

MODELAGEM MATEMÁTICA DE PROBLEMAS DE INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA

Alessandra Costa Vilaça

Faculdade de Engenharia Mecânica - UFU
alevica@uol.com.br

Ana Lúcia Fernandes de Lima e Silva

Faculdade de Engenharia Mecânica - UFU
alfernandes@mecanica.ufu.br

Aristeu da Silveira Neto

Faculdade de Engenharia Mecânica - UFU
aristeus@mecanica.ufu.br

Resumo: Problemas de escoamentos sobre estruturas móveis e deformáveis são muito frequentes em aplicações de engenharia. A análise deste tipo de problema pode ser feita numericamente via métodos do tipo Elementos Finitos e Volumes-Elementos Finitos. Dificuldades são enfrentadas ligadas ao processo de discretização, em especial no que se refere à complexidade das geometrias e também à sua mobilidade. Uma nova metodologia tem sido desenvolvida para fazer face a estas dificuldades. Contribuições importantes tem sido dadas pelo grupo de pesquisa em Dinâmica dos Fluidos Computacional do Laboratório de Transferência de Calor e Massa e Dinâmica dos Fluidos da Universidade Federal de Uberlândia. No presente trabalho será apresentada uma formulação que serve a modelar matematicamente problemas de interação fluido-estrutura, a qual, acoplada com o método de fronteira imersa, torna-se uma poderosa metodologia para análise de problemas desta natureza.

Palavras-chave: escoamentos sobre geometrias complexas, fronteira imersa, interação fluido-estrutura, modelo físico virtual.

1. INTRODUÇÃO

Caracterizar a dinâmica de escoamentos torna-se uma tarefa difícil quando nos deparamos com a presença de interfaces complexas que se deformam e/ou vibram. Esta interação sólido-fluido envolve modificações da dinâmica do escoamento visto que a interface e o fluido apresentam comportamentos diferentes. Trata-se do clássico problema de Interação Fluido-Estrutura (IFE) no qual necessita-se tratar o acoplamento entre a estrutura (interface) e o fluido. A IFE tem um importante papel em diferentes aplicações industriais, como por exemplo, nas áreas de biomecânica, aerodinâmica de automóveis, aeronáutica, engenharia civil, indústria petroleira e petroquímica, propagação de ondas acústicas, etc. Normalmente estes problemas têm sido analisados numericamente através de metodologias do tipo Elementos Finitos e Volume Elementos-Finitos utilizando malhas não estruturadas que requerem um processo complexo de remalhagem do domínio de cálculo. Isto se traduz em um elevado custo computacional além da complexidade na geração de malhas para geometrias não convencionais.

O Método de Fronteira Imersa (MFI) vem sendo utilizado para o estudo desta família de problemas com algumas vantagens, tais como o uso de malha cartesiana e apresenta um campo de força que modela a presença da interface imersa, garantindo de forma indireta a imposição das condições de contorno sobre a superfície da interface. No presente trabalho utiliza-se o Modelo Físico Virtual (MFV) proposto por Lima e Silva et al (2003) como uma nova alternativa para o cálculo do campo de forças, adicionado às equações do movimento. O MFV foi utilizado neste trabalho para simular escoamentos sobre corpos imersos rígidos em movimento retilíneo. Uma formulação matemática desenvolvida para acoplar a dinâmica do escoamento e o movimento da interface será também apresentada. A interação fluido-estrutura está sendo modelada. Esta formulação permitirá simular realisticamente a queda livre de partículas sólidas em um meio fluido.

2. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

As equações bidimensionais de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis podem ser expressas por:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right] = -\nabla P + \mu \nabla^2 \vec{V} + \vec{F} \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (2)$$

Onde $\vec{F}$ é a força euleriana calculada por:

$$\vec{F}_{ij} = \sum D_{ij} (\vec{x} - \vec{x}_k) \vec{f}(\vec{x}_k) \Delta s^2(\vec{x}_k), \quad (3)$$

onde $\vec{x}$ é posição de uma partícula de fluido euleriana e $\vec{x}_k$ é o vetor posição dos pontos lagrangianos, sendo Δs é o comprimento médio do arco entre dois pontos lagrangianos, r representa $(x_k - x_i)/h$ ou $(y_k - y_i)/h$, h é o tamanho da malha euleriana e (x_i, y_i) são os pontos eulerianos. A Equação (3) modela a interação entre a interface imersa e o escoamento, através do campo de força $\vec{F}$ injetado sobre o fluido. D_{ij} é uma função distribuição/interpolação, com propriedades gaussianas proposta por Juric (1996). A força euleriana $\vec{F}$ é diferente de zero apenas sobre a interface imersa. Assim modela-se virtualmente a presença da interface imersa independente da geometria que a define. A seguir apresenta-se o modelo Físico Virtual, empregado para o cálculo do campo de força sobre a interface imersa no escoamento.

3. MODELO FÍSICO VIRTUAL (MFV)

O MFV baseia-se nas equações do movimento, que são resolvidas em elementos de fluido centrados nos pontos da malha lagrangiana. Desta forma o campo de força lagrangiano é calculado e posteriormente distribuído para as malhas eulerianas mais próximas da interface. O termo virtual refere-se ao fato de que as condições de contorno na superfície do sólido são impostas virtualmente através de um campo de forças. O cálculo $\vec{f}(\vec{x}_k, t)$ pode ser expresso por:

$$\vec{f}(\vec{x}_k, t) = \underbrace{\rho \frac{\partial \vec{V}(\vec{x}_k, t)}{\partial t}}_{\vec{f}_a} + \underbrace{\rho \vec{\nabla} \cdot (\vec{V}(\vec{x}_k, t) \vec{V}(\vec{x}_k, t))}_{\vec{f}_i} - \underbrace{\mu \nabla^2 \vec{V}(\vec{x}_k, t)}_{\vec{f}_v} + \underbrace{\vec{\nabla} p(\vec{x}_k, t)}_{\vec{f}_p} . \quad (4)$$

Os termos que compõem a Equação (8) são denominados de força de aceleração $\vec{f}_a$, força inercial $\vec{f}_i$, força viscosa $\vec{f}_v$ e força de pressão $\vec{f}_p$. É importante salientar que estes termos são calculados nos pontos da interface utilizando os campos de pressão e velocidade obtidos pela solução das equações do movimento. Estes campos são interpolados em pontos lagrangianos específicos e, através do uso de polinômios de Lagrange e calcula-se as derivadas apresentadas pela Eq. (4). A condição de não deslizamento é garantida fazendo que a velocidade do fluido sobre a interface seja igual à velocidade da interface. Maiores detalhes sobre o MFV podem ser encontrados em Lima e Silva (2002) e Lima e Silva et al (2003).

4. MODELO MATEMÁTICO PARA O MOVIMENTO RETILÍNEO UNIFORME DE UMA INTERFACE CIRCULAR QUE NÃO SE DEFORMA

Sempre que existe um movimento relativo entre um corpo sólido imerso e um fluido, este está submetido à ação de forças. Aplicando-se um balanço das forças resultantes (F_R) na direção vertical, representadas na Fig.(1), sobre o corpo imerso, para modelar o seu deslocamento descendente. Considerando-se este corpo sólido como uma partícula e aplicando-se a segunda lei de Newton dada por $F_R = m_p \vec{a}$, onde m_p é a massa da partícula e $\vec{a}$ é a aceleração da partícula. A força decorrente da pressão do fluido sobre o corpo é denominada força de empuxo, dada por $F_E = \rho_f g V_p$, onde ρ_f é densidade do fluido, V_p é o volume da partícula e g é a aceleração da gravidade. O arrasto é a componente da força sobre um corpo agindo paralelamente à direção do movimento a qual denominaremos de força de arrasto, F_a . Finalmente, a força aplicada sobre o corpo devido à ação da gravidade, a força peso, dada por $F_p = \rho_p g V_p$, onde ρ_p é a densidade da partícula imersa.

