



14º POSMEC - Simpósio do Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Engenharia Mecânica



SIMULAÇÃO DA PROPAGAÇÃO BIDIMENSIONAL DE ONDAS ACÚSTICAS ATRAVÉS DE UMA MALHA DE GUIAS DIGITAIS DE ONDAS

Henrique Gomes de Moura

Estudante de Mestrado em Eng. Mecânica

Faculdade de Engenharia Mecânica

Universidade Federal de Uberlândia

LTCM – Laboratório de Transferência de Calor e Massa e Dinâmica de Fluidos

Campus Santa Mônica, Av. João Naves de Ávila 2121 – Uberlândia/MG

hgmoura@mecanica.ufu.br

Ricardo Fortes de Miranda

Professor

Faculdade de Engenharia Mecânica

Universidade Federal de Uberlândia

rfmiranda@mecanica.ufu.br

Elias Bitencourt Teodoro

Professor Assistente

Faculdade de Engenharia Mecânica

Universidade Federal de Uberlândia

teodoro@mecanica.ufu.br

Resumo: *A Malha de Guias Digitais de Ondas é uma ferramenta numérica, derivada da teoria do processamento digital de sinais, utilizada para resolver problemas de transportes associados com a equação básica da onda. Sob o ponto de vista dos métodos das diferenças finitas, pode ser tratada como uma variante, devido a sua grande semelhança com a formulação temporal explícita. A Malha de Guias Digitais de Ondas possui uma vantagem, pois possibilita uma simples e eficiente implementação. A Malha pode ser combinada com técnicas de controle e processamento de sinais, resultando em uma poderosa ferramenta de análise de vibração de placas, membranas estruturas complexas e espaços acústicos. A sua primeira versão foi desenvolvida com uma malha retangular regular denominada SWG (Square Waveguide), cuja formulação se encontra neste trabalho. Alguns parâmetros tais como erro de amplitude, erro de frequência, e erro de dispersão foram utilizados para avaliar a eficiência da SWG na simulação bidimensional de ondas acústicas em campo livre. O objetivo principal é a comparação entre os resultados analíticos e os resultados numéricos gerados pela SWG, durante a propagação sonora em campo livre. A SWG foi comparada com a TWG (Triangle Waveguide), verificando assim a influencia da topologia da malha.*

Palavras-chave: *Diferenças Finitas, Guias Digitais de Ondas, Dispersão.*

1. INTRODUÇÃO

O estudo do comportamento e propagação de ondas acústicas, ao longo de meios homogêneos, é fundamental para o desenvolvimento de novas ferramentas computacionais, capazes de fazer aproximações numéricas a respeito dos níveis de ruído, ou vibração, presente em estruturas diversas, tais como dutos, membranas, corpos sólidos e espaços acústicos.

Sob o ponto de vista matemático, a propagação de ondas acústicas pode ser representada por um conjunto de PDEs (Partial Diferencial Equations), governantes de cada fenômeno particular analisado (Blackstock, 2000). Sendo assim, a resolução numérica destas equações, considerando todas as condições de contorno pertencentes ao problema, pode fornecer as características desejadas sobre a variação da pressão, velocidade e deslocamento de cada ponto pertencente à região de projeto.

A região de projeto é amostrada sobre o meio contínuo através de um processo de discretização, gerando assim um conjunto finito de pontos, convencionalmente chamados de malha. Neste ponto é importante ressaltar que não somente o processo de integração das PDEs, mas também o processo de discretização são extremamente importantes para a legitimidade dos resultados obtidos.

A Malha de Guias Digitais de Ondas, propostas por Duyne and Smith em 1993 (Savioja, L. et al, 1994), juntamente com os demais métodos de integração numérica tais como FEM (Finite Element Method), BEM (Boundary Element Method), e FDTD (Finite Difference Time Domain), pode ser igualmente empregada na resolução do problema em questão, mas com a vantagem da simplicidade de manipulação do algoritmo, como por exemplo, o emprego de diferentes tipos de malha sem grandes alterações no modelo matemático e a modelagem das condições de contorno baseada na aplicação de técnicas de controle (Duyne and Smith, 2001).

