

CARACTERIZAÇÃO NUMÉRICA DO COMPORTAMENTO DINÂMICO E DA ESTABILIDADE DE PLACAS RETANGULARES SUJEITAS A ESFORÇOS DE MEMBRANA

Jhojan Enrique Rojas Flores

Universidade Federal de Uberlândia – UFU, Faculdade de Engenharia Mecânica – FEMEC
Av. João Naves de Ávila 2160 – Campus Santa Mônica – CP 593 – CEP 38400-902 – Uberlândia/MG, Brasil
jerojas@mecanica.ufu.br

Domingos Alves Rade

Universidade Federal de Uberlândia – UFU, Faculdade de Engenharia Mecânica – FEMEC
Av. João Naves de Ávila 2160 – Campus Santa Mônica – CP 593 – CEP 38400-902 – Uberlândia/MG, Brasil
domingos@ufu.br

Resumo: Este trabalho apresenta a modelagem numérica do comportamento dinâmico de placas retangulares finas submetidas a condições gerais de carregamento em seu plano, utilizando a técnica aproximada de Rayleigh-Ritz. Na formulação da técnica, consideram-se diferentes condições de contorno. As respostas dinâmicas são caracterizadas em termos de frequências e modos naturais de vibração e funções de resposta em frequência. Os resultados evidenciam a influência dos esforços de membrana nas respostas dinâmicas da placa. Pela confrontação dos resultados com aqueles fornecidos por análise de elementos finitos, os resultados obtidos são validados. A variação observada das frequências naturais em função da magnitude do carregamento é interpretada no contexto de um critério dinâmico para determinação de cargas críticas de flambagem de placas.

Palavras-chave: esforços de membrana, Rayleigh-Ritz, flambagem de placas, respostas dinâmicas.

1. INTRODUÇÃO

Diversos estudos evidenciaram que as características dinâmicas de placas podem ser fortemente influenciadas pela distribuição e magnitude de esforços de membrana normais e cisalhantes (Bailey, 1973; Smith et al, 1997; Mead, 2000). Tais efeitos devem, portanto, ser considerados em análises numéricas destinadas à caracterização do comportamento dinâmico destes elementos estruturais. Neste sentido, torna-se importante de dispor de procedimentos numéricos que permitem prever o comportamento dinâmico de placas sujeitas a esforços em seu plano, situação que ocorre frequentemente na prática.

Métodos numéricos (tais como a Técnica das Diferenças Finitas ou o Método dos Elementos Finitos), geralmente baseados em uma discretização espacial, permitem a obtenção de soluções para as equações de equilíbrio dinâmico em um conjunto pré-selecionado de pontos do domínio (Vieira and Rade, 2002).

Uma outra técnica que se mostra bastante adequada ao tipo de problema em questão é o método de Rayleigh-Ritz, que foi utilizado no presente trabalho, conforme procedimento detalhado na seção a seguir. A técnica pré-definida os modos de vibração da placa em função de alguns parâmetros embutidos numa combinação de funções, de forma que uma vez determinados estes parâmetros e inseridos no modelo matemático, as condições de contorno são satisfeitas e o sistema vibra em equilíbrio dinâmico.

2. O MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ

O método de Rayleigh-Ritz admite aproximações para o campo de deslocamentos transversais em termos de combinações lineares de produtos de funções que satisfazem as condições de contorno geométricas. Obtém as matrizes de inércia e rigidez a partir do desenvolvimento das expressões da energia cinética e de deformação e ao emprego do Princípio Variacional de Hamilton.

Seguindo a aproximação adotada por Bassily and Dickinson (1972), as funções escolhidas são funções de viga que satisfazem as condições de contorno geométricas da placa. Determina-se a expressão da energia potencial em função de coeficientes de combinação linear, resolve-se o sistema de equações algébricas resultantes a fim de determinar estes parâmetros. Finalmente, substituem-se seus valores nas combinações lineares das funções de viga, com o objetivo de obter a solução do campo de deslocamento transversal da placa. A formulação do método é apresentada a seguir. O Princípio Variacional de Hamilton é expresso segundo (Géradin and Rixen, 1997):

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = 0, \quad (1)$$

onde T é a energia cinética e V é a energia potencial da placa. Admitindo as hipóteses de Kirchhoff para placas finas, as expressões de ambas são dadas por (Géradin and Rixen, 1997):

$$T = \frac{1}{2} \rho h \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy \quad (2)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2D(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + h \left[\sigma_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \sigma_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2\sigma_{xy} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \right\} dx dy \quad (3)$$

onde $w(x,y)$ representa o campo de deslocamentos transversais, h é a espessura da placa, ρ é a densidade volumétrica da placa, σ_x , σ_y e σ_{xy} são as tensões normais e a tensão cisalhante respectivamente (aplicadas no plano médio da placa), $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ é a rigidez flexional da placa, E é o módulo de elasticidade e ν é o coeficiente de Poisson. A aproximação proposta por Kaldas and Dickinson (1981) é:

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q A_{mn}(t) \phi_m(x) \psi_n(y) \quad (4)$$

onde: $\phi_m(x)$ e $\psi_n(y)$ designam as funções de viga e $A_{mn}(t)$ representam os coeficientes a serem determinados (coordenadas generalizadas).