Considerando a aceleração da partícula como, $\vec{a} = \frac{d\vec{V}_k}{dt}$, e substituindo as respectivas forças na equação da segunda lei de Newton, tem-se:

$$m_p \frac{d\vec{V}_k}{dt} = V_p \vec{g}(\rho_p - \rho_f) - \vec{F}_a \quad (5)$$

Discretizando a Eq. (6) chega-se à equação para o cálculo da velocidade da partícula no tempo atual (n+1).

$$v_p^{n+1} = v_p^n + \frac{\Delta t}{\rho_p} \left[g_y (\rho_p - \rho_f) - \frac{F_d}{V_p} \right] \quad (6)$$

O segundo termo depende da velocidade no tempo precedente e de termos constantes que se referem às propriedades do sistema. Onde v_p é a velocidade da partícula na direção da gravidade.

Para modelar o deslocamento da partícula utiliza-se uma equação lagrangiana dada por $\frac{dy_p}{dt} = v_p$, e sua respectiva discretização fornece a nova posição da interface pela seguinte equação:

$$Y_p^{n+1} = Y_p^n + v_p \Delta t \quad (7)$$

onde Y_p^{n+1} computa o deslocamento no tempo atual da partícula no escoamento. Vale ressaltar que a força resultante sobre a partícula promoverá o seu deslocamento na vertical. Na Figura (1) estão representadas a força de arrasto, F_a , a força de empuxo, F_e e a força peso F_p . A seguir uma

formulação completa para modelar o deslocamento de uma partícula no interior de um fluido é apresentada.

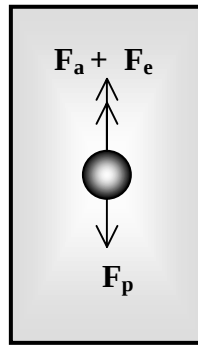


Figura 1: Balanço de forças atuantes sobre uma partícula.

5. MODELO MATEMÁTICO PARA O MOVIMENTO DE TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO SIMULTÂNEAS DE UMA INTERFACE RÍGIDA

No estudo do movimento dos fluidos pode-se seguir duas análises: a análise diferencial e a análise integral. O fluido sofre deformações contínuas com o tempo, o que torna difícil caracterizar uma mesma massa de fluido em todos os instantes. Deve-se também levar em consideração o movimento de uma dada massa de fluido sobre algum dispositivo ou estrutura. Dessa forma, é mais conveniente aplicar as leis básicas a um volume de controle definido no sistema de interesse. Essas leis básicas fazem parte das leis da física, mecânica e termodinâmica. O principal objetivo é de se obter uma relação geral entre a taxa de variação de qualquer propriedade extensiva arbitrária, N , de um sistema, e as variações dessa propriedade associada ao volume de controle no instante em que o volume de controle e o sistema coincidem. Este resultado é conhecido como o *Teorema de Transporte de Reynolds*, dado pela equação unidimensional apresentada a seguir, onde η corresponde à propriedade intensiva:

$$\left(\frac{dN}{dt} \right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \eta \rho dV + \int_{SC} \eta \rho \vec{V} d\vec{A} \quad (8)$$

Na formulação apresentada a seguir será levada em conta a rotação e a aceleração angular do volume de controle, além da translação e da aceleração retilínea. Nesse caso é necessário introduzir ao estudo um referencial não inercial, xyz , em relação ao referencial inercial, XYZ , mostrado na Fig.(2).