Neste trabalho será apresentada a formulação original da SWG (Square Waveguide), aplicada à propagação bidimensional de ondas acústicas, sem a interferência das condições de contorno externas, fato que na prática poderia ser denominado como um fenômeno de propagação em campo livre. Os resultados obtidos pela SWG foram comparados com os resultados da TWG (Triangle Waveguide) (Fontana, 2002), a fim de verificar o efeito dos erros de amplitude, de frequência e de dispersão, associados aos diferentes tipos de malhas adotadas.

2. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

A idealização de diversos tipos de movimentos de ondas pode ser matematicamente representada pela chamada, equação geral da onda, descrita abaixo:

$$c^2 \nabla^2 p - p_{tt} = 0 \quad (1)$$

Onde $p = p(x, t)$ se refere à pressão acústica. A nomenclatura p_{tt} indica a segunda derivada temporal de p . A solução unidimensional desta equação pode ser representada pela soma de duas ondas arbitrárias, com segue (Blackstock, 2000):

$$u(t, x) = g_e(x - ct) + g_d(x + ct) \quad (2)$$

Onde $g_d(x + ct)$ representa uma onda arbitrária se movimentando para a direita, e $g_e(x - ct)$ representa uma onda arbitrária se movimentando para a esquerda.

No caso bidimensional, a solução desta equação pode ser encarada como uma superposição de infinitas ondas, caminhando em todas as direções a uma velocidade c . A utilização de uma estrutura interligada de guias de ondas apresenta na verdade uma alternativa viável para a solução do problema.

3. A MALHA DE GUIAS DIGITAIS DE ONDA

Uma guia de ondas é um meio físico utilizado para direcionar o movimento de propagação de ondas. As Malha de Guias Digitais de Ondas foi inicialmente propostas por Duyne e Smith em 1993 (apud. Duyne and Smith, 2003), para modelagem de sistemas físicos, tais como placas, membranas, molas ideais, e outros sistemas cujo comportamento possa ser representado pela equação geral da onda.

O modelo original da malha é constituído por juntas de dispersão interconectadas com quatro vizinhos, através das guias de ondas, formando o seguinte sistema abaixo.

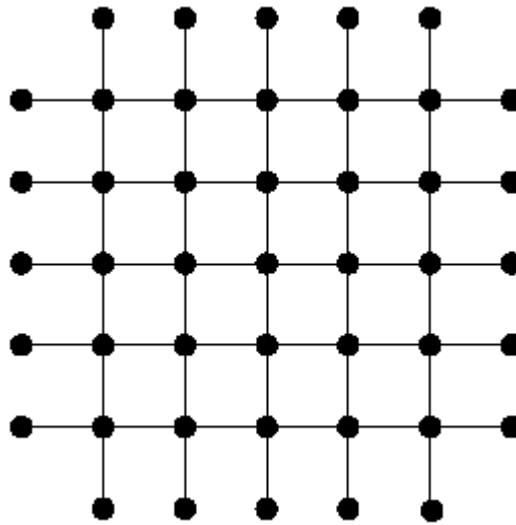


Figura 1 – O modelo bidimensional da Malha de Guias Digitais de Ondas.
Cada junta é conectada por quatro vizinhos.

Na representação acima, cada ponto representa as juntas de dispersão onde serão amostrados os valores de pressão ou de velocidade, associados com o fenômeno.

As Guias Digitais de Ondas são matematicamente equivalentes a filtros lineares bidirecionais, ou seja, o valor de entrada em uma junta corresponde ao valor de saída de seus vizinhos, como mostra a Figura 2. Esse mecanismo possibilita a implementação de um algoritmo numérico capaz de realizar uma amostragem temporal e espacial da solução unidimensional da onda apresentada na Equação 2.

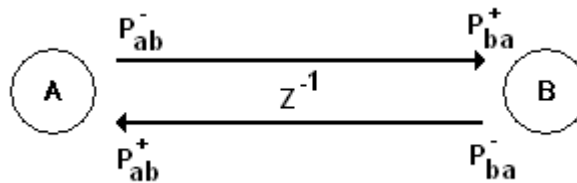


Figura 2 – Representação matemática de uma Guia Digital de Ondas conectada às juntas A e B.

