

## MODELAGEM MATEMÁTICA E SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS SOBRE CILINDRO IMERSO UTILIZANDO-SE O MÉTODO DA FRONTEIRA IMERSA COM O MODELO FÍSICO VIRTUAL

### Alice Rosa da Silva

Universidade Federal de Uberlândia – UFU, Faculdade de Engenharia Mecânica – Laboratório de Transferência de Calor e Massa e Dinâmica dos Fluidos, Av. João Naves de Ávila 2160 - Uberlândia-MG, Brasil  
[calicers@hotmail.com](mailto:calicers@hotmail.com)

### Ana Lúcia Fernandes de Lima e Silva

Universidade Federal de Uberlândia – UFU, Faculdade de Engenharia Mecânica – Laboratório de Transferência de Calor e Massa e Dinâmica dos Fluidos, Av. João Naves de Ávila 2160 - Uberlândia-MG, Brasil  
[alfernandes@mecanica.ufu.br](mailto:alfernandes@mecanica.ufu.br)

### Aristeu da Silveira Neto

Universidade Federal de Uberlândia – UFU, Faculdade de Engenharia Mecânica – Laboratório de Transferência de Calor e Massa e Dinâmica dos Fluidos, Av. João Naves de Ávila 2160 - Uberlândia-MG, Brasil  
[aristeus@mecanica.ufu.br](mailto:aristeus@mecanica.ufu.br)

**Resumo:** No presente trabalho utiliza-se uma metodologia em desenvolvimento no Laboratório de Transferência de Calor e Massa e Dinâmica dos Fluidos (LTCM-UFU). Esta é baseada no Método da Fronteira Imersa (MFI), Peskin (1977) e utiliza-se o Modelo Físico Virtual (MFV), proposto por Lima e Silva et al. (2003) e Lima e Silva (2002). O método consiste da utilização de uma malha fixa (euleriana) para representar o domínio de cálculo e uma malha móvel (lagrangiana) para representar a interface imersa. O MFV utiliza as equações do movimento, resolvidas nos pontos lagrangianos, para calcular um campo de força interfacial que é distribuído para as malhas eulerianas na vizinhança da interface sólido/fluido. Foram simulados escoamentos incompressíveis, bidimensionais sobre um cilindro circular estacionário, utilizando diferentes métodos de discretização temporal para fins comparativos. As simulações foram feitas a diferentes números de Reynolds e diferentes refinamentos de malha. Foram obtidos os campos de velocidade, campos de pressão, campos de vorticidade, bem como valores médios do coeficiente de arrasto e do número de Strouhal.

**Palavras-chave:** Método da Fronteira Imersa, Modelo Físico Virtual, Cilindro.

## 1. INTRODUÇÃO

O uso da Dinâmica dos Fluidos Computacional vem crescendo à medida que os avanços computacionais possibilitam simular diversos escoamentos de interesse prático. Uma gama de escoamentos industriais possuem complexidade geométrica e a conseqüente dificuldade da utilização de malhas regulares fixas para representar o problema. Alguns métodos utilizam malhas não estruturadas que se adaptam à interface imersa no escoamento (Hu, 1995). Estes por sua vez, elevam o custo computacional para as simulações com a presença de corpos em movimento ou deformáveis, pela necessidade de se reconstruir a malha quando esta se deforma.

A metodologia em desenvolvimento, apresentada no presente trabalho, baseia-se no Método da Fronteira Imersa (MFI), no qual se utiliza uma formulação mista. Uma malha fixa (euleriana) representa o domínio de cálculo e uma malha lagrangiana é utilizada para representar a interface imersa. Além disto, um campo de força adicionado às equações do movimento é calculado de forma a modelar a presença da interface. Existem diferentes propostas para o cálculo deste campo de força como destacado a seguir. O modelo proposto por Peskin (1977) utiliza uma constante elástica responsável pela conectividade e rigidez dos pontos da interface imersa. Goldstein et al. (1993) propuseram um modelo onde duas constantes ad-hoc são ajustadas de acordo com o problema e com o método numérico utilizado. No Modelo Físico Virtual (MFV), (Lima e Silva et al., 2003) não existem constantes a serem ajustadas, como nos modelos citados anteriormente além disto, não é necessário utilizar algoritmos especiais para interpolar variáveis entre as duas malhas ou localizar malhas vizinhas a esta interface. Este modelo permite representar a presença da interface resolvendo as equações do movimento em cada ponto da malha lagrangiana.

