

INFLUÊNCIA DO ENRIJECIMENTO POR TENSÕES NO COMPORTAMENTO DINÂMICO DE PLACAS RETANGULARES: PROBLEMAS DIRETOS E INVERSOS

Domingos Alves Rade
Jhojan Enrique Rojas Flores
Alexandre Campos Bezerra

Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Av. João Naves de Ávila 2160 – Campus Santa Mônica – CP 593 – CEP 38400 902 – Uberlândia/MG - Brasil.

domingos@ufu.br

jerojas@mecanica.ufu.br

acbezerra@mecanica.ufu.br

Resumo: Diversos estudos evidenciam que a presença de tensões mecânicas tem influência significativa no comportamento estático e dinâmico de elementos estruturais, devido ao efeito conhecido por enrijecimento por tensões. Como um complemento aos estudos previamente realizados pelos autores, neste trabalho analisa-se a influência dos esforços de membrana normais e cisalhantes no comportamento dinâmico de placas retangulares finas com ênfase em dois aspectos particulares: a) a caracterização numérica da influência dos esforços de membrana nas frequências naturais associadas aos modos de flexão; b) a possibilidade de identificação de carregamentos externos aplicados em seu plano utilizando um conjunto de frequências naturais experimentais associadas aos modos de flexão. Com base na teoria de Kirchhoff para placas finas e o Método dos Modos Assumidos é apresentada a teoria requerida para a elaboração de um modelo matemático que simula o comportamento vibratório associado à flexão de placas submetidas a carregamentos atuantes em seu plano. A seguir, é discutida a parametrização do campo de tensões e é proposto o uso de aproximações polinomiais para a função de tensão de Airy. O problema de identificação de parâmetros é formulado de maneira que a distribuição de tensões ou, alternativamente, as cargas externas, são identificadas resolvendo um problema de otimização onde a função objetivo representa os desvios entre os valores das frequências naturais da placa carregada e as correspondentes previstas pelo modelo. Finalmente são apresentados os resultados experimentais e as simulações numéricas para ilustrar alguns dos aspectos mais importantes deste estudo.

Palavras-chave: Enrijecimento por Tensões, Placas de Kirchhoff, Problemas Inversos, Método dos Modos Assumidos.

1. INTRODUÇÃO

O efeito conhecido por enrijecimento por tensões é caracterizado pela variação da rigidez à flexão e a conseqüente modificação do comportamento estático e dinâmico de elementos estruturais tais como cordas, vigas e planas na presença de um determinado campo de tensões. Este fenômeno é observado na presença de campos de tensões gerados por carregamento externo ou por tensões residuais auto-equilibradas que podem ser produzidas nos processos de fabricação termo-mecânicos tais como a soldagem ou deformação a frio.

Diversos estudos evidenciaram que a presença de tensões mecânicas tem influência significativa no comportamento estático e dinâmico de elementos estruturais. Simons e Leissa (1971) usaram a aproximação de Rayleigh-Ritz para investigar a influência do carregamento externo atuante em seu plano nas frequências naturais de placas retangulares engastadas livres. O mesmo método, combinado com o uso de funções de forma de vigas foi utilizado por Kaldas e Dickinson (1981) para representar a deflexão transversal e caracterizar a influência de vários tipos de distribuições de tensões no comportamento vibratório de placas retangulares. Donadon *et al.* (2002) investigaram numérica e experimentalmente o efeito de tensões atuantes no plano médio de placas compostas induzidas por atuadores piezelétricos nas frequências naturais destes elementos estruturais. Recentemente, o efeito de tensões térmicas não uniformes no comportamento vibratório e à flambagem de placas retangulares foi estudado numericamente por Mead (2003). Rojas (2004) continuou este estudo detalhando o efeito do enrijecimento por tensões no comportamento dinâmico de pórticos planos bidimensionais e de placas retangulares, considerando a solução de problemas diretos e inversos. Greening e Lieven (2001) demonstraram experimentalmente a variabilidade das respostas dinâmicas de estruturas nominalmente idênticas, devido à presença de tensões residuais introduzidas no processo de fabricação. Os mesmos autores desenvolveram uma estratégia para incluir o efeito do enrijecimento por tensões em um procedimento de identificação de cargas axiais atuantes em um dos elementos dos pórticos bidimensionais através do ajuste de modelos. Em uma aproximação similar, Rojas *et al.* (2004) empregaram métodos heurísticos de otimização para a identificação de cargas externas neste tipo de estruturas. A maioria destes estudos demonstrou a forte influência exercida pelo estado de solicitação nas características dinâmicas de sistemas vibratórios, concluindo na maioria dos casos que o efeito do enrijecimento por tensões deve ser considerado nos procedimentos de modelagem para assegurar a precisão das estimativas dos modelos.

