \text{ (mm)}$	25	30	20	30
$h_2 \text{ (mm)}$	25	30	20	30
$h_3 \text{ (mm)}$	25	20	20	30
$K \text{ (N/m)}$	380	759,55	759,55	189,89
$\omega_1 \text{ (Hz)}$		8,11	4,46	5,32
$\omega_2 \text{ (Hz)}$		16,28	14,58	11,13
$\omega_3 \text{ (Hz)}$		54,01	38,31	57,71
$f_i^o \text{ (Hz)}$		8,11	10,12	46,58

a) Método da Ponderação dos Objetivos

Conforme as Eqs. (6) e (7) definiu-se o estudo de dois casos:

$$\text{Caso 1: } f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \alpha_3 f_3(x) \tag{17}$$

$$\text{Caso 2: } f(x) = \alpha_1 \frac{f_1(x)}{f_1^o} + \alpha_2 \frac{f_2(x)}{f_2^o} + \alpha_3 \frac{f_3(x)}{f_3^o} \tag{18}$$

Tabela 2: Resultados obtidos com o Método da Ponderação

Ptos. Iniciais		Caso 1				Caso 2			
		$\alpha_1 = 0,1$	$\alpha_1 = 0,33$	$\alpha_1 = 0,1$	$\alpha_1 = 0,8$	$\alpha_1 = 0,1$	$\alpha_1 = 0,33$	$\alpha_1 = 0,1$	$\alpha_1 = 0,8$
		$\alpha_2 = 0,1$	$\alpha_2 = 0,33$	$\alpha_2 = 0,8$	$\alpha_2 = 0,1$	$\alpha_2 = 0,1$	$\alpha_2 = 0,33$	$\alpha_2 = 0,8$	$\alpha_2 = 0,1$
		$\alpha_3 = 0,8$	$\alpha_3 = 0,33$	$\alpha_3 = 0,1$	$\alpha_3 = 0,1$	$\alpha_3 = 0,8$	$\alpha_3 = 0,33$	$\alpha_3 = 0,1$	$\alpha_3 = 0,1$
$b_1 \text{ (mm)}$	25	30	30	30	30	30	30	30	30
$b_2 \text{ (mm)}$	25	30	29	20	30	25,2	20	20	29,7
$b_3 \text{ (mm)}$	25	20	20	20	20	20	20	20	20
$h_1 \text{ (mm)}$	25	30	30	30	30	30	30	30	30
$h_2 \text{ (mm)}$	25	30	30	30	30	30	30	20	30
$h_3 \text{ (mm)}$	25	30	30	20	27,4	30	20	20	20
$K \text{ (N/m)}$	380	189,90	393,80	759,55	759,55	378,39	759,54	759,55	759,55
$\omega_1 \text{ (Hz)}$		5,32	6,86	7,98	7,94	6,75	7,98	6,72	8,11

ω_2 (Hz)	11,13	12,34	16,89	15,22	12,38	16,89	16,62	16,29
ω_3 (Hz)	57,71	57,85	54,97	57,70	57,82	54,97	48,16	54,03
$f_1(x)$	5,32	6,86	7,98	7,94	6,75	7,98	6,72	8,11
$f_2(x)$	5,81	5,54	8,92	7,28	5,63	8,92	9,90	8,19
$f_3(x)$	46,60	45,45	38,08	42,48	45,44	38,08	31,54	37,74
$f(x)$	38,38	19,26	11,74	11,33	9,19	0,89	0,93	0,96

O resultado ótimo é fortemente dependente dos valores adotados para estes coeficientes. Por exemplo, nos dois casos, quando $\alpha_1 = 0.8$ (prioridade maior para f_1) obtém-se um valor próximo à solução ideal ($f_1^o = 8,11$). O mesmo ocorre quando prioriza-se f_2 ou f_3 .