No presente trabalho utilizou-se a metodologia MFI com MFV para simular escoamentos bidimensionais sobre um cilindro estacionário para diferentes números de Reynolds e diferentes refinamentos de malha. Foram obtidos os campos de vorticidade, os coeficientes de arrasto e de sustentação e o número de Strouhal. A discretização das equações do movimento foi feita pelo método de Diferenças Centradas de 2ª ordem no espaço. Para o termo temporal, três métodos de discretização foram empregados: Euler Explícito de 1ª ordem, Adams-Bashforth e Runge-Kutta, ambos de 2ª ordem.

## 2. MODELO MATEMÁTICO

As equações bidimensionais de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis de fluidos newtonianos foram utilizadas. A seguir são apresentadas as formulações para a malha euleriana, que representa todo o domínio de cálculo e para a malha lagrangiana que representa a interface imersa no escoamento.

### 2.1 Formulação Euleriana

As equações de Navier-Stokes na forma tensorial podem ser apresentadas como segue:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu_{efet} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + F_i, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2)$$

onde  $\rho$  e  $\nu$  são, respectivamente, a densidade e a viscosidade cinemática,  $p$  é a pressão,  $u_i$  é a componente  $i$  do vetor velocidade,  $F_i$  é a componente  $i$  do vetor campo de força euleriano e  $\nu_{efet} = \nu + \nu_t$  é a viscosidade da turbulência.

O termo fonte  $F_i$  da Eq. (1) é calculado através da distribuição das componentes do vetor força interfacial lagrangiano  $\vec{f} = (\vec{x}_k, t)$ , feita através da seguinte equação:

$$\vec{F}(\vec{x}) = \sum_k D_{ij} (\vec{x} - \vec{x}_k) \vec{f}(\vec{x}_k) \Delta S(\vec{x}_k), \quad (3)$$

onde  $\vec{x}$  e  $\vec{x}_k$  são, respectivamente, os vetores posição dos pontos eulerianos e lagrangianos,  $\Delta S(\vec{x}_k)$  é o comprimento médio entre dois pontos lagrangianos,  $D_{ij}$  é uma função de interpolação/distribuição, com propriedades de uma função Gaussiana e  $\vec{f}(\vec{x}_k)$  é a força interfacial calculada pelo Modelo Físico Virtual apresentado a seguir.

## 2.2 Formulação Lagrangiana - Modelo Físico Virtual (MFV)

O Modelo Físico Virtual utilizado no presente trabalho permite o cálculo de  $\vec{f}(\vec{x}_k)$  com base na interação física do fluido e da superfície sólida imersa no fluido. Este modelo é baseado na aplicação da 2ª lei de Newton (balanço de quantidade de movimento linear), aos volumes de fluido centrados nos pontos lagrangianos. Portanto, aplicando-se este princípio, chega-se a seguinte equação:

$$\vec{f}(\vec{x}_k, t) = \rho \frac{\partial \vec{V}(\vec{x}_k, t)}{\partial t} + \rho \vec{\nabla} \cdot (\vec{V}(\vec{x}_k, t) \vec{V}(\vec{x}_k, t)) - \vec{\nabla} \cdot [\mu (\vec{\nabla} \vec{V} + \vec{\nabla}^T \vec{V})] + \vec{\nabla} p(\vec{x}_k, t). \quad (4)$$

Os termos que compõem a Eq.(4) são denominados de força de aceleração  $\vec{f}_a$ , força inercial  $\vec{f}_i$ , força viscosa  $\vec{f}_v$  e força de pressão  $\vec{f}_p$ . Estes termos são calculados utilizando-se uma aproximação por polinômios de Lagrange. Uma vez determinada a força lagrangiana, Eq. (4), esta é distribuída para as malhas eulerianas vizinhas à interface, através da Eq. (3). O campo de força euleriano  $F_i$  que modela a existência da interface imersa no escoamento é então determinado.