Impondo a condição de estacionariedade da Eq. (1) com respeito às pxq coordenadas generalizadas A_{mn} , chega-se ao seguinte problema de autovalores:

$$([K] - \lambda[M])\{A\} = \{0\} \quad (5)$$

A forma geral das matrizes de rigidez e inércia são dadas por:

$$[K] = [K]_1 + [K]_2 \quad \text{e} \quad [M] = \rho h \int_0^a \int_0^b \{\eta\} \{\eta\}^T dx dy \quad (6)$$

$$[K]_1 = \int_0^a \int_0^b D \left[\{\eta_{xx}\} \{\eta_{xx}\}^T + \{\eta_{yy}\} \{\eta_{yy}\}^T + 2\nu \{\eta_{xx}\} \{\eta_{yy}\}^T + 2(1-\nu) \{\eta_{xy}\} \{\eta_{xy}\}^T \right] dx dy \quad (7)$$

$$[K]_2 = \int_0^a \int_0^b \left[\sigma_x \{\eta_x\} \{\eta_x\}^T + \sigma_y \{\eta_y\} \{\eta_y\}^T + 2\sigma_{xy} \{\eta_x\} \{\eta_y\}^T \right] dx dy \quad (8)$$

onde: $\{\eta\}$ é vetor constituído pelos produtos de funções de viga $\phi_m(x)$ e $\psi_n(y)$, sendo que os sub-índices x e y representam as derivadas dos elementos de $\{\eta\}$ em relação a cada coordenada.

2.1 Funções de Viga e seus Coeficientes

Bassily and Dickinson (1972) propuseram as funções de viga consideradas neste trabalho, como sendo combinações lineares de funções trigonométricas e hiperbólicas. Para a direção x :

$$\phi_m(x) = A_m \sin(\varepsilon_m x) + B_m \cos(\varepsilon_m x) + C_m \sinh(\varepsilon_m x) + D_m \cosh(\varepsilon_m x) \quad (9)$$

Os coeficientes: $A_m, B_m, C_m, D_m, \varepsilon_m$ dependem das condições de contorno da viga correspondente àquela direção, enquanto m denotam a ordem dos modos. Young (1950) fornece os valores numéricos destes coeficientes para as seguintes combinações de condições de contorno: engastada-engastada, engastada-livre e livre-livre. Nesta ultima condição quando $r=1$, $\phi_m(x)=1$ e quando $r=2$, $\phi_m(x)=\sqrt{3} [1-2(x/l)]$. As funções de viga utilizadas para a condição apoiada-apoiada são propostas por Lurie (1952): $\phi_m(x)=\sin(m\pi x/a)$ e $\psi_n(y)=\sin(n\pi y/b)$.

2.2. Flambagem de Placas

A instabilidade por flambagem ocorre devido ao aumento da carga de compressão ou de cisalhamento aplicada no plano da placa. A carga crítica ou de flambagem é aquela que provoca o aparecimento dos deslocamentos laterais e a instabilidade da estrutura. O carregamento transversal ao plano da placa não interfere neste fenômeno.

Partindo da equação diferencial da deflexão, quando a placa flamba, sob a ação de forças aplicadas em seu plano médio, em coordenadas cartesianas, o método de Rayleigh-Ritz, admite que as tensões σ_x , σ_y e σ_{xy} aplicadas no plano médio da placa dependa de um fator de carga λ , ou seja: $\sigma_x = \lambda \sigma'_x$, $\sigma_y = \lambda \sigma'_y$ e $\sigma_{xy} = \lambda \sigma'_{xy}$. Para calcular o valor crítico deste fator, encontra-se em cada caso particular, uma função de deflexão que satisfaz as condições de contorno e faz com que a energia potencial total atinja um valor estacionário [$\delta(U + W_e) = 0$]. Substituindo a expressão do campo de deslocamento transversal, chega-se ao problema de autovalor:

$$[K]_1 + \lambda [K]_2 = \{A\} \quad (10)$$

Portanto, o menor autovalor corresponde ao mínimo carregamento que, aplicado nas bordas da placa, provoca a flambagem.

3. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Modelando uma placa de policarbonato, de comprimento a (paralelo a x), largura b e espessura h , cujas dimensões e propriedades mecânicas do material são apresentadas na Tab. (1).