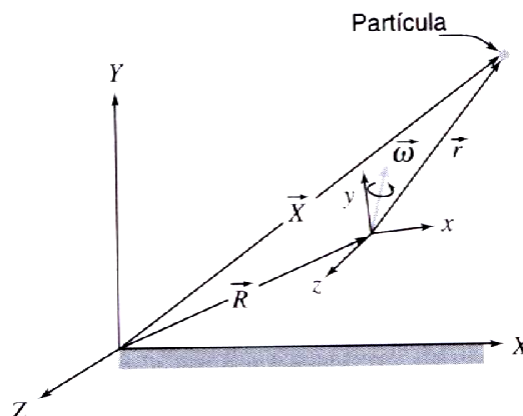


Figura 2: Localização de uma partícula em relação aos referenciais inercial (X,Y,Z) e não-inercial (x,y,z).

Na Figura (2) $\vec{R}$ é o vetor posição do sistema de eixos não-inercial em relação ao referencial inercial (X,Y,Z), $\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$ é o vetor posição do sistema (partícula) em relação ao referencial não-inercial (x,y,z), $\vec{X} = \vec{R} + \vec{r}$ é o vetor posição da partícula em relação ao referencial inercial (X,Y,Z), e $\vec{\omega}$ é a velocidade angular do referencial não-inercial.

5.1 Equação da Quantidade de Movimento Linear para um Sistema sob Aceleração Arbitrária

Desenvolvendo a segunda Lei de Newton para um sistema de coordenadas arbitrárias, não-inercial, dada por $\vec{F}_R = m\vec{a}_{XYZ}$, onde $\vec{F}_R$ é a força resultante (forças de sustentação e de campo que atuam sobre o volume de controle), $\vec{a}_{XYZ}$ é a aceleração retilínea absoluta de uma partícula em relação ao sistema de referencial fixo XYZ, chega-se a:

$$\vec{F}_S + \vec{F}_B - \int_{VC} [\vec{a}_{ref} + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}] \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \vec{r} \times \vec{V}_{xyz} \rho dV + \int_{SC} \vec{r} \times \vec{V}_{xyz} \rho \vec{V}_{xyz} d\vec{A}, \quad (9)$$

onde $\vec{F}_S$ são as forças de superfície que atuam sobre da partícula em relação ao referencial inercial, $\vec{F}_B$ são as forças de campo que atuam sobre da partícula em relação ao referencial inercial, $2\vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz}$ é a aceleração de Coriolis decorrente do movimento da partícula dentro referencial não-inercial, $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ representa a aceleração centrípeta devida à rotação referencial não-inercial, e $\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$ é a aceleração tangencial devida à aceleração angular referencial não-inercial, $\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \vec{r} \times \vec{V}_{xyz} \rho dV$ é a taxa de variação de quantidade de movimento dentro do volume de controle e $\int_{SC} \vec{r} \times \vec{V}_{xyz} \rho \vec{V}_{xyz} d\vec{A}$ é a taxa de fluxo de massa através da superfície de controle. Considera-se a origem do referencial não-inercial coincidente com o centro de gravidade da partícula e a não variação de quantidade de movimento do volume de controle em relação ao referencial não-inercial e que não existe fluxo de massa na superfície do volume de controle (pois a partícula é rígida), resolve-se cada termo da Eq. (13) e obtém as componentes nas direções x e y, dadas por:

$$F_{SX} = M_p \frac{du_p}{dt} - 2v_p w_z M_p \quad (10)$$

$$F_{SY} + F_{BY} = M_p \frac{dv_p}{dt} + 2u_p w_z M_p \quad (11)$$

onde u_p , v_p , w_z são componentes da velocidade linear e angular da partícula e são calculadas em relação ao centro de gravidade.