## 2.3. Modelagem da Turbulência

No presente trabalho utilizou-se o modelo sub-malha de Smagorinsky (1963). Este modelo é baseado na hipótese de que a produção de tensões turbulentas sub-malhas seja igual à dissipação. A viscosidade turbulenta, dada em função da taxa de deformação e da escala de comprimento é expressa por:

$$\nu_t = (C_s l)^2 \sqrt{2 \overline{S_{ij}} \overline{S_{ij}}}, \quad (5)$$

onde  $l$  é o comprimento característico que depende da malha de discretização,  $S_{ij}$  é a taxa de deformação,  $C_s = 0.18$ , é a constante de Smagorinsky.

## 2.4. Função de Amortecimento

Para as simulações a números de Reynolds superiores a 500, uma função de amortecimento (Souza, L.F et al, 2002) é utilizada na saída do domínio. Esta função amortece os vórtices na saída do domínio, garantindo a conservação da massa. Ela pode ser expressa por:

$$f_2(x) = f(\varepsilon) = 1 - 6\varepsilon^5 + 15\varepsilon^4 - 10\varepsilon^3 \quad (6)$$

onde:

$$\varepsilon = \frac{i - i_3}{i_4 - i_3} \quad (7)$$

$i_3 \leq i \leq i_4$ . Os pontos  $i_3$  e  $i_4$  correspondem às posições consecutivas  $x_3$  e  $x_4$  na direção  $x$ .

### 3. MÉTODO NUMÉRICO

O Método dos Passos Fracionados foi empregado para o acoplamento pressão-velocidade, onde uma estimativa da velocidade é feita explicitamente. Este campo de velocidade estimado é então utilizado para o cálculo da correção da pressão, e para a correção do campo de velocidade e pressão. O sistema linear para a correção da pressão é resolvido pelo método *MSI (Modified Strongly Implicit Procedure)*. A discretização espacial foi feita através do método de Diferenças Centrais e a discretização temporal através do esquema de Euler de primeira ordem e dos esquemas de segunda ordem de Adams-Bashforth e Runge-Kutta.

### 4. RESULTADOS

A seguir são apresentados os resultados dos escoamentos simulados em um domínio retangular de dimensões 1,5x3,0m. O cilindro imerso possui diâmetro  $d=0,1\text{m}$  e coordenadas centrais de 0,75x1,65m. Os números de Reynolds baseados no diâmetro do cilindro, foram iguais a 100, 300 e 1000. As propriedades do fluido,  $\rho$  e  $\mu$ , são constantes e iguais a  $1.0 \text{ kg/m}^3$  e  $3,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m.s}$ , respectivamente. O escoamento se desenvolve no sentido ascendente, com a imposição de um perfil de velocidade uniforme na entrada do domínio. Nas demais faces do domínio as condições de contorno de Newman são especificadas.

#### 4.1. Campos de Vorticidade

A Tabela (1) apresenta as três malhas utilizadas nas simulações para os diferentes métodos de discretização temporal citados anteriormente, bem como os números de Reynolds.

Tabela 1: Apresentação dos diferentes refinamentos da malha simulados.

| Malha | Nº de pontos | Re       |
|-------|--------------|----------|
| 1     | (250x500)    | 100,1000 |
| 2     | (125x250)    | 100, 300 |
| 3     | (62x124)     | 100      |

Na Figura (1) são mostrados os campos de vorticidade para o método de Adams-Bashforth, considerando os três refinamentos da malha e para um número de Reynolds igual a 100.

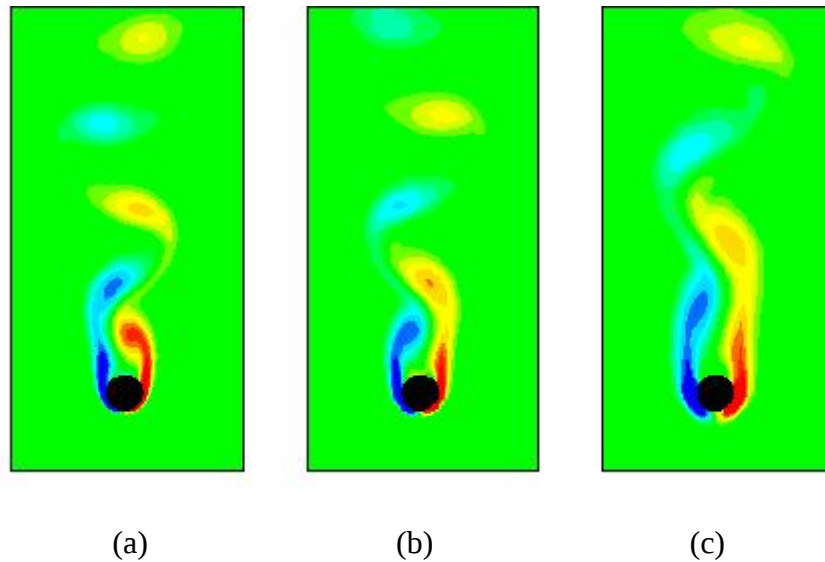


Figura 1: Campos de vorticidade para o método de Adams-Bashforth e  $Re=100$ ; malha 1 (a), malha 2 (b) e malha 3 (c).