Tabela 1: Dimensões e propriedades mecânicas da placa.

A (m)	b (m)	h (m)	E (N/m ²)	ν	ρ (kg/m ³)
250×10^{-3}	200×10^{-3}	1.50×10^{-3}	2.4×10^9	0.37	1200

Implementou-se o Método de Rayleigh-Ritz em ambiente MATLAB® 6.0, tendo sido possível manipular simbolicamente as funções de viga, sua diferenciação e integração, visando obter as matrizes de inércia e rigidez.

A variação observada das frequências naturais em função da magnitude do carregamento é interpretada no contexto de um critério dinâmico para determinação de cargas críticas de flambagem da placa.

3.1. Validação do Método de Rayleigh-Ritz

Os resultados obtidos são validados mediante confrontação com aqueles fornecidos por análise de elementos finitos (ANSYS® 6.0). Verifica-se que os deslocamentos provocados pela aplicação de um carregamento transversal crescente numa placa totalmente engastada, as frequências naturais e as funções de resposta em frequência, obtidos pelos métodos de Rayleigh-Ritz e de Elementos Finitos, são praticamente os mesmos.

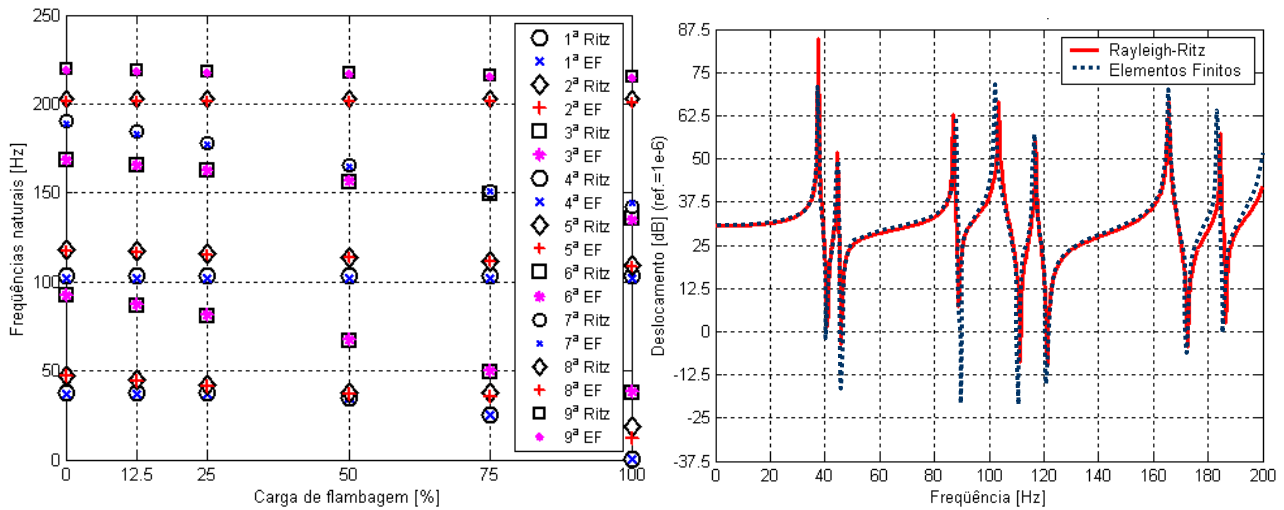


Figura 1: Comparação das frequências naturais e funções de resposta em frequência.

Para comparar as funções resposta em frequência, manipulam-se as expressões que calculam estas funções, retornando-as do sistema de coordenadas generalizadas ao de coordenadas físicas (para c coordenadas instrumentadas), pelo uso da expressão: $[H(\omega)]_{(c \times c)} = ([K] - \omega^2 [M])^{-1}$. Então o vetor de deslocamentos resulta:

$$\{\bar{W}(\omega)\} = [\bar{\eta}]^T ([K] - \omega^2 [M])^{-1} [\bar{\eta}] \{F\} \quad (11)$$

onde: $[\bar{\eta}] = [\{\eta(x_1 - y_1)\} \quad \{\eta(x_2 - y_2)\} \quad \dots \quad \{\eta(x_c - y_c)\}]$ e $[F] = [F_1 \quad F_2 \quad \dots \quad F_c]^T$.