5.2 O Princípio do Momento da Quantidade de Movimento para um Sistema Não Inercial

Para um referencial inercial o princípio do momento da quantidade de movimento é dado por:

$$\vec{T} = \frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{VC} (\vec{R} \times \vec{V}_{XYZ}) \rho dV + \int_{VC} (\vec{r} \times \vec{V}_{XYZ}) \rho dV, \quad (12)$$

onde $\vec{T}$ é o torque total exercido sobre o sistema pela sua vizinhança e $\vec{H}$ é o momento da quantidade de movimento do sistema. Aplicando o *Teorema do Transporte de Reynolds* para desenvolver uma expressão para o princípio do momento da quantidade de movimento (ou quantidade de movimento angular) aplicada a um sistema não-inercial girando em torno de um eixo fixo no espaço. Resolvendo os termos do lado direito da Eq. (17), e considerando que não ocorre fluxo de massa na superfície de controle e que a partícula é rígida, colocando as coordenadas (x,y,z) no centro de gravidade (CG) e resolvendo cada termo chega-se a:

$$\vec{T}_{\text{sistema}} - \left[X_{\vec{R}} M_p \frac{dv_p}{dt} - Y_{\vec{R}} M_p \frac{du_p}{dt} + 2\vec{\omega} u_p X_{\vec{R}} M_p + 2\vec{\omega} v_p Y_{\vec{R}} M_p + \dot{\vec{\omega}}_z I_y + \dot{\vec{\omega}}_z I_x \right] = 0, \quad (13)$$

onde $X_{\vec{R}}$ é o vetor de coordenada x dos vetores $\vec{R}$ e $\vec{r}$, $Y_{\vec{R}}$ é o vetor de coordenada y dos vetores $\vec{R}$ e $\vec{r}$, M_p é a massa da partícula, I_x é o momento de inércia em relação ao eixo y e I_y é o momento de inércia em relação ao eixo x, $\dot{\vec{\omega}}_z$ é a aceleração angular. Resolvendo a equação anterior, chega-se a:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{\sum_{k=1}^{nk} (F_{ky} x_k - F_{kx} y_k)}{I_x + I_y}. \quad (14)$$

Com as Equações (10), (11) e (14) tem-se um sistema linear com três incógnitas e três equações, cuja solução fornecerá as componentes da velocidade linear e angular relativas a uma partícula que possui movimento de translação e rotação.

6. MÉTODO NUMÉRICO

Para obter a solução das equações de Navier-Stokes necessita-se passar por dado processo de acoplamento dos campos de pressão e de velocidade. Para isso utiliza-se o Método dos Passos Fracionados o qual possibilita boa convergência e boa conservação da massa. O método de discretização utilizado foi o de diferenças finitas centradas de segunda ordem, com malhas deslocadas. Para a discretização temporal utilizou-se um esquema de Euler de primeira ordem.

7. RESULTADOS

O MFV, juntamente com o MFI, estão sendo aplicados para modelar o movimento retilíneo e variável de um corpo rígido bidimensional em queda livre. O transporte da interface foi efetuado aplicando-se o balanço de forças apresentado na Fig.(1) com o objetivo de permitir o movimento de translação da interface circular sólida. Objetivou-se obter informações inerentes à interação da partícula com o fluido e validar o modelo matemático apresentado. Os resultados foram obtidos para um domínio retangular de largura $L_x = 8$ cm e de altura $L_y = 80$ cm. Uma partícula circular de raio 0,5 cm está inicialmente em uma posição conhecida dentro do domínio. A densidade da partícula e do fluido são respectivamente $3,0 \text{ g/cm}^3$ e $1,0 \text{ g/cm}^3$. O fluido possui viscosidade cinemática de 1 g/(cms) . Para as fronteiras laterais do domínio foi imposta a presença de paredes. Utilizou-se uma malha euleriana de 80×800 pontos. Na Figura (3) apresenta-se o deslocamento da interface no interior do domínio. O centro da interface foi posicionado inicialmente na altura 70 cm dentro do domínio.