Neste exemplo, o sucesso pode ser justificado considerando uma distribuição convexa no espaço das funções objetivo, pois neste caso, pode-se garantir que o método encontre um conjunto ótimo de Pareto (Deb, 2001).

b) Método de Otimização Hierárquico

Caso 1: Considere o problema de otimização priorizando $f_1(x)$ e com as restrições adicionais:

$$f_2(x) \leq \left(1 + \frac{\xi_1}{100}\right) f_2(x^{(2)}) \quad \text{e} \quad f_3(x) \leq \left(1 + \frac{\xi_1}{100}\right) f_3(x^{(3)}) \quad (19)$$

Caso 2: Considere o problema de otimização priorizando $f_2(x)$ e com as restrições adicionais:

$$f_1(x) \leq \left(1 + \frac{\xi_2}{100}\right) f_1(x^{(1)}) \quad \text{e} \quad f_3(x) \leq \left(1 + \frac{\xi_1}{100}\right) f_3(x^{(3)}) \quad (20)$$

Caso 3: Considere o problema de otimização priorizando $f_3(x)$ e com as restrições adicionais:

$$f_1(x) \leq \left(1 + \frac{\xi_2}{100}\right) f_1(x^{(1)}) \quad \text{e} \quad f_2(x) \leq \left(1 + \frac{\xi_1}{100}\right) f_2(x^{(2)}) \quad (21)$$

Tabela 3: Resultados obtidos com o Método Hierárquico

		Caso 1			Caso 2			Caso 3		
Ptos. Iniciais		$\xi_1 = 0,06$	$\xi_1 = 0,08$	$\xi_1 = 0,10$	$\xi_1 = 0,06$	$\xi_1 = 0,08$	$\xi_1 = 0,10$	$\xi_1 = 0,06$	$\xi_1 = 0,08$	$\xi_1 = 0,10$
b_1 (mm)	25	30	30	30	20	20	30	30	30	30
b_2 (mm)	25	30	30	30	20	20	30	30	30	30
b_3 (mm)	25	20	20	20	20	20	20	20	20	20
h_1 (mm)	25	30	30	30	20	20	30	30	30	30
h_2 (mm)	25	30	30	30	20	20	30	30	30	30
h_3 (mm)	25	20	20	20	20	20	30	30	30	30
K (N/m)	380	759,55	759,55	759,55	759,55	759,55	189,89	189,89	189,89	189,89
ω_1 (Hz)		8,11	8,11	8,11	4,46	4,46	4,46	5,32	5,32	5,32
ω_2 (Hz)		16,28	16,28	16,28	14,58	14,58	14,58	11,13	11,13	11,13
ω_3 (Hz)		54,01	54,01	54,01	38,31	38,31	38,31	57,71	57,71	57,71
$f_1(x)$		8,11	8,11	8,11	4,46	4,46	4,46	5,32	5,32	5,32
$f_2(x)$		8,18	8,18	8,18	10,12	10,12	10,12	5,82	5,82	5,82
$f_3(x)$		37,73	37,73	37,73	23,73	23,73	23,73	46,58	46,58	46,58
$f(x)$		8,11	8,11	8,11	10,12	10,12	10,12	46,58	46,58	46,58

Nos três casos da Tab. 3, nota-se que a função priorizada tem seus valores maximizados e que os resultados obtidos aproximam-se dos valores ideais. Além disso, novamente, os fatores ξ_1 não influenciaram os resultados, não justificando a sua utilização.

c) Método da Negociação

Caso 1: $\min f_1(x) = -\omega_1$ (22)

sujeita a: $0,02 \leq h_i \leq 0,03 \text{ m}, 0,02 \leq b_i \leq 0,03 \text{ m} \quad i=1,3$
 $190.10^3 \leq K \leq 760.10^3 \text{ N/m}$ (23)
 $-(\omega_2 - \omega_1) \leq -\xi_2$
 $-(\omega_3 - \omega_2) \leq -\xi_2$

Caso 2: $\min f_2(x) = -(\omega_2 - \omega_1)$ (24)

sujeita a: $0,02 \leq h_i \leq 0,03 \text{ m}, 0,02 \leq b_i \leq 0,03 \text{ m} \quad i=1,3$
 $190.10^3 \leq K \leq 760.10^3 \text{ N/m}$ (25)
 $-\omega_1 \leq -\xi_2$
 $-(\omega_3 - \omega_2) \leq -\xi_2$

Caso 3: $\min f_3(x) = -(\omega_3 - \omega_2)$ (26)

sujeita a: $0,02 \leq h_i \leq 0,03 \text{ m}, 0,02 \leq b_i \leq 0,03 \text{ m} \quad i=1,3$
 $190.10^3 \leq K \leq 760.10^3 \text{ N/m}$ (27)
 $-\omega_1 \leq -\xi_2$
 $-(\omega_2 - \omega_1) \leq -\xi_2$

Construindo a tabela de pagamento, foram adotados: $\xi_2 = -0,96$, $\xi_2 = -0,65$ e $\xi_2 = -0,23$.