Este artigo apresenta uma metodologia para a identificação de cargas externas atuantes no plano médio de placas retangulares, dado um conjunto de frequências naturais que correspondem aos modos de flexão das placas carregadas e um modelo matemático que relaciona estas frequências com o carregamento externo. O problema inverso é formulado de maneira que os parâmetros de carga, considerados desconhecidos, são identificados resolvendo um problema de otimização restrito não-linear. A seguir, são discutidos os diversos aspectos relacionados ao método de identificação, incluindo a teoria subjacente, assim como, os resultados obtidos nas simulações numéricas e os ensaios experimentais.

2. MODELAGEM DE PLACAS FINAS SUBMETIDAS A ESFORÇOS DE MEMBRANA EM PREGANDO O MÉTODO DOS MODOS ASSUMIDOS

A Figura 1 ilustra uma placa retangular de dimensões $a \times b \times h$ sendo mostradas também as tensões normais e cisalhantes σ_x , σ_y e τ_{xy} .

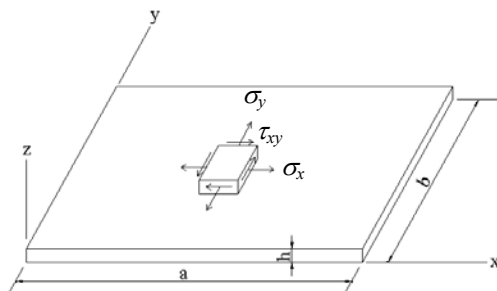


Figura 1: Componentes de tensão aplicadas em um elemento de placa.

A teoria de Kirchhoff para placas finas considera que:

- a espessura da placa é fina e constante. As superfícies externas são paralelas ao plano médio, coincidindo com o plano x, y ;

- a seção transversal permanece plana e perpendicular ao plano médio após a deformação;
- é suposto o estado plano de tensão, desconsiderando a tensão cisalhante transversal.

Desprezando os efeitos dissipativos, é utilizado o Método dos Modos Assumidos (Craig Jr., 1981) para obter e discretizar um modelo de placa que represente as vibrações de flexão considerando a ação de esforços de membrana. Desta forma, as expressões da energia cinética e potencial de uma placa podem ser escritas da seguinte maneira (Géradin e Rixen, 1997):

$$T(t) = m \int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy \quad (1)$$

$$U(t) = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left\{ D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2D(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \\ + \frac{1}{2} h \int_0^b \int_0^a \left[\sigma_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \sigma_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2\tau_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy \quad (2)$$

onde:

- $w = w(x, y, t)$: campo de deslocamento transversal.
- m : densidade da placa (massa por unidade de área).
- ν : coeficiente de Poisson.
- $D = Eh^3 / [12(1-\nu^2)]$: rigidez flexional da placa.
- E : módulo de elasticidade do material.

De acordo com o Método dos Modos Assumidos, o campo de deslocamento transversal é expressa como uma combinação linear truncada de funções admissíveis arbitradas. Seguindo a aproximação adotada por Kaldas e Dickinson (1981), estas funções são escolhidas de forma a representar as autofunções da vibração de vigas e satisfazer as condições de contorno geométricas da placa nas direções x e y . Assim escrevem-se:

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q q_{ij}(t) \phi_i(x) \psi_j(y) \quad (3)$$

onde p e q são o número de autofunções consideradas na série nas direções x e y , respectivamente; $q_{ij}(t)$ são os coeficientes a serem determinados em coordenadas generalizadas e $\phi_i(x)$ e $\psi_j(y)$ designam as autofunções de viga cujas expressões descrevem combinações de funções trigonométricas e hiperbólicas (Young, 1950):

$$\phi_i(x) = A_i \sin\left(\eta_i \frac{x}{a}\right) + B_i \cos\left(\eta_i \frac{x}{a}\right) + C_i \sinh\left(\eta_i \frac{x}{a}\right) + D_i \cosh\left(\eta_i \frac{x}{a}\right) \quad (4.a)$$

$$\psi_j(y) = E_j \sin\left(\xi_j \frac{y}{b}\right) + F_j \cos\left(\xi_j \frac{y}{b}\right) + G_j \sinh\left(\xi_j \frac{y}{b}\right) + H_j \cosh\left(\xi_j \frac{y}{b}\right) \quad (4.b)$$

Nas equações (4), A_i , B_i , C_i , D_i , η_i , E_i , F_i , G_i , H_i , ξ_i são coeficientes que dependem das condições de contorno. Young (1950) forneceu os valores numéricos destes coeficientes para a combinação de três condições de contorno: *engastada-engastada*, *engastada-livre* e *livre-livre*.