3.1 A Formulação Matemática das Juntas de Dispersão

Nesta formulação, o valor de pressão na junta ‘ i ’ será representado pela letra p_i , a velocidade pela letra v_i e a impedância pela letra Z_i . Os sobrescritos + e – representam respectivamente os termos de entrada e saída de uma junta. As Guias Digitais de Ondas são elementos bidirecionais ideais, sendo assim é possível verificar que o valor de pressão em uma junta ‘ i ’ é definido com a soma dos termos de entrada e os termos de saída, como segue:

$$p_i = p_i^{+} + p_i^{-} \quad (3)$$

Considerando uma junta de dispersão conectada por N Guias Digitais de Ondas, as seguintes considerações podem ser tomadas:

1. A soma dos valores de pressão de entrada, p_i^+ , é igual a soma dos valores de pressão de saída, p_i^- :

$$\sum_{i=1}^{2N} p_i^+ = \sum_{i=1}^{2N} p_i^- \quad (4)$$

2. Na condição de equilíbrio, os valores de pressão em cada junta de dispersão são iguais a cada junta vizinha:

$$p_1 = p_2 = \dots = p_N \quad (5)$$

Utilizando estas condições, o valor de pressão em uma junta “j”, conectada à 2N juntas vizinhas, pode ser expresso da seguinte forma:

$$p_j = \frac{2 \sum_{i=1}^{2N} \frac{p_i^+}{Z_i}}{\sum_{i=1}^{2N} \frac{1}{Z_i}} \quad (6)$$

Como dito anteriormente, as Guias Digitais de Ondas podem ser compreendidas como filtros lineares bidirecionais, cujos valores de entrada, em cada junta, correspondem aos valores de saída, oriundos das juntas vizinhas, calculados em um intervalo de tempo anterior. Isso pode ser matematicamente expresso pela forma apresentada abaixo.

$$p_{J,i}^+ = z^{-1} p_{i,J}^- \quad (7)$$

De posse das Equações 4, 5 e 6 é possível derivar uma equação de diferenças finitas que represente o fenômeno da dispersão da onda em termos dos valores de pressão atribuídos a cada junta, como segue:

$$p_j(n) = \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^{2N} p_i(n-1) \right] - p_j(n-2) \quad (8)$$

Aplicando a Equação 8 em uma malha retilínea quadrada, em cujas juntas estão perpendicularmente conectadas a quatro vizinhos por quatro Guias Digitais de Ondas, se tem o modelo clássico original da SWG (Square Waveguide), proposto por Van Duyne e Julius Smith em 1993 (Savioja, L. et al, 1994). Aumentando o número de vizinhos para seis, se tem o modelo da TWG (Triangle Waveguide).

4. CARACTERÍSTICAS DA SIMULAÇÃO

4.1 O Processo de Excitação e Atualização das Malhas

A malha foi excitada com um sinal senoidal com frequência de 400 Hz e amplitude de pressão de 1 Pa. A frequência de atualização da malha é obtida a partir da seguinte relação:

$$f_s = \frac{c\sqrt{N}}{d_s} \quad (9)$$

Onde c é a velocidade do som no meio, N é o número de Guias Digitais de Ondas que se cruzam em cada junta e d_s é a distância entre as juntas (constante para todas as direções). Esta relação pode ser obtida a partir de uma formulação explícita, por diferenças finitas, da Equação 1.

De acordo com o critério de Nyquist, a frequência de atualização da malha, na simulação de um sinal senoidal, deve ser no mínimo quatro vezes maior do que a frequência do sinal. No entanto, para efeito de uma amostragem espacial de pontos, este valor deve ser calculado em função da maior distância observada entre os pontos. Analisando a direção crítica de 45° , na SWG, a distância de referência passa a ser $d_s\sqrt{2}$, e portanto a frequência de atualização mínima recomendável deve ser oito vezes maior do que a frequência do sinal simulado.

4.2 A Análise do Erro de Frequência das Malhas

Para se determinar o erro de frequência do sinal simulado foram arbitrariamente colocados alguns pontos receptores na malha. As simulações foram feitas de modo a se colher um pacote mínimo de 512 valores temporais de pressão em cada receptor. Durante a etapa de pós-processamento dos dados, estes pontos foram submetidos a uma Transformação Discreta de Fourier (Bendat, 1986), para que deste modo fosse possível identificar a frequência do sinal lido em cada receptor.