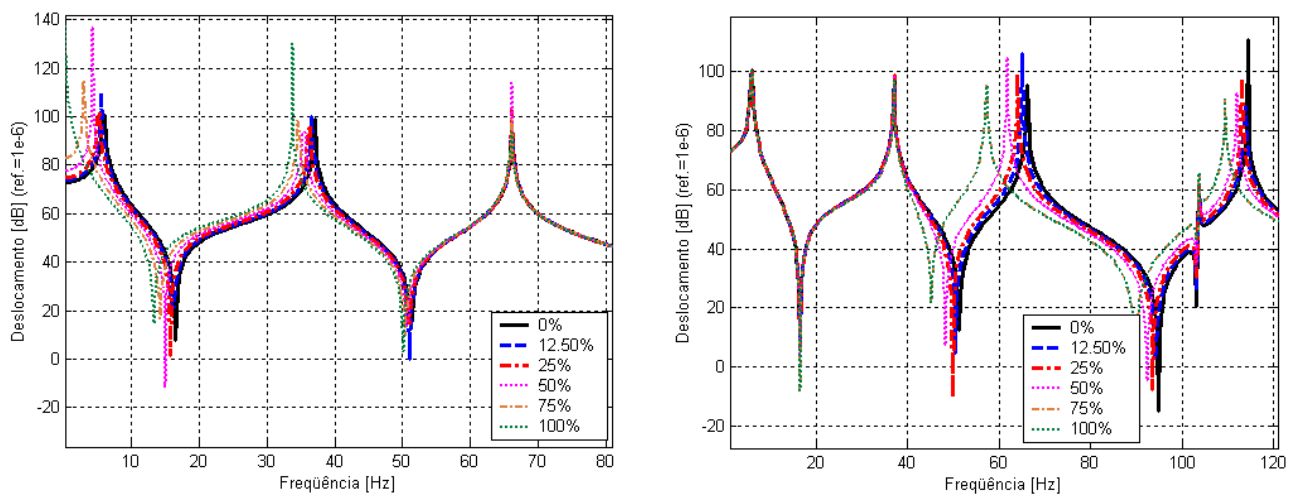
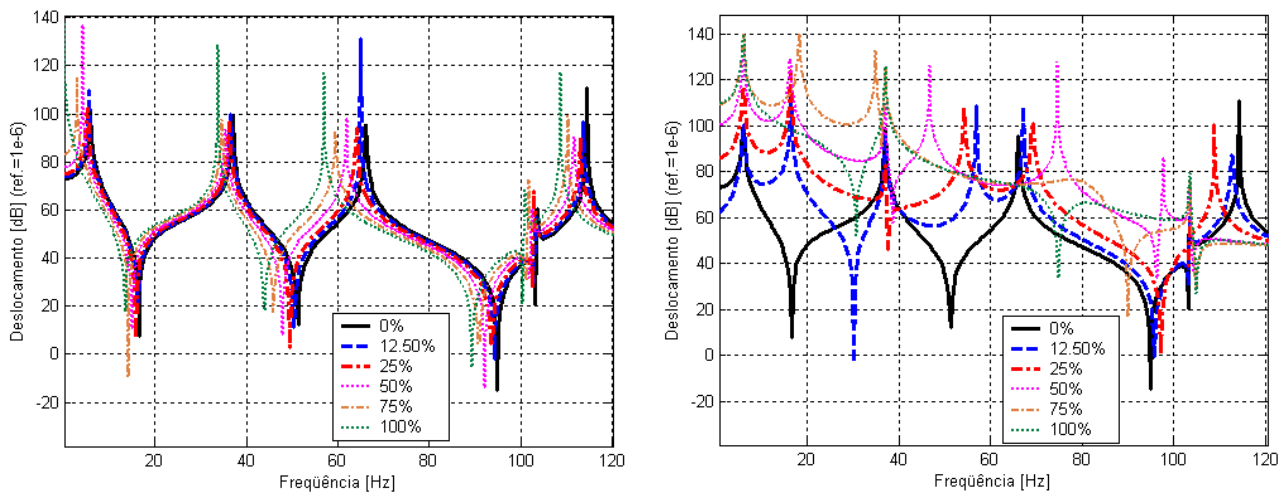
A seguir analisa-se a influência dos esforços de membrana no comportamento dinâmico das seguintes placas, por meio da aplicação de esforços constantes: normais de compressão e cisalhantes. As cargas críticas das placas, ordenadas em forma crescente, encontram-se na Tab. (2).

Tabela 2: Cargas de flambagem das diferentes placas analisadas.

Placa	$N_{xcrit} [N/m]$	$N_{ycrit} [N/m]$	$N_{xycrit} [N/m]$
	- 30.9037	- 63.1810	1656.2333
	- 123.4987	- 216.2370	1838.1384
	-495.0436	-472.5833	2311.7816
	-810.9426	-519.0033	1511.5165

As figuras seguintes ilustram a influência dos esforços de membrana na função resposta em frequência que corresponde ao deslocamento transversal no centro da placa, identificado como o nó 3.