Para evitar complicações desnecessárias na notação, a expressão da expansão (3) é escrita da seguinte forma:

$$w(x, y, t) = \sum_{k=1}^N C_k(t) \eta_k(x, y) \quad (5)$$

onde:

- $C_k(t) = q_{ij}(t)$
- $\eta_k(x, y) = \phi_i(x) \psi_j(y)$
- $N = p \times q$
- $k = (j-1)p + i$

Introduzindo a notação matricial, a equação (5) é escrita:

$$w(x, y, t) = \{\eta(x, y)\}^T \{C(t)\} \quad (6)$$

onde:

$$\{\eta(x, y)\} = [\eta_1(x, y) \quad \eta_2(x, y) \quad \cdots \quad \eta_N(x, y)]^T \quad (7.a)$$

$$\{C(t)\} = [C_1(t) \quad C_2(t) \quad \cdots \quad C_N(t)]^T \quad (7.b)$$

Introduzindo a equação (6) nas equações (1) e (2), são obtidas as expressões das energias cinética e potencial:

$$T(t) = \frac{1}{2} \{\dot{C}(t)\}^T [M] \{\dot{C}(t)\} \quad U(t) = \frac{1}{2} \{C(t)\}^T [K] \{C(t)\} \quad (8)$$

onde:

$$[M] = \rho h \int_0^b \int_0^a \{\eta(x, y)\} \{\eta(x, y)\}^T dx dy \quad (9)$$

$$[K(\{\sigma\})] = [K_1] + [K_2(\{\sigma\})] \quad (10)$$

com:

$$[K_1] = \int_0^a \int_0^b D \left[\{\eta_{xx}\} \{\eta_{xx}\}^T + \{\eta_{yy}\} \{\eta_{yy}\}^T + 2\nu \{\eta_{xx}\} \{\eta_{yy}\}^T + 2(1-\nu) \{\eta_{xy}\} \{\eta_{xy}\}^T \right] dx dy \quad (11)$$

$$[K_2(\{\sigma\})] = \int_0^b \int_0^a \left[\sigma_x \{\eta_x\} \{\eta_x\}^T + \sigma_y \{\eta_y\} \{\eta_y\}^T + 2\tau_{xy} \{\eta_x\} \{\eta_y\}^T \right] dx dy \quad (12)$$

Nas equações anteriores, os índices indicam as derivadas parciais dos produtos das funções de vigas em relação às respectivas variáveis espaciais e $\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{bmatrix}^T$ indica o vetor das componentes de tensão.

Observa-se que a influência das tensões de membrana no comportamento dinâmico da placa aparecem na matriz $[K_2(\{\sigma\})]$ denominada matriz de rigidez geométrica. Na equação (12) pode ser observado que esta matriz é uma função linear dos componentes de tensão.

Para obter as equações diferenciais do movimento, são utilizadas as equações de Lagrange, o que conduz a:

$$[M]\{\ddot{C}(t)\} + [K(\{\sigma\})]\{C(t)\} = \{0\} \quad (13)$$

que representa um modelo discreto de N g.d.l. para o movimento vibratório devido à flexão da placa considerando os esforços de membrana.

As equações de (13) podem ser numericamente resolvidas em coordenadas generalizadas $\{C(t)\}$ e o campo de deslocamento transversal da placa expresso em coordenadas físicas pode ser obtido introduzindo o cálculo em coordenadas generalizadas anterior na equação (5), para um conjunto de coordenadas (x, y) .

A partir da equação (13), é formulado o seguinte problema de autovalor:

$$([K(\{\sigma\})] - \lambda_r [M])\{C_r\} = \{0\} \quad (14)$$

Uma vez resolvido este problema, os autovalores λ fornecem as frequências naturais da placa ($\lambda_r = \omega_r^2$) e os autovetores $\{C_r\}$, que após a transformação anterior em coordenadas físicas empregando a equação (12), fornecem os correspondentes modos naturais de vibração.

Além das auto soluções, as funções de resposta em frequência podem ser calculadas a partir das matrizes de massa e rigidez do sistema utilizando o Método dos Modos Assumidos. Com este objetivo, a variação harmônica com frequência ω para o a carga transversal distribuída e o deslocamento transversal é assumido, como indicado nas seguintes equações:

$$P(x, y, t) = \bar{P}(x, y) e^{i\omega t} \quad (15.a)$$

$$\{C(t)\} = \{\bar{C}\} e^{i\omega t} \quad (15.b)$$

$$w(x, y, t) = \bar{W}(x, y) e^{i\omega t} \quad (15.c)$$

onde as funções $\bar{P}(x, y)$ e $\bar{W}(x, y)$ indicam a distribuição espacial do carregamento lateral e do deslocamento, respectivamente. Combinando das equações (6), (15.b), tem-se:

$$\bar{W}(x, y) = \eta(x, y) \{\bar{C}\} \quad (16)$$

As forças associadas em coordenadas generalizadas para o carregamento transversal são definidas como:

$$\{Q(t)\} = \{\bar{Q}\} e^{i\omega t} \quad (17)$$

com:

$$\{\bar{Q}\} = \int_0^b \int_0^a \bar{P}(x, y) \eta(x, y) dx dy \quad (18)$$

Após algumas manipulações algébricas, obtém-se a seguinte expressão para a resposta harmônica em coordenadas físicas observadas em c pontos da placa identificados pelas suas coordenadas $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_c, y_c)$:

$$\{\bar{W}\} = [H(\omega)] \{\bar{Q}\} \quad (19)$$

onde:

$$[H(\omega)] = [\bar{\eta}]^T ([K] - \omega^2 [M])^{-1} [\bar{\eta}] \quad (20.a)$$

$$[\bar{\eta}] = [\{\eta(x_1, y_1)\} \quad \{\eta(x_2, y_2)\} \quad \dots \quad \{\eta(x_c, y_c)\}] \quad (20.b)$$