4.3 A Análise dos Erros de Amplitude e Dispersão das Malhas

Para que fosse possível garantir a não interferência das condições de contorno nos pontos simulados, as simulações foram feitas em uma área de 80 x 80 metros, durante um intervalo de tempo de 0,189 segundos. Os valores de pressão foram colhidos dentro de uma área limitada por um círculo de raio igual a 10 metros. O objetivo da análise foi estabelecer uma relação entre os erros de amplitude e dispersão das duas malhas e o ângulo de propagação.

É importante ressaltar que as simulações geram uma superfície tridimensional compreendida pelas variáveis $[X Y P]$. A amostragem dos pontos foi realizada em planos perpendiculares ao plano XY, que contenham a origem do sistema. Os planos foram estabelecidos ao longo das direções apresentadas na Figura 3.

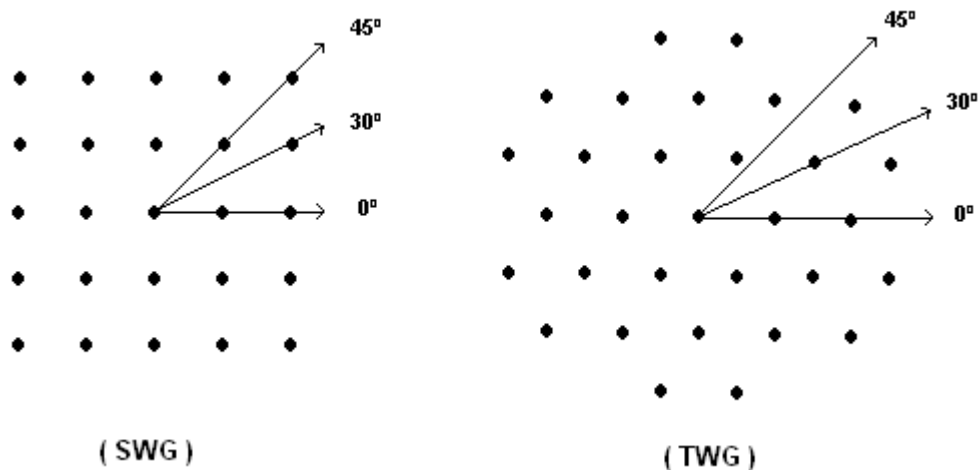


Figura 3 – Direções utilizadas para a análise comparativa entre as malhas.

Para efeito de comparação entre as malhas, o erro de dispersão associado com a TWG possui um valor máximo de 15%, enquanto na SWG este erro pode chegar a 30% (Fontana and Rocchesso, 1995).

5. SOLUÇÃO ANALÍTICA

5.1 A Análise Espacial da Propagação de Ondas

Para o caso particular da propagação bidimensional de ondas acústicas, a partir de uma excitação senoidal oriunda de uma esfera vibrante, a solução da equação geral da onda, representada na Equação 1, pode ser obtida através do produto de uma função co-seno pelas funções esféricas de Bessel, na forma descrita a seguir.

$$u(t, r, \theta) = J_m \cos(\omega t - \phi) \quad (10)$$

Onde r representa a posição radial da onda, t representa o tempo, θ representa a direção de propagação, ω a velocidade cíclica e ϕ o defasamento angular.

5.2 A Análise Logarítmica da Amplitude

A norma ISO 9613-2, sobre a metodologia de cálculo dos termos de atenuação na propagação som em campo livre (ISO 9613-2, 1996), pode ser utilizada para estimar o valor da potência sonora da fonte, que por sua vez está representada por um sinal senoidal. Desconsiderando o efeito da absorção atmosférica, a perda do nível de pressão sonora em dB (decibel) pode ser estimada pela divergência geométrica, mostrada a seguir.

$$L_f = 20 \log(d / d_o) + 11 \quad (11)$$

Onde d representa a distância e d_o representa o valor de referência ($d_o = 1$).

6. RESULTADOS E DISCUSSÃO

As simulações foram executadas através de uma rotina computacional implementada em C⁺⁺. Os resultados das simulações foram pós-processados através de rotinas implementadas no MatLab R12.