3.2. Placa Engastada

Figura 2: Modificação da $H_{3,3}$ devido ao acréscimo de N_x e N_y , 1^a condição.Figura 3: Modificação da $H_{3,3}$ devido ao acréscimo de N_x-N_y e N_{xy} , 1^a condição.

3.3. Placa Bi-apoiada, Livre-Livre

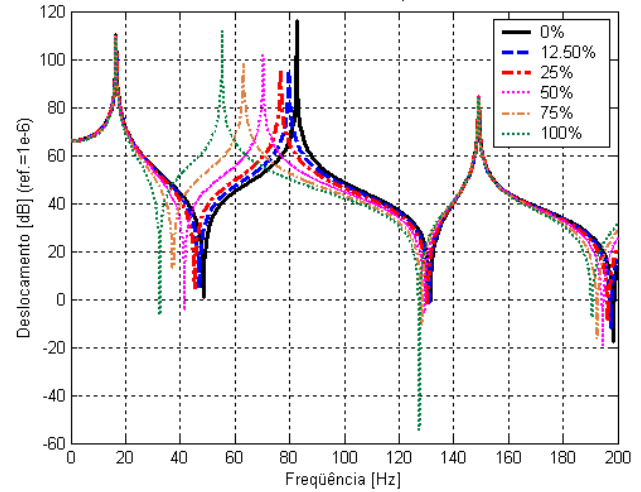
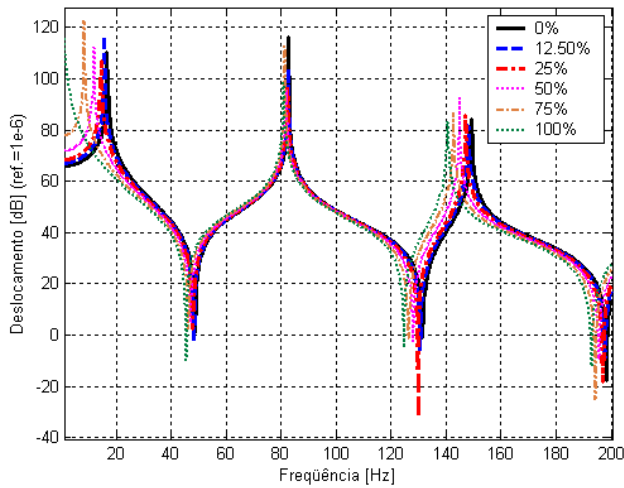


Figura 4: Modificação da $H_{3,3}$ devido ao acréscimo de N_x e N_y , 2^a condição.

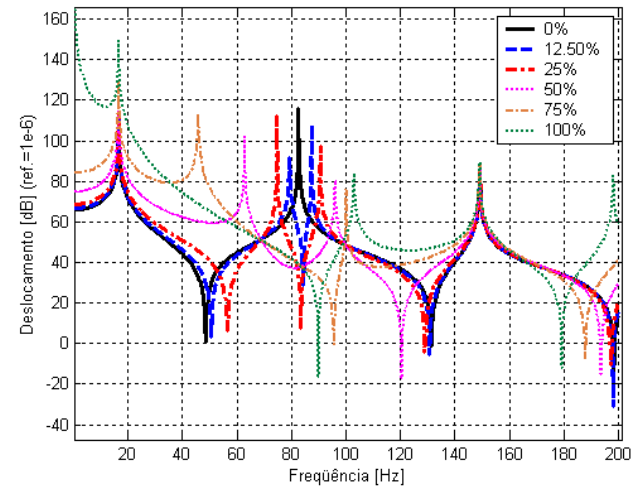
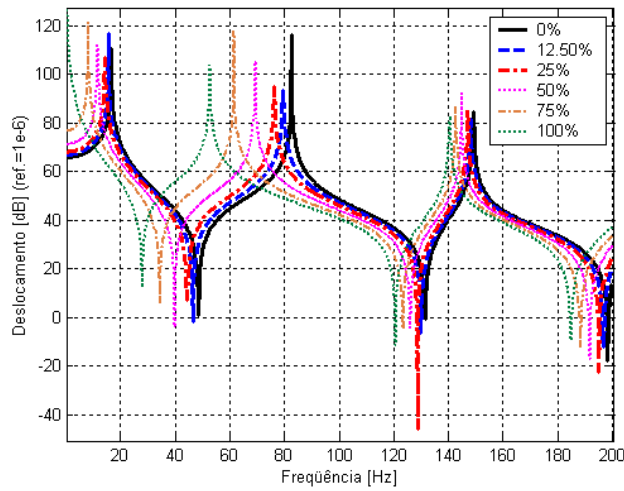


Figura 5: Modificação da $H_{3,3}$ devido ao acréscimo de N_x-N_y e N_{xy} , 2^a condição.