Tabela 4: Resultados obtidos com o Método da Negociação

		Caso 1			Caso 2			Caso 3		
Ptos. Iniciais		$\xi_2 = -0,96$	$\xi_2 = -0,65$	$\xi_2 = -0,23$	$\xi_2 = -0,96$	$\xi_2 = -0,65$	$\xi_2 = -0,23$	$\xi_2 = -0,96$	$\xi_2 = -0,65$	$\xi_2 = -0,23$
$b_1 \text{ (mm)}$	25	30	30	30	20	20	30	30	30	30
$b_2 \text{ (mm)}$	25	30	30	30	20	20	30	30	30	30
$b_3 \text{ (mm)}$	25	20	20	20	20	20	20	20	20	20
$h_1 \text{ (mm)}$	25	30	30	30	20	20	30	30	30	30
$h_2 \text{ (mm)}$	25	30	30	30	20	20	30	30	30	30
$h_3 \text{ (mm)}$	25	20	20	20	20	20	30	30	30	30
$K \text{ (N/m)}$	380	759,55	759,55	759,55	759,55	759,55	189,89	189,89	189,89	189,89
$\omega_1 \text{ (Hz)}$		8,11	8,11	8,11	4,46	4,46	4,46	5,32	5,32	5,32
$\omega_2 \text{ (Hz)}$		16,28	16,28	16,28	14,58	14,58	14,58	11,13	11,13	11,13
$\omega_3 \text{ (Hz)}$		54,01	54,01	54,01	38,31	38,31	38,31	57,71	57,71	57,71
$f_1(x)$		8,11	8,11	8,11	4,46	4,46	4,46	5,32	5,32	5,32
$f_2(x)$		8,18	8,18	8,18	10,12	10,12	10,12	5,82	5,82	5,82
$f_3(x)$		37,73	37,73	37,73	23,73	23,73	23,73	46,58	46,58	46,58
$f(x)$		8,11	8,11	8,11	10,12	10,12	10,12	46,58	46,58	46,58

A Tab. 4 apresenta bons resultados, idênticos aos do método anterior, uma vez que os valores de ξ_2 não tem uma influência significativa. Os valores obtidos são similares aos da solução ideal.

d) Método do Critério Global

$$\text{Caso 1: } \min f(x) = \left(\frac{f_1^o - f_1(x)}{f_1^o} \right)^2 + \left(\frac{f_2^o - f_2(x)}{f_2^o} \right)^2 + \left(\frac{f_3^o - f_3(x)}{f_3^o} \right)^2 \quad (28)$$

$$\text{sujeita a: } 0,02 \leq h_i \leq 0,03 \text{ m}, 0,02 \leq b_i \leq 0,03 \text{ m} \quad i=1,3 \\ 190 \cdot 10^3 \leq K \leq 760 \cdot 10^3 \text{ N/m} \quad (29)$$

$$\text{Caso 2: } \min f(x) = [(f_1^o - f_1(x))^2 + (f_2^o - f_2(x))^2 + (f_3^o - f_3(x))^2]^{\frac{1}{2}} \quad (30)$$

$$\text{sujeita a: } 0,02 \leq h_i \leq 0,03 \text{ m}, 0,02 \leq b_i \leq 0,03 \text{ m} \quad i=1,3 \\ 190 \cdot 10^3 \leq K \leq 760 \cdot 10^3 \text{ N/m} \quad (31)$$