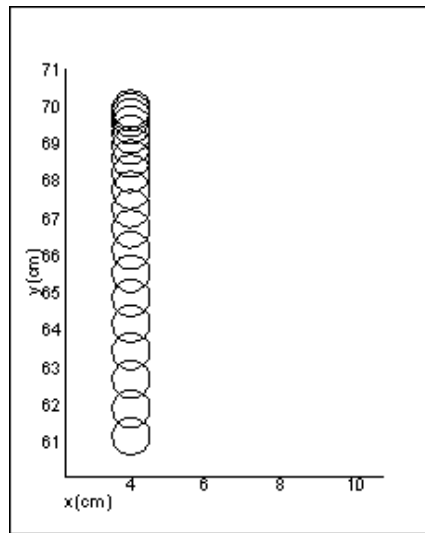


Figura 3: Deslocamento da partícula.

Na Figura (4) são apresentadas as linhas de corrente do escoamento sobre a interface à medida que a interface se desloca no domínio.

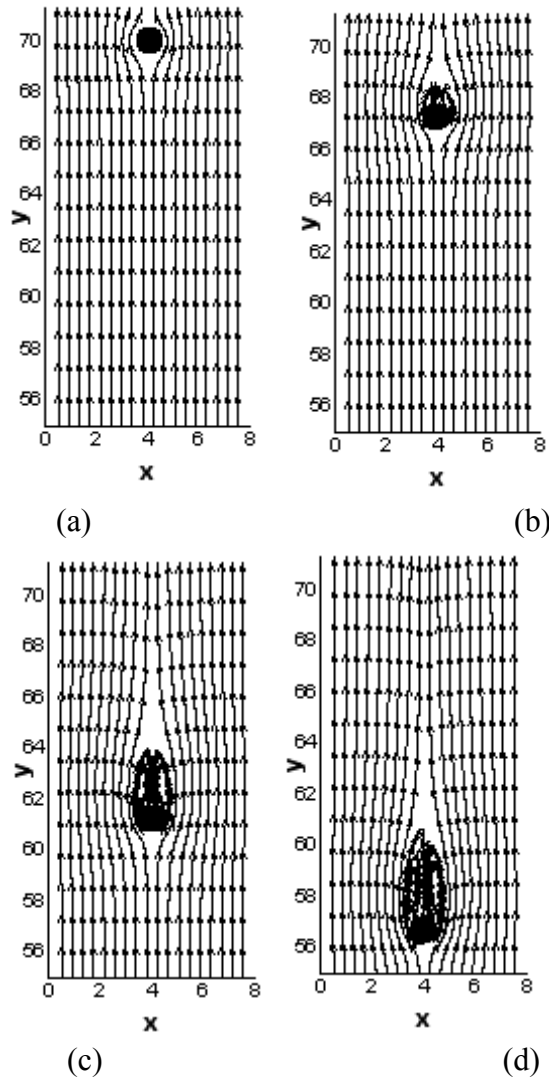


Figura 4: Linhas de corrente do escoamento sobre a interface.

Verifica-se um comportamento satisfatório e coerente quando comparado a um comportamento físico esperado. O escoamento se caracteriza por baixo número de Reynolds. Os resultados preliminares são satisfatórios quando se refere à possibilidade de simular e modelar escoamentos com presença de interfaces que se movimentam com o código computacional desenvolvido pelo LTCM. Vale ressaltar, que os testes encontram-se em andamento para futuras comparações com resultados encontrados na literatura tanto do ponto de vista qualitativo e quantitativo.

8. REFERÊNCIAS

- Juric, D., 1996, "Computation of phase change", Ph. D. Thesis, Mech. Eng. Univ. of Michigan, USA.
- Lima e Silva, A.L.F, 2002, Desenvolvimento e implementação de uma nova metodologia para modelagem de escoamentos sobre geometrias complexas: Método da Fronteira Imersa com Modelo Físico Virtual, Tese de doutorado em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, MG, Brasil.
- Lima e Silva, A. L. F., Silveira-Neto, A. e Damasceno, J. J. R., 2003, "Numerical Simulation of Two Dimensional