3.4. Placa Bi-engastada, Livre-Livre

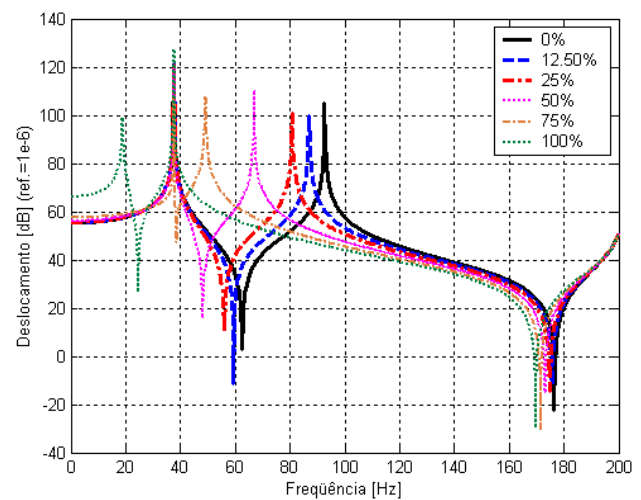
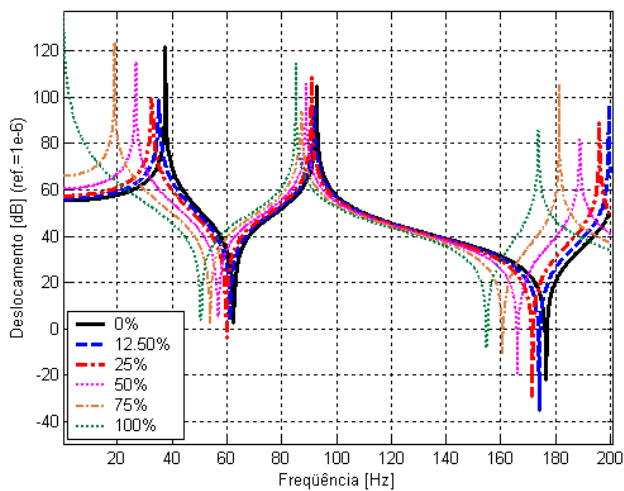


Figura 6: Modificação da $H_{3,3}$ devido ao acréscimo de N_x e N_y , 3^a condição.

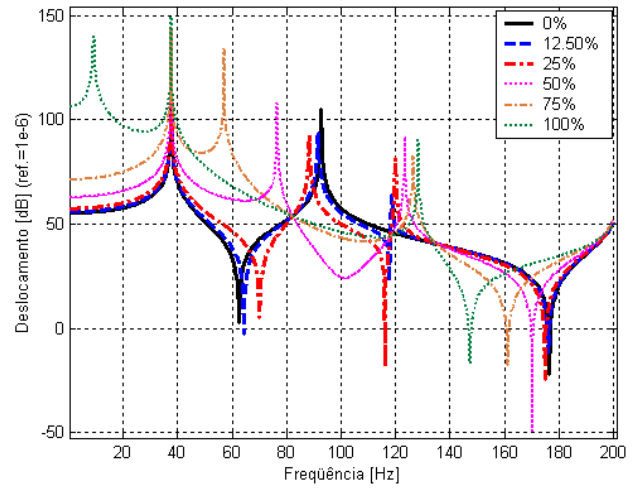
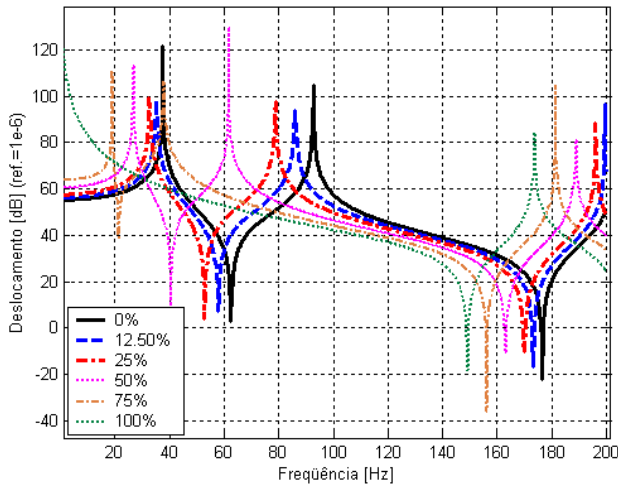


Figura 7: Modificação da $H_{3,3}$ devido ao acréscimo de N_x-N_y e N_{xy} , 3ª condição.