O erro de dispersão pode ser identificado pela análise espacial da propagação de ondas, especialmente a contemplada pela Figura 4. Neste gráfico é fácil observar um atraso na onda, que aumenta em função da distância. O erro de dispersão pode ser atribuído a uma deficiência de amostragem dos valores de pressão ao longo de cada direção de propagação da malha.

As Figuras 5 e 6 mostram a amostragem feita respectivamente nas direções de 30° e 45°. Nota-se uma diminuição do erro de dispersão à medida que a direção progride para o valor de 45°. Este fato mostra que o erro de dispersão, na SWG, é dependente da direção de propagação.

As mesmas simulações foram feitas utilizando a TWG. Pôde-se verificar que a TWG apresentou um erro de dispersão aproximadamente constante e independente da direção de propagação. Devido à semelhança entre os valores obtidos nas análises, somente um gráfico foi apresentado na Figura 7. Fazendo uma comparação entre as análises representadas nas Figuras 4 e 7, respectivamente realizadas pelas malhas SWG e TWG, é possível comprovar a influência da malha no erro de dispersão obtido.

Em se tratando do erro de amplitude, o nível médio obtido na SWG variou entre 0,09 e 0,85 dB, enquanto que para a TWG, tal valor se manteve aproximadamente constante em 0,93 dB.

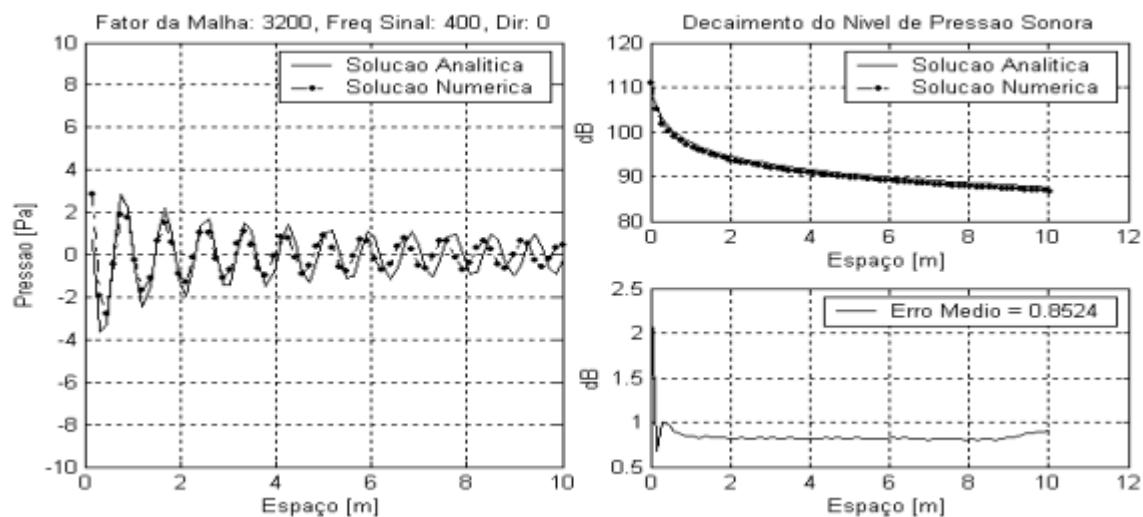


Figura 4 – SWG: 3200 Hz. Direção de Propagação: 0°.