Observa-se pela Fig. (1) que os vórtices não estão em fase. Isto deve-se ao fato de que a frequência de formação dos vórtices varia em função da malha, a qual filtra as instabilidades de alta frequência. Para a malha 3 a transição ocorreu mais lentamente e o comprimento da esteira é maior. Para os métodos de Euler e Runge-Kutta os resultados foram semelhantes aos apresentados na Fig. (1).

A Figura (2) apresenta os campos de vorticidade para os três métodos de discretização temporal, para a malha 2 e um número de Reynolds igual a 300.

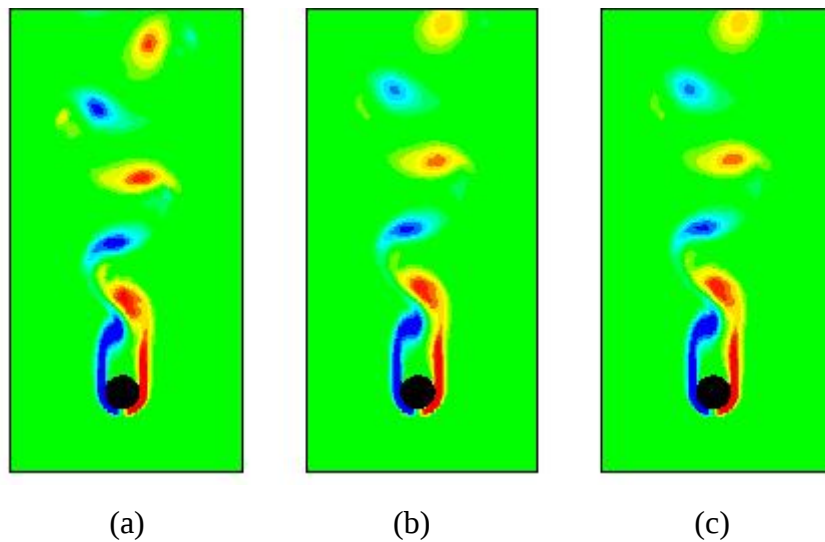


Figura 2 – Campos de vorticidade para  $Re = 300$ , malha 2; Euler (a), Adams-Bashforth (b) e Runge-Kutta (c).

Observa-se na Fig. (2) o aparecimento de instabilidades numéricas sobre a esteira, em todos os métodos. Tal fato não foi observado, para o número de Reynolds igual a 100.

## 4.2 Evolução Temporal do Coeficiente de Arrasto e número de Strouhal

A Figura (3a) mostra a variação do coeficiente de arrasto no tempo para o método de Euler de 1ª ordem, para os três refinamentos de malha e número de Reynolds igual a 100. A Figura (3b) apresenta os resultados para o mesmo método, considerando a malha de 125x250 pontos e dois números de Reynolds.