A formulação desenvolvida anteriormente coloca em evidência o fato de que a presença de tensões de membrana influencia o comportamento estático e dinâmico à flexão da placa. Evidentemente, a precisão do modelo numérico obtido empregando o Método dos Modos Assumidos depende do número de autofunções de viga utilizado na expansão (3).

Considerando a dependência das respostas dinâmicas com o estado de tensão (ou, alternativamente, o carregamento externo), é possível considerar a possibilidade de avaliar a magnitude e/ou a distribuição das componentes de tensão (ou do carregamento externo), dado um conjunto de frequências naturais experimentais de uma placa solicitada. A viabilidade e a solução de um problema inverso são examinadas nas seções seguintes.

3. MODELAGEM DO CAMPO DE TENSÕES EMPREGANDO FUNÇÕES DE TENSÃO DE AIRY

No contexto do procedimento de identificação enfocado neste artigo, é conveniente expressar o campo de tensões aplicado numa placa em termos de um número reduzido de parâmetros. Um modelo adequado da distribuição de tensões no plano pode ser obtido utilizando uma função de tensão de Airy $U(x, y)$ que satisfaz (Timoshenko e Goodier, 1980):

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \quad (21)$$

As componentes de tensão σ_x, σ_y e τ_{xy} devem satisfazer as equações de compatibilidade e condições de equilíbrio. As forças de corpo são negligenciadas se em cada ponto da placa, a seguinte relação é obedecida:

$$\nabla^4 (U) = 0 \quad (22)$$

Diversos tipos de funções podem ser utilizados como funções de tensão de Airy, tais como funções trigonométricas, hiperbólicas e polinomiais. Neste estudo, são adotadas as seguintes funções polinomiais:

$$U(x, y) = C_{00} + C_{10}x + C_{01}y + C_{11}xy + C_{12}xy^2 + C_{21}x^2y + \dots \quad (23)$$

Pela associação das equações (12), (21), (22) e (23), a influência do campo de tensões nas frequências naturais e as funções de resposta em frequência de uma placa podem ser expressas em termos de um determinado número de coeficientes polinomiais C_{ij} . Portanto, adotando um polinômio adequado, o problema de identificação consiste em determinar os valores dos coeficientes que aparecem em (23). Claramente, estes coeficientes não são todos independentes desde que a equação (22) seja satisfeita.

4. MODELAGEM DO CAMPO DE TENSÕES UTILIZANDO DISTRIBUIÇÕES DE TENSÃO PREVIAMENTE ESTABELECIDAS

Em algumas circunstâncias, pode ser difícil ou impossível modelar com precisão suficiente o estado de tensão de uma placa utilizando polinômios de baixa ordem para representar as correspondentes funções de tensão de Airy. No caso de placas sujeitas a ação de cargas externas, uma aproximação simplificada pode ser empregada, a qual consiste em utilizar como base um modelo de elementos finitos que preestabelece uma distribuição de cargas externas onde somente a magnitude é considerada desconhecida. Desta forma, as magnitudes são consideradas como os parâmetros de carga a serem identificados. Seguindo esta aproximação, a equação (12) resulta:

$$[K_2] = \mathfrak{I} \int_0^b \int_0^a \left[\sigma'_x \{ \eta_x \} \{ \eta_x \}^T + \sigma'_y \{ \eta_y \} \{ \eta_y \}^T + 2\tau'_{xy} \{ \eta_x \} \{ \eta_y \}^T \right] dx dy \quad (24)$$

onde σ'_x , σ'_y e τ'_{xy} são as componentes de tensão calculadas a partir do modelo de elementos finitos sujeito a um carregamento externo arbitrado e $\mathfrak{I}$ é o fator de carga a ser determinado.

5. IDENTIFICAÇÃO DE TENSÕES COMO UM PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

O problema de identificação de tensões (ou cargas) é resolvido pela formulação de um problema de otimização restrito cujas variáveis de projeto são os parâmetros descritos no modelo de distribuição de tensão (ou os coeficientes do polinômio que representa a função tensão de Airy definida na seção prévia). Neste trabalho, a função objetivo foi definida de forma a representar a diferença adimensional entre os valores das frequências naturais experimentais da placa solicitada e as previstas pelo Método dos Modos Assumidos, descrito na Seção 2.