Tabela 5: Resultados obtidos com o Critério Global

Ptos. Iniciais		Caso 1	Caso 2
$b_1 \text{ (mm)}$	25	30	30
$b_2 \text{ (mm)}$	25	20	30
$b_3 \text{ (mm)}$	25	20	20
$h_1 \text{ (mm)}$	25	30	30
$h_2 \text{ (mm)}$	25	30	30
$h_3 \text{ (mm)}$	25	20	30
$K \text{ (N/m)}$	380	759,55	189,89
$\omega_1 \text{ (Hz)}$		7,97	5,32
$\omega_2 \text{ (Hz)}$		16,89	11,13
$\omega_3 \text{ (Hz)}$		54,97	57,71
$f_1(x)$		7,98	5,32
$f_2(x)$		8,92	5,82
$f_3(x)$		38,08	46,58
$f(x)$		10,78	95,47

O resultado obtido para o caso 1 é muito bom, próximo à solução ideal. Mesmo para o caso 2, como as funções possuem valores absolutos de mesma grandeza, a solução é aceitável. O método é muito atraente quando não se deseja priorizar os critérios.

e) Método da Programação de Metas

Sejam as metas estabelecidas como os seus valores ideais, ou seja, a meta a ser alcançada por $f_1(x) = 8,11$ que é o seu valor ideal, o mesmo acontece com $f_2(x) = 10,12$ e $f_3(x) = 46,58$.

Tabela 6: Resultados obtidos com o Método da Programação de Metas Ponderada

Ptos. Iniciais		$\alpha_1 = 0,1$ $\alpha_2 = 0,1$ $\alpha_3 = 0,8$	$\alpha_1 = 0,33$ $\alpha_2 = 0,33$ $\alpha_3 = 0,33$	$\alpha_1 = 0,1$ $\alpha_2 = 0,8$ $\alpha_3 = 0,1$	$\alpha_1 = 0,8$ $\alpha_2 = 0,1$ $\alpha_3 = 0,1$
$b_1 \text{ (mm)}$	25	29,99	30	20	29,99
$b_2 \text{ (mm)}$	25	29,99	20	20	29,92
$b_3 \text{ (mm)}$	25	20	20	20	20
$h_1 \text{ (mm)}$	25	29,99	30	20	30
$h_2 \text{ (mm)}$	25	29,99	30	30	30
$h_3 \text{ (mm)}$	25	29,99	30	21,16	27,76
$K \text{ (N/m)}$	380	190,0	478,13	759,55	759,54
p_1	30	- 13,42	- 15,19	- 12,74	- 16,03
p_2	30	- 15,93	- 16,21	- 19,64	- 17,37

p_3	30	- 93,17	- 91,27	- 78,58	- 89,17
$\omega 1$ (Hz)		5,31	7,09	4,63	7,93
$\omega 2$ (Hz)		11,13	13,19	14,15	15,18
$\omega 3$ (Hz)		57,71	57,88	46,15	57,77
$f_1(x)$		5,31	7,09	4,63	7,93
$f_2(x)$		5,81	6,09	9,52	7,25
$f_3(x)$		46,58	44,69	31,99	42,59
$f(x)$		77,47	40,85	24,84	23,48

Seja o problema de otimização:

$$f(x) = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 \quad (32)$$

$$\text{sujeito a: } 0,02 \leq h_i \leq 0,03 \text{ m, } 0,02 \leq b_i \leq 0,03 \text{ m} \quad i=1,3$$

$$190 \cdot 10^3 \leq K \leq 760 \cdot 10^3 \text{ N/m} \quad (33)$$

$$f_1(x) - p_1 - 8,11 \leq 0$$

$$f_2(x) - p_2 - 10,12 \leq 0$$

$$f_3(x) - p_3 - 46,58 \leq 0$$

O resultado obtido por este método é semelhante ao resultado obtido pelo primeiro método (Método da Ponderação dos Objetivos) onde, ao se priorizar $\alpha_1 = 0,8$ (prioridade maior para f_1) obtém-se um valor próximo à solução ideal ($f_1^0 = 8,11$). O mesmo ocorre quando prioriza f_2 e f_3 .

Neste método o pesquisador deve ser sensível tanto às metas a serem alcançadas quanto aos intervalos dos p_i . Uma vez que, intervalos não apropriados, não permite a obtenção de soluções ótimas.

Observando as restrições impostas em (16) e os resultados obtidos para b_i , h_i e K nas Tab.2 a 8, verifica-se que todos os pontos ótimos encontrados obedecem às restrições impostas.