3.5. Placa Apoiada

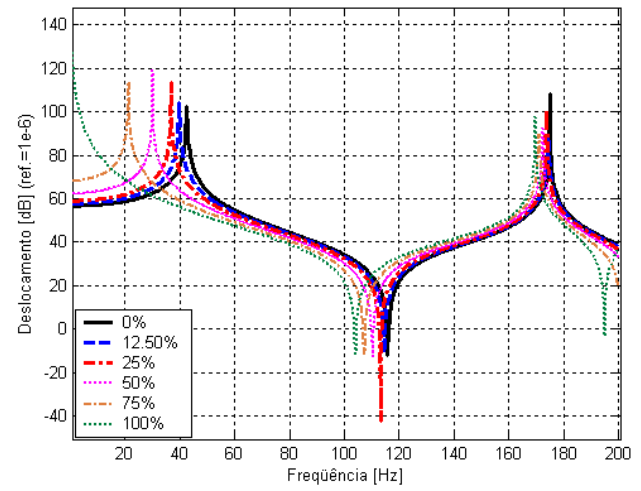
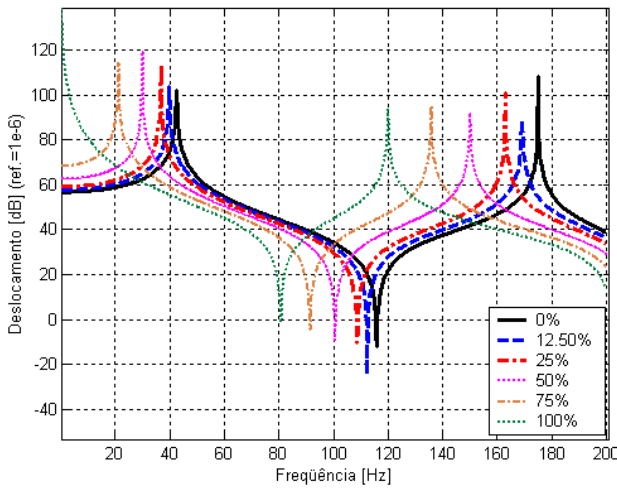


Figura 8: Modificação da $H_{3,3}$ devido ao acréscimo de N_x e N_y , 4ª condição.

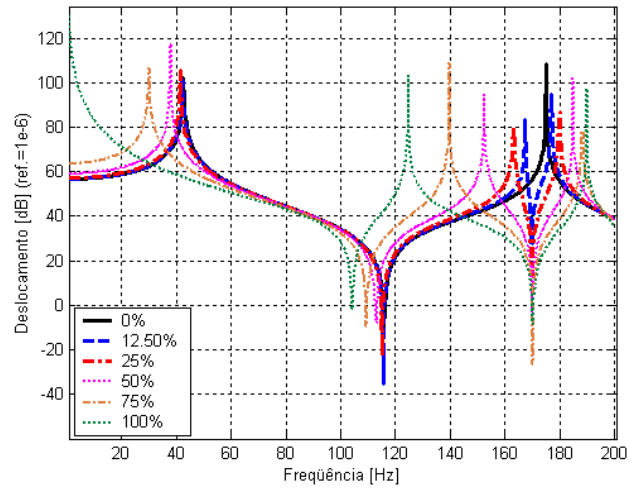
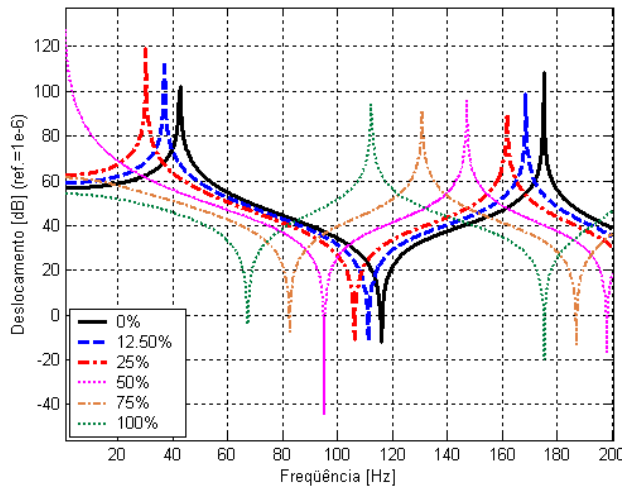


Figura 9: Modificação da $H_{3,3}$ devido ao acréscimo de N_x-N_y e N_{xy} , 4ª condição.