Deste modo, o problema de otimização é formulado como segue:

$$\min_{\{p\}} J = \frac{1}{\bar{\omega}} \sum_{p=1}^{nb_freq} W_p \left[\omega_p^{(m)} - \omega_p^{(c)}(\{p\}) \right] \quad (25)$$

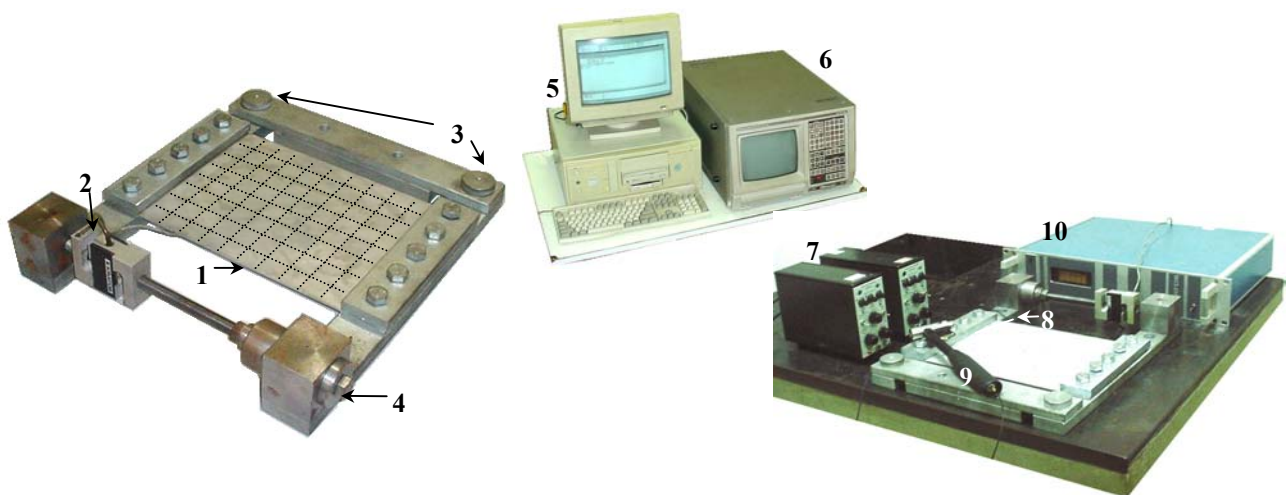
$$\bar{\omega} = \frac{1}{nb_freq} \sum_{i=1}^{nb_freq} \omega_i^{(m)}$$

onde $\{p\}$ designa, genericamente, o vetor de parâmetros de carga ou tensão desconhecidos, nb_freq é o número de frequências naturais utilizado na identificação, W_p representa os fatores de ponderação e $\omega_p^{(m)}$ e $\omega_p^{(c)}$ designam os valores calculados e medidos das frequências naturais, respectivamente.

Restrições laterais são introduzidas para limitar níveis de tensão a espaços de busca viáveis, considerando, por exemplo, o desempenho do material e a flambagem da estrutura.

6. ENSAIOS EXPERIMENTAIS

O procedimento de identificação foi avaliado utilizando dados experimentais obtidos em ensaios de laboratório realizados em uma placa retangular de alumínio, sujeita a um dispositivo de aplicação de carga especialmente projetado (Figura 2). A placa foi colocada no dispositivo de forma que a condição de contorno engastada-engastada-livre-livre foi simulada. No plano da placa, foi aplicada uma força não uniforme (tração e compressão), através de um parafuso, cujo valor foi medido com o auxílio de uma célula de carga. Para um determinado valor de carga aplicada, ensaios de vibração permitiram determinar as funções de resposta em frequência, relacionando as vibrações flexionais com o carregamento aplicado. Os principais componentes do aparato experimental são ilustrados na Figura 2.



1-Placa; 2-Célula de carga; 3-Pontos de fixação; 4-Parafuso de acionamento; 5-Microprocessador; 6-Analisador de espectro; 7-Amplificadores de carga; 8-Acelerômetro piezelétrico; 9- Martelo de impacto acoplado com uma célula de carga; 10-Condicionador de sinais.

Figura 2. Aparato experimental dos ensaios em laboratório na placa.

Os ensaios vibratórios foram realizados para diferentes valores de carga aplicada de tração ou compressão. Para cada valor de carga, o conjunto de respostas freqüenciais foi obtido pelo processamento dos dados de entrada (força de excitação) e saída (aceleração transversal). As amplitudes de uma FRF pontual da placa solicitada com uma carga $P = 190,30 \text{ N}$ e não solicitada são ilustradas na Figura 3. Nesta figura pode ser avaliada a influência do carregamento aplicando no plano da placa nas freqüências naturais da mesma.