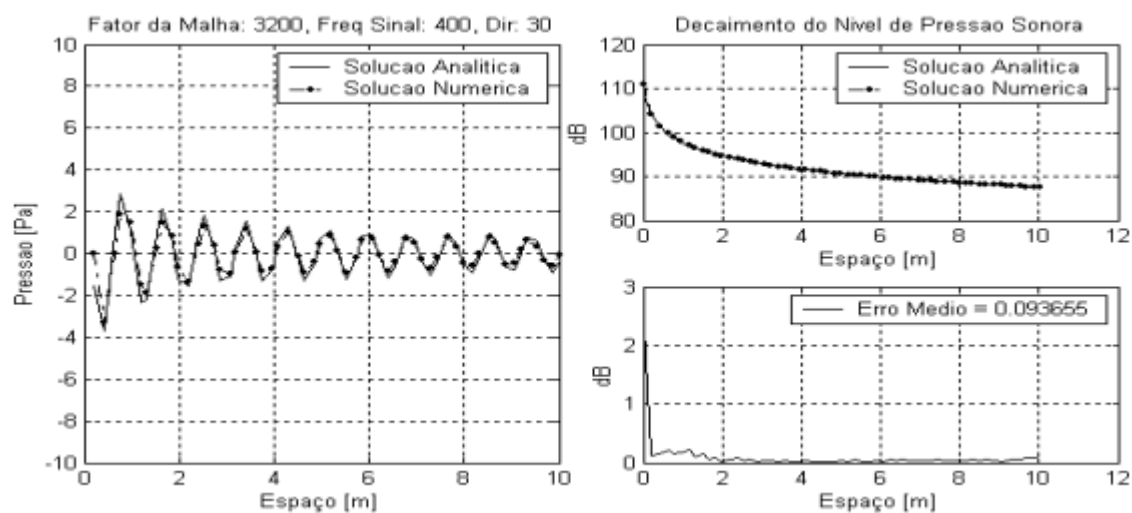


Figura 5 – SWG: 3200 Hz. Direção de Propagação: 30°.

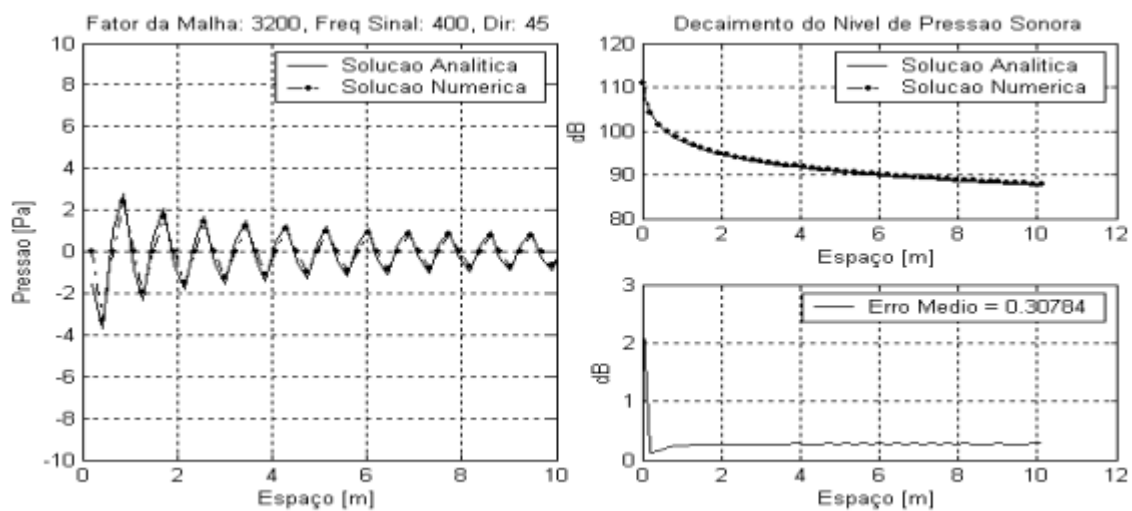


Figura 6 – SWG: 3200 Hz. Direção de Propagação: 45°.