4. CONCLUSÕES

As simulações numéricas mostram que as frequências naturais e as funções de resposta em frequência são alteradas com o sentido de aplicação dos esforços normais aplicados no seu plano médio. Cargas de compressão axial reduzem as frequências naturais (exceto as que correspondem a modos longitudinais), enquanto que cargas de tração as incrementam. Existe uma notável redução das frequências quando a carga varia entre 75 e 100% do seu valor crítico. O sentido de aplicação da tensão cisalhante tem efeito somente nos modos naturais de vibração e não nas frequências naturais. Se as condições de contorno da placa permitem que os modos de flambagem sejam iguais aos modos naturais de vibração, vale a relação: $\omega_{n,p}^2 = \omega_{n,0}^2 (1 - P/P_{crit})$, onde $\omega_{n,0}^2$ é a frequência natural da estrutura descarregada e $\omega_{n,p}^2$ é a frequência natural da estrutura solicitada por uma carga de compressão P , P_{crit} é a carga crítica de flambagem. Portanto, o carregamento de compressão que se aproxima da carga crítica anula a primeira frequência natural da estrutura.

No cálculo das cargas de flambagem, observa-se que a flambagem devido ao cisalhamento não tem o mesmo comportamento que às das cargas normais, ou seja, cargas críticas maiores não ocorrem em condições de contorno mais rígidas. Além disso, placas com condições de contorno simétricas em relação aos eixos normais apresentam cargas críticas de cisalhamento menores que placas com condições de contorno simétricas em relação a um dos eixos normais.

Com base nos resultados obtidos, conclui-se acerca da eficiência do método de modelagem na previsão das respostas dinâmicas, além da utilidade da técnica para avaliação da estabilidade estrutural.

5. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à CAPES e ao CNPq pela concessão de bolsas de mestrado e de produtividade em pesquisa.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bassily, S.F. and Dickinson, S.M., 1972, "Buckling and Lateral Vibrations of Rectangular Plates Subject to Inplane Loads – A Ritz Approach", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 24, No. 2, pp. 219-239.
- Bailey, C.D., 1973, "Vibration of Thermally Stressed Plates with Various Boundary Conditions", *American Institute of Aeronautics and Aeronautics Journal*, Vol. 11, pp. 14-19.
- Géradin, M. and Rixen, D., 1997, "Mechanical Vibrations – Theory and Application to Structural Dynamics", John Wiley & Sons, U.K., 425 pp.
- Kaldas, M.M. and Dickinson, S.M., 1981, "Vibration and Buckling Calculations for Rectangular Plates Subject to Complicated In-plane Stress Distributions by Using Numerical Integration in a Rayleigh-Ritz Analysis", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 75, pp. 151-162.
- Lurie, H., 1952, "Lateral Vibrations as Related to Structural Stability", *Journal of Applied Mechanics*, pp. 195-204.
- Mead, D. J., 2003, "Vibration and Buckling of Flat Free-Free Plates Under Non-uniform In-plane Thermal Stresses", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 260, pp. 141-165.
- Smith, S.T. and Bradford, M.A., Oehlers, D.J., 1997, "Elastic Buckling of Unilaterally Constrained Rectangular Plates in Pure Shear", *Engineering Structures*, Vol. 21, pp. 443-453.
- Vieira JR. A.B. and Rade, D.A., 2002, "Identification of Stresses in Plates from Dynamic Responses", *International Modal Analysis Conference*.
- Young, D., 1950, "Vibration of Rectangular Plates by the Ritz Method", *Annual Conference of the Applied Mechanics Division, Purdue University, Lafayette*.

7. DIREITOS AUTORAIS

Os autores retêm os direitos autorais deste trabalho e são responsáveis pelo seu conteúdo.

NUMERICAL CHARACTERIZATION OF THE DYNAMIC BEHAVIOR AND STABILITY OF RECTANGULAR PLATES SUBJECT TO MEMBRANE FORCES

Jhojan Enrique Rojas Flores

Federal University of Uberlândia, School of Mechanical Engineering

Av. João Naves de Ávila 2160 – Campus Santa Mônica – P.O. Box 593 – CEP 38400-902 – Uberlândia/MG, Brazil

jerojas@mecanica.ufu.br

Domingos Alves Rade

Federal University of Uberlândia, School of Mechanical Engineering

Av. João Naves de Ávila 2160 – Campus Santa Mônica – P.O. Box 593 – CEP 38400-902 – Uberlândia/MG, Brazil

domingos@ufu.br

Abstract: *This paper is devoted to a modeling procedure of the dynamic behavior of thin rectangular plates subjected to the general in-plane loads, using the Rayleigh-Ritz approach. According to this technique, some boundary conditions are considered so that dynamic responses of the system, such as natural frequencies, mode shapes and frequency response functions can be characterized, showing the effect of the membrane forces on the dynamic responses of plates. The results obtained by finite element analysis could be compared with those obtained by numerical simulations. Good agreement is achieved. The variation observed of the natural frequencies in terms of the magnitude of the load is interpreted in the context of a dynamic criterion for determination of critical buckling loads of plates.*

Keywords: *membrane forces, Rayleigh-Ritz approach, buckling of plates, dynamic responses.*