A Tabela 1 mostra os valores das primeiras seis freqüências naturais para ambas condições de carregamento, assim como as variações relativas provocadas pelo carregamento. Verifica-se que, quando a carga aplicada é de tração, em geral, o valor das freqüências naturais tende a aumentar, ou seja, a placa torna-se mais rígida à flexão como resultado do efeito do enrijecimento por tensões. A sensibilidade das freqüências naturais com relação à carga varia para cada modo de vibração. Nas simulações numéricas foi verificado que para um dado modo de vibração, a sensibilidade está relacionada com a quantidade de deformação devido à flexão apresentada na direção de aplicação do carregamento.

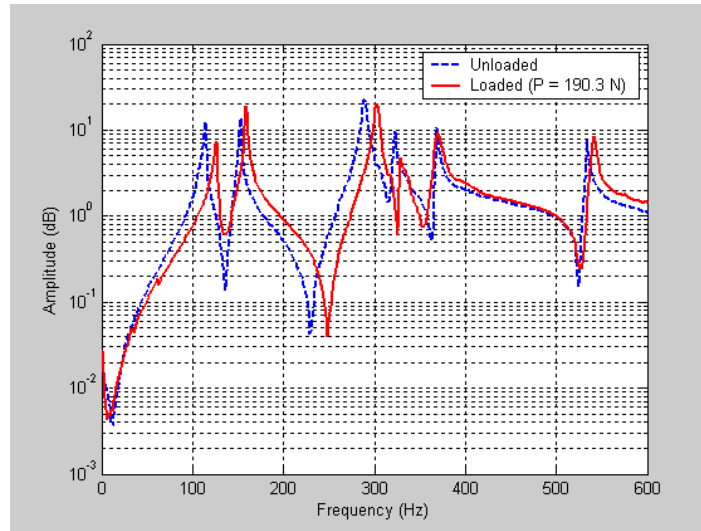


Figura 3. Amplitudes de uma FRF pontual da placa carregada e não carregada.

Tabela 1: Valores das frequências naturais da placa carregada e descarregada (Hz).

	1	2	3	4	5	6
Descarregada	113,75	152,50	290,00	322,50	368,75	533,75
Carregada	126,25	158,75	302,50	328,75	370,00	541,25
Variação (%)	10,99	4,10	4,31	1,94	0,34	1,41

7. MODELAGEM DA DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES

Com o objetivo de identificar a carga, foi adotado um modelo simplificado, ilustrado na Figura 4(a), para a distribuição de carga ao longo das bordas engastadas da placa, onde σ_1 e σ_2 são assumidos como desconhecidos. No modelo simplificado, a distribuição de tensão da placa é dada por:

$$\sigma_x(x, y) = \sigma_1 + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{b} y \quad \sigma_y(x, y) \equiv 0 \quad \tau_{xy}(x, y) \equiv 0 \quad (26)$$

Pela imposição do equilíbrio de momentos nos pontos de fixação do dispositivo de aplicação de carga em relação aos seus braços, como ilustrado na Figura 4(b), a relação entre os parâmetros de carga σ_1 e σ_2 e a força aplicada é obtida através de:

$$P = \frac{\frac{h(\sigma_2 - \sigma_1)b}{2} \left(\frac{2b}{3} + d_1 \right) + h\sigma_1 b \left(\frac{b}{2} + d_1 \right)}{d_1 + d_2 + b} \quad (27)$$

Pode ser observado que os parâmetros a serem determinados (σ_1 e σ_2) permitem caracterizar completamente o estado de tensão da placa, de acordo com a equação (26). Conseqüentemente, a carga aplicada P pode ser estimada a partir da equação (27) e o valor estimado pode ser comparado com o valor exato fornecido pela célula de carga.