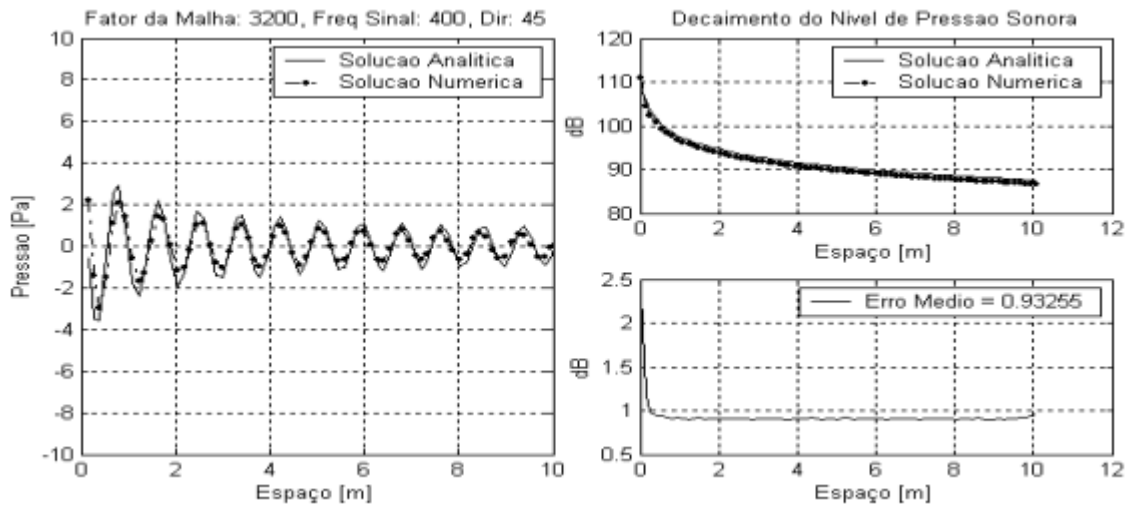


Figura 7 – TWG: 3200 Hz. Direção de Propagação: 0°.

Devido à escolha correta da frequência de atualização da malha, atendendo ao critério de Nyquist, o erro de frequência obtido, para as duas malhas, em todos os receptores foi nulo. Para uma melhor compreensão do processo realizado, a Figura 8 traz uma amostragem feita no receptor de número 75, posicionado na junta 172.446 da SWG, cujas coordenadas em metros são (47,1287; 47,1343).

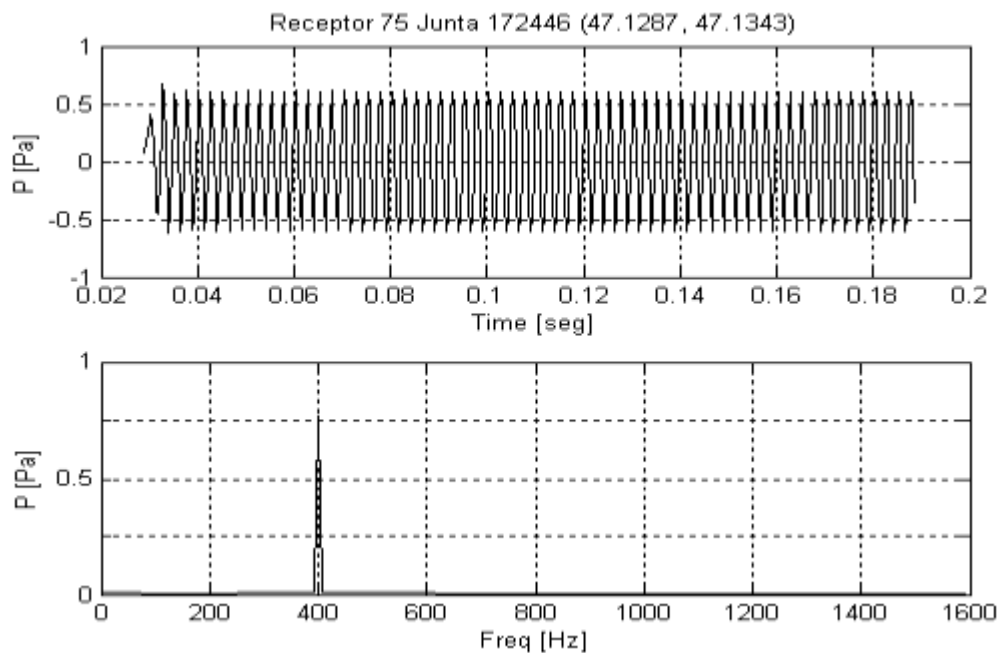


Figura 8 – SWG: 3200 Hz, Dir: 45°. Receptor nº 75; localizado na junta 172446; Coordenadas em metros (47,12; 47,13).

As análises mostraram que através da SWG é possível obter uma grande precisão nos resultados, no entanto a malha é dependência da direção de propagação, fato que pode apresentar sérios riscos para a simulação. Também foi possível obter resultados satisfatórios através da TWG, além de comprovar a homogeneidade desta malha em relação à direção de propagação.