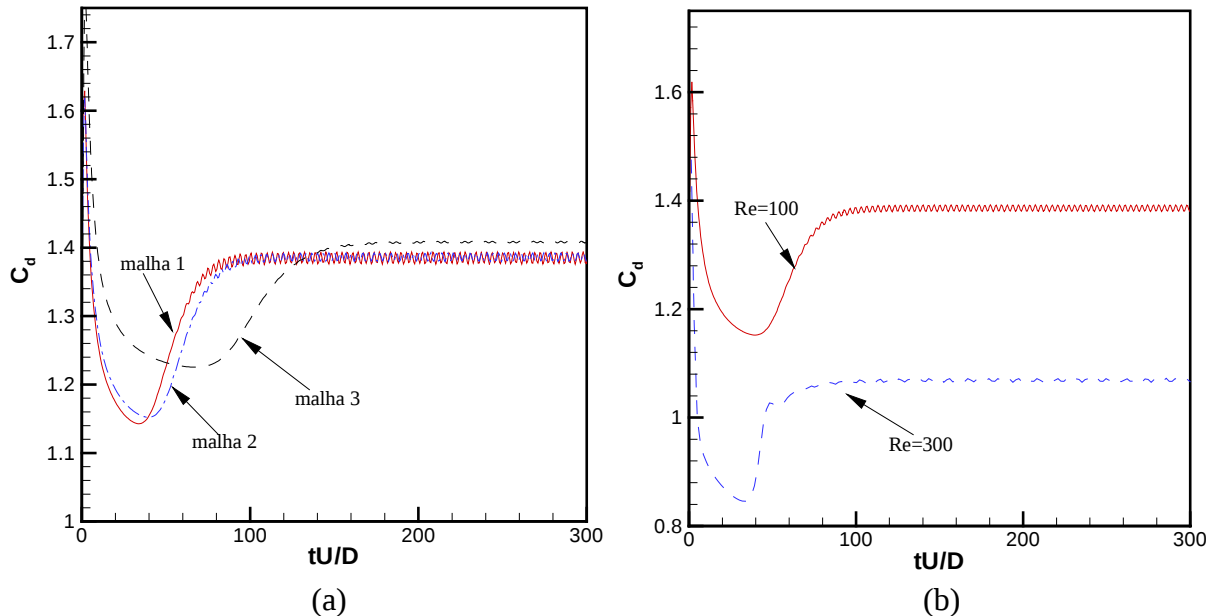


Figura 3 – Distribuições dos coeficientes de arrasto em função do tempo adimensional para o método de Euler: Re=100 e malhas 1, 2 e 3 (a), Re=100, 300 e malha 2 (b).

Observa-se pela Fig. (3)-(a) que a malha 3 apresentou maior coeficiente de arrasto que as demais malhas. As malhas mais grosseiras gastam um maior tempo para a transição do escoamento. À medida que o número de Reynolds aumenta, o coeficiente de arrasto diminui. Este fato pode ser observado na Fig. (3)-(b). Para os outros dois métodos foram obtidos resultados semelhantes.

A Figura (4) apresenta a evolução temporal do coeficiente de arrasto para o método de Adams-Bashforth com modelo de turbulência, para número de Reynolds igual a 1000 e malha 1.

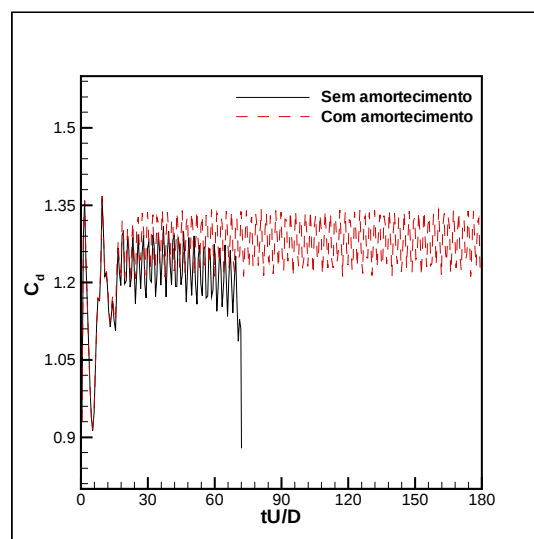


Figura 4: Variação temporal do coeficiente de arrasto com e sem função de amortecimento.

Observa-se na Fig. (4) o aparecimento de oscilações harmônicas. Estas não foram constatadas para as simulações com os números de Reynolds iguais a 100 e 300. Verifica-se ainda que sem a função de amortecimento, os resultados divergiram.

O número de Strouhal é um adimensional que representa a frequência de formação e desprendimento de vórtices, do diâmetro do cilindro e da velocidade. O cálculo é feito pela Transformada Rápida de Fourier (FFT) do sinal do coeficiente de arrasto. Seu valor é obtido no pico dominante do espectro de potência e pode ser definido pela expressão:

$$St = \frac{fd}{U_{\infty}} \quad (7)$$

onde  $f$  é a frequência dimensional de desprendimento dos vórtices,  $d$  é o diâmetro e  $U_{\infty}$  é a velocidade da corrente livre.