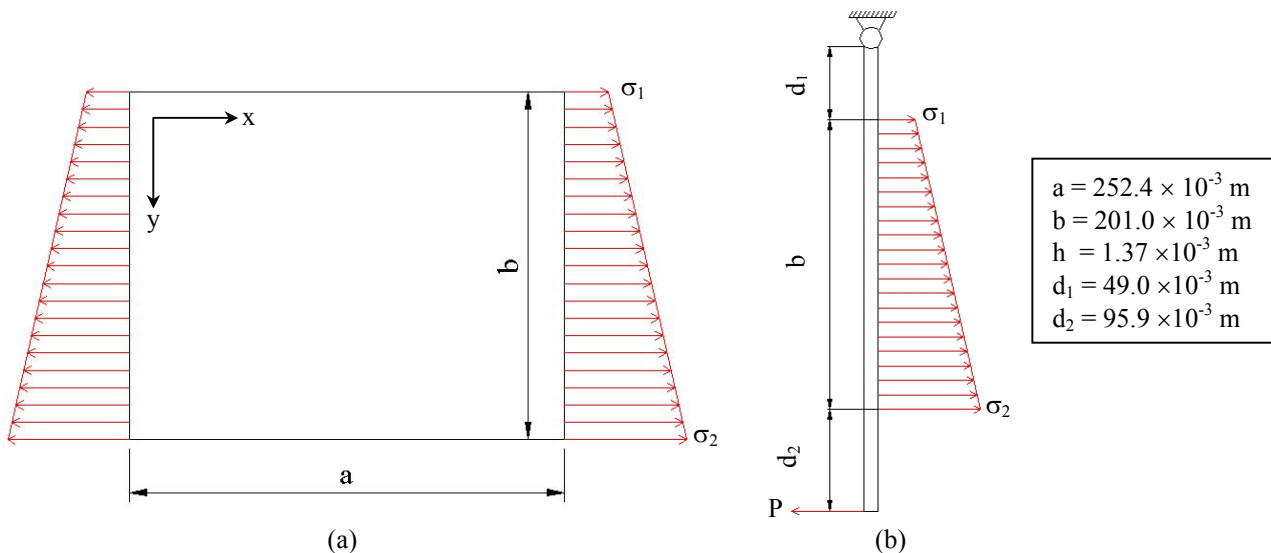


Figure 4. (a) modelo para a distribuição de tensão ao longo das bordas engastadas; (b) diagrama de corpo livre dos braços do dispositivo.

8. IDENTIFICAÇÃO DE CARGAS

Inicialmente, o procedimento de identificação foi utilizado sobre uma placa descarregada sujeita a tensões residuais, cujos gradientes de tensão podem ter influência nos resultados de identificação e provavelmente foram introduzidas no processo de fabricação. Para tanto, o conjunto de frequências naturais experimentais mostrado na Tabela 2 foi utilizado no procedimento de identificação, adotando uma ponderação igual dos fatores W_p da equação (25). No processo de otimização foi utilizado um algoritmo de Programação Quadrática Seqüencial (SQP) disponível no *toolbox* do MATLAB®. Ao final de 12 iterações, os resultados de identificação obtidos são apresentados na Tabela 2, onde as frequências naturais “experimentais” correspondem aos valores preditos pelo modelo desenvolvido utilizando o Método dos Modos Assumidos.

Tabela 2. Resultados dos primeiros ensaios de identificação.

	Frequências naturais (Hz)						Força (N)
	1	2	3	4	5	6	
Experimental	113,75	152,50	290,00	322,50	368,75	533,75	0
Identificada	116,66	148,72	291,96	321,57	368,86	531,06	0
Erro (%)	2,56	-2,48	0,68	-0,29	0,03	-0,50	0

Em um segundo ensaio, na placa foi aplicada uma força de 190,30 N. Foi utilizado o conjunto de frequências naturais experimentais mostrado na Tabela 3, adotando-se uma ponderação equivalente dos fatores W_p da equação (25). Após 8 iterações, os resultados de identificação obtidos pelo algoritmo SQP são apresentados na Tabela 3.

Tabela 3. Resultados do segundo ensaio de identificação.

	Frequências naturais (Hz)						Força (N)
	1	2	3	4	5	6	
Experimental	126,25	158,75	302,50	328,75	370,00	541,25	190,30
Identificada	126,25	156,99	295,94	334,88	381,67	539,52	192,00
Erro (%)	0,00	-1,11	-2,17	1,86	3,16	-0,32	0,91

Os resultados apresentados em ambos ensaios de identificação apresentam uma precisão razoavelmente boa. Isto demonstra a robustez do procedimento de identificação proposto com relação à medida das incertezas de modelagem.

9. DISCUSSÃO E CONCLUSÕES

Estudos anteriores demonstraram que o enrijecimento por tensões pode ser gerado pelas tensões induzidas por cargas externas ou tensões residuais produzidas pelos processos de fabricação termo-mecânicos. Os resultados numéricos e experimentais apresentados nas seções anteriores demonstram claramente que o efeito de enrijecimento por tensões pode ter uma significativa influência no comportamento dinâmico à flexão de placas retangulares finas. Conseqüentemente, este efeito deve ser considerado na modelagem de sistemas vibratórios com o objetivo de melhorar a capacidade preditiva dos modelos. Também no procedimento de ajuste de modelos de elementos finitos com base nas respostas dinâmicas experimentais, o efeito do enrijecimento por tensões deve ser considerado já que o mesmo pode ser responsável, ao menos parcialmente, pelas diferenças observadas entre as respostas dinâmicas preditas pelo modelo e as experimentais.

Como em alguns problemas inversos, o procedimento de identificação descrito neste trabalho apresentou algumas dificuldades inerentes, as quais devem ser tratadas corretamente em aplicações práticas: presença de ruído na aquisição dos dados, as incertezas do modelo que podem provocar soluções tendenciosas, a unicidade da solução nem sempre é assegurada.

Os resultados obtidos utilizando os dados experimentais e simulados confirmam a possibilidade de determinação da carga externa ou estado de tensão em uma estrutura por meio de a solução de um procedimento inverso. Evidentemente, esta possibilidade depende da disponibilidade de um modelo adequado para representar o estado de tensão da estrutura. Espera-se que este modelo possua preciso o suficiente para representar a distribuição de tensão aplicada e contenha a menor quantidade de parâmetros a serem identificados. No caso mais simples, este modelo pode ser obtido aproximando a função de tensão de Airy por funções polinomiais, como sugerido na Seção 3. Para casos mais complexos, uma alternativa resulta da utilização de um modelo de elementos finitos para representar a distribuição de tensão, como sugerido na Seção 4 e então identificar fatores de escala relacionados com as magnitudes das cargas utilizadas no modelo.

10. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à CAPES e ao CNPq pela concessão de bolsas de doutorado e produtividade em pesquisa.

11. REFERÊNCIAS

- Craig Jr., R.R., 1981, "Structural Dynamics: an Introduction to Computer Methods", John Wiley.
- Donadon, M.V., Almeida, S.F.M., Faria, A. R., 2002, "Stiffening Effects on the Natural Frequencies of Laminated Plates with Piezoelectric Actuators", *Composites: Part B*, vol. 33, pp. 335-342.
- Géradin, M., Rixen, D., 1997, "Mechanical Vibrations – Theory and Application to Structural Dynamics", second edition, Wiley.
- Lieven, N.A.J., Greening, P.D., 2001, "Effect of Experimental Pre-Stress and Residual Stress on Modal Behavior", *Phil. Trans. R. Soc. London*, vol. 359, pp. 97-111.
- Kaldas, M.M., Dickinson, S.M., 1981, "The Flexural Vibration of Welded Rectangular Plates", *Journal of Sound and Vibration*, 75(2), pp. 163-178.
- Mead, D.J., 2003, "Vibration and Buckling Behavior of Flat Free-Free Plates Under Non-Uniform In-Plane Thermal Stresses", *Journal of Sound and Vibration*, n. 260, pp. 141-165.

- Rojas, J. E., Viana, F. A.C., Rade, D.A., Steffen Jr., V., 2004, "Identification of External Loads in Mechanical Systems Through Heuristic-Based Optimization Methods and Dynamic Responses", Latin American Journal of Solids and Structures, v. 1, n. 3, pp. 297-318.
- Rojas, J.E., 2004, "Caracterização do Efeito de Enrijecimento por Tensionamento e Identificação de Cargas em Estruturas Baseada em Respostas Dinâmicas", Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica.
- Simons, D.A., Leissa, A.W., 1971, "Vibrations of Rectangular Cantilever Plates Subjected to In-Plane Acceleration Loads", Journal of Sound and Vibration, vol. 17, n. 3, pp. 407-422.
- Timoshenko, S., Goodier, J.N., 1970, "Theory of Plates and Shells", McGraw-Hill Book.
- Young, D., 1950, "Vibration of Rectangular Plates by the Ritz Method", Annual Conference of the Applied Mechanics Division, Purdue University, Lafayette.

5. DIREITOS AUTORAIS

Os autores retêm os direitos autorais deste trabalho e são responsáveis pelo seu conteúdo.

INFLUENCE OF STRESS-STIFFENING ON THE DYNAMIC BEHAVIOR OF PLATES: DIRECT AND INVERSE PROBLEMS

Domingos Alves Rade

Jhojan Enrique Rojas Flores

Alexandre Campos Bezerra

Federal University of Uberlândia – School of Mechanical Engineering, 2160 João Naves de Ávila Av. – Campus Santa Mônica – P.O. Box 593 – CEP 38400 902 – Uberlândia/MG - Brazil.

domingos@ufu.br

jerojas@mecanica.ufu.br

acbezerra@mecanica.ufu.br

Abstract: *It is widely known that the presence of mechanical stresses can have a significant influence on the static and dynamic behavior of structural components, due to the so called stress-stiffening effect. As a complement to studies previously published by the authors, in this paper the influence of normal and shear membrane stresses on the dynamic behavior of thin rectangular plates is addressed, emphasis being placed on two particular aspects: a) the numerical characterization of the influence of membrane stresses on the natural frequencies associated to the bending modes; b) the possibility of identifying applied in-plane external loads given a set of experimentally-measured natural frequencies associated to bending modes. The underlying theory is first presented including the development of a low-order mathematical model for the flexural vibrations of plates subjected to in-plane loads, based on Kirchhoff's theory and the assumed modes method. Then, the parameterization of the stress field is discussed and the use of polynomial approximations for the Airy's stress function is suggested. A parameter identification problem is formulated in such a way that the stress distributions – or alternatively, the external loads - are identified by solving an optimization problem in which the cost function represents the deviations between the values of the natural frequencies of the loaded plate and their model-predicted counterparts. The results of numerical simulations and experiments are presented to illustrate some of the main aspects of the study.*

Keywords: *stress-stiffening, Kirchhoff Plates, Inverse Problems, Assumed Modes.*