7. CONCLUSÕES

O erro de dispersão é uma característica inerente do problema de transporte da onda, quando modelado através de um processo de diferenças finitas. Portanto, a redução ou o controle deste erro pode propiciar uma melhor análise qualitativa do sistema.

A TWG apresentou um erro de dispersão aproximadamente constante ao longo de todas as direções de propagação, fato que favorece a sua correção, uma vez que pode ser considerado com um erro sistemático.

Sobre os erros de amplitudes em dB, pôde-se notar que ambas as malhas se encontram dentro de uma faixa suficientemente boa para uma eventual análise quantitativa do sistema apresentado.

8. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq, pelo suporte financeiro, e ao LTCM – UFU, pelo apoio laboratorial.

8. REFÊRENCIAS

- Blackstock, David T., 2000, “Fundamentals of Physical Acoustics”, J. Wiley, USA.
- Lawrence E. Kinsler; Austin R. Frey; Alan B. Coppens and James V. Sanders, 1999, “Fundamentals of Acoustics”, 3. ed., J. Wiley, USA.
- Bendat, Julius S., 1986, “Random Data – Analysis and Measurement Procedures”, 2. ed., J. Wiley, USA.
- Duyne, Scott A. Van and Smith, Julius O., 2003, “Physical Modelling with the 2D-Digital Waveguide Mesh”, Center for Computer Research in Music and Acoustic (CCRMA), Dep. of Music, Stanford University, Stanford CA.
- Duyne, Scott A. Van and Smith, Julius O., 2001, “The Tetrahedral Digital Waveguide Mesh”, Center for Computer Research in Music and Acoustic (CCRMA), Dep. of Music, Stanford University, Stanford CA.
- Savioja, L.; T. Rinne; T. Takala, 1994, "Simulation of Room Acoustics with a 3-D Finite Difference Mesh," in Proc. Int. Computer Music Conf., pp. 463-466, Denmark
- Fontana, F. and Rocchesso, D., 1995, “A New Formulation of the 2D-Waveguide Mesh for Percussion Instruments”, Centro di Sonologia Computazionale, Università degli Studi di Verona, Verona, Italia.
- Fontana, F., 2002, “Multidimensional Wave Propagation using the Digital Waveguide Mesh”, Centro di Sonologia Computazionale, Università degli Studi di Verona, Verona, Italia.
- Acoustics - Attenuation of Sound During Propagation Outdoors - Part 2: General Method of Calculation, International Organization for Standardization, USA.

SIMULATION OF THE TWO-DIMENSIONAL WAVE PROPAGATION THROUGH A DIGITAL WAVEGUIDE MESH

Henrique Gomes de Moura

MSc Student

Mechanical Engineering School

Federal University of Uberlândia

LTCM – Laboratory of Heat and Mass Transfer and Fluids Dynamics

Campus Santa Mônica, Av. João Naves de Ávila 2121 – Uberlândia/MG

hgmoura@mecanica.ufu.br

Ricardo Fortes de Miranda

Professor

Mechanical Engineering School

University of Uberlândia

rfmiranda@mecanica.ufu.br

Elias Bitencourt Teodoro

Assistant Professor

Mechanical Engineering School

University of Uberlândia

teodoro@mecanica.ufu.br

Abstract: *The Digital Waveguide Mesh is a numerical tool, derivative of the digital signal processing, employed to solve problems of transport performed by the basic wave equation. Under view of the finite difference schemes, it may be treated as a variant, due to its likeness with the explicit time differentiation. The Digital Waveguide Mesh has a advantage, because it's a simple and efficient method to be implemented. It can be combined with control techniques and processing of signals, resulting in a powerful tool vibration analysis of plates, membranes, complex structures and acoustic spaces. The first version was developed with a rectangular mesh denominated SWG (Square Waveguide), whose formulation was shown in this paper. Some parameters such as width error, frequency error, and dispersion error were used to evaluate the efficiency of SWG in the two-dimensional simulation of acoustic waves in a free field. The main goal is to compute the analytical results with the SWG numerical results during the resonant free field propagation. The SWG was also compared with the TWG (Triangle Waveguide), verifying the mesh topology influence.*

Keywords: *Finite Difference, Waveguide, Dispersion.*