Os valores dos números de Strouhal obtidos para os três métodos de discretização temporal e diferentes refinamentos da malha foram semelhantes. Verificou-se que este valor aumenta com o refinamento da malha e com o aumento do número de Reynolds.

## 5. CONTINUIDADE DO TRABALHO

### 5.1. Cilindro com Rotação e com Vibração

A dinâmica do escoamento em torno de um cilindro rotativo ou oscilante é diferente daquela observada para um cilindro estacionário. Alguns autores têm preocupado com o efeito que estes podem causar no fenômeno de geração de vórtices e estrutura da esteira.

Simulações com cilindros rotativos e oscilatórios ainda estão em desenvolvimento. Os resultados numéricos do cilindro em rotação serão comparados com os resultados experimentais de UNESP – IS-SP em cooperação CAPES – PROCAD –UFU/UNESP-IS. Os resultados obtidos do cilindro em vibração serão comparados com os resultados experimentais da POLI-SP

## 6. CONCLUSÕES

O Método da Fronteira Imersa com o Modelo Físico Virtual vem apresentando bons resultados para a simulação de escoamentos sobre geometrias complexas móveis e/ou compostas e mostra-se bastante promissor para simular problemas de interação fluido-estrutura. Os resultados mostrados no presente trabalho são de grande interesse para uma melhor compreensão da dinâmica do escoamento e representa a continuidade deste projeto.

## 7. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro e à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia.

## 8. REFERÊNCIAS

- Goldstein, D. Handler e Sirovich, R. L. 1993, “Modeling a No-Slip Flow Boundary with an External Force Field”, *Journal of Computational Physics*, 105, pp. 354-366.
- Hu, H. H. 1996, “Direct Simulation of Flows of Solid-Liquid Mixtures”, *International Journal of Multiphase Flow*, 22, No. 2, pp. 335-352.
- Lima e Silva, A. L. F. 2002, “Desenvolvimento e Implementação de uma nova Metodologia para Modelagem de Escoamentos sobre Geometrias Complexas: Método da Fronteira Imersa com Modelo Físico Virtual”.
- Lima e Silva, A. L. F., Silveira-Neto A. e Damasceno, J. J. R., 2003, “Numerical Simulation of Two Dimensional Flows over a Circular Cylinder using the Immersed Boundary Method”, aceito para publicação no *Journal of Computational Physics*.
- Peskin, C.S. 1977, “Numerical Analysis of Blood Flow in the Heart”, *Journal of Computational Physics*, 25, pp. 220-252.
- Souza, L. F., Mendonça, M. T., Medeiros, M. A. F. e Kloker, M. “Three Dimensional Code Validation for Transition Phenomena”, *Escola de Turbulência* 2002.

## 9. DIREITOS AUTORAIS

### MATHEMATICAL MODEL AND NUMERICAL SIMULATION OF THE FLOW PAST IMMERSED CYLINDER USING THE IMMERSERD BOUNDARY METHOD WITH VIRTUAL PHISIC MODEL

Alice Rosa da Silva

Ana Lúcia Fernandes de Lima e Silva

Aristeu da Silveira Neto

Federal University of Uberlândia – UFU, Faculty of Mechanic Engineer, Av. João Naves de Ávila 2160 - Uberlândia-MG, Brasil

[arsilva@mecanica.ufu.br](mailto:arsilva@mecanica.ufu.br)

[alfernandes@mecanica.ufu.br](mailto:alfernandes@mecanica.ufu.br)

[aristeus@mecanica.ufu.br](mailto:aristeus@mecanica.ufu.br)

**Abstract:** *In this work is used the methodology in development in the Laboratory of Heat and Mass Transfer and Fluid Dynamic (LTCM-UFU). This methodology is based in the Immersed Boundary Method, Peskin(1977) with the Virtual Phisic Model, Lima e Silva et al. (2003). The method consist to use one fixed grid to represent the calculated domain and one moving grid net to represent the immersed body. The (IBM) use the equations of moviment, solved in lagrangian points to determine the interfacial force which is distributed to eulerian points. The simulations were carried out to incompressible, bidimensional fluid past a estationary circular cylinder, using differents time discretization methods. Differents Reynolds number and differents refinaments of ne were used in the present work. Contours of the vorticity, values of the drag coefficients and Strouhal number were obtained.*

**Keywords:** *Immersed Boundary Method, Physical Virtual Model, Cylinder.*