4. CONCLUSÕES

As cinco técnicas estudadas mostraram que é possível trabalhar com funções multi-objetivo possibilitando a obtenção de boas soluções ótimas. O método Hierárquico e da Negociação são indicados quando se deseja priorizar um determinado critério, sendo que o resultado é fortemente influenciado pela escolha do critério mais importante. O método da Ponderação dos Objetivos também pode ser usado nesta situação, sendo que a escolha dos fatores de ponderação permite a priorização. No quarto método é fundamental que as funções estejam adimensionalizadas, principalmente quando as funções possuem valores absolutos que diferem muito entre si, podendo usar os valores da solução ideal para esta finalidade. O método Global é indicado para os casos onde se deseja obter a solução que atenda todas as funções objetivo, considerando-as com o mesmo nível de importância. No último método requer a escolha das metas, a priorização dos objetivos e ainda a escolha do intervalo dos p_i , sendo necessário um bom conhecimento do problema em estudo. O usuário possui várias ferramentas ao seu dispor, sendo recomendável a utilização de diferentes técnicas de otimização multi-critérios na solução do problema, o que permitirá a comparação dos resultados obtidos.

REFERÊNCIAS

- Ambrósio, L. A., 2002, *Programação Multicritério: Um Instrumento Para Planejamento Agroambiental*, Curso De Especialização Em Gestão Agroambiental, Laboratório de Análises e Métodos Quantitativos, FAEF.
- Deb, K., 2001, *Multi-Objective Optimization using Evolutionary Algorithms*, John Wiley, New York.

- Boychuk, L. M. and Ovchinnikov, V. O., 1973, Principal Methods of Solution Multicriterial Optimization Problems (survey), *Soviet Automatic Control*, 6, 1– 4.
- Eschenauer, H. , Koski,J., Osyczka, A.,(1990). *Multicriteria Design Optimization*. Berlin, Springer-Verlag.
- Osyczka, A., 1981, An Approach to Multicriterion Optimization for Structural Design, *Proceedings of International Symposium on Optimum Structural Design*, University of Arizona.
- Salukvadze, M. E., 1974, On the Existence of Solution in Problems of Optimization under Vector Valued Criteria, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 12, 2, 203 – 217.
- Saramago, S. F. P.; Steffen Jr, V., 2000, Optimal trajectory planning of robot manipulators in the presence of moving obstacles. *Mechanism And Machine Theory*, Elsevier Science Ltda, v. 35, n. 8, p. 1079-1094.
- Vankan, W.J., Maas,R.,2002, *Approximate modelling and multi objective optimisation in aeronautic design*, CMMSE, National Aerospace Laboratory NLR, Alicante, Spain.

APPLYING MULTI-CRITERION OPTMIZATION TO A DYNAMIC PROBLEM

Oliveira, Lidiane S.

Universidade Federal de Uberlândia
Av. João Naves de Ávila, 2160, CEP: 38408-100
Fax: (34) 3239-4126 - Uberlândia (MG) - Brasil
lsoliviera@mecanica.ufu.br

Saramago, Sezimária F. P.

Universidade Federal de Uberlândia
Av. João Naves de Ávila, 2160, CEP: 38408-100
Fax: (34) 3239-4126 - Uberlândia (MG) - Brasil
saramago@ufu.br

Abstract. *There are many situations in engineering optimization problems in which the engineers' goal is to minimize and or maximize not a single objective function but several functions simultaneously. These functions form a mathematical description of performance criteria which are usually in conflict with each other. This situation is formulated as a multicriterion optimization problem also called multi-performance, multiple objective or vector optimization. Multicriterion optimization problems arise in different scientifically applications and researches are devoting attention to developing methods for solving them. Thus, exist several criteria can be considered to solve this complex optimization. Some basic methods are based on function scalarization in which a vector function is transformed to a scalar function; others methods are developed on the basis of the min-max approach. This paper presents a contribution to the study about multicriterion optimization and is intended to serve as an introductory text to this topic. Some criteria are studied and compared. To illustrate the studied methodologies, the solution of a dynamic problem is presented.*

Keywords: *multicriterion optimization, weighting objectives, hierarchical, trade-off, global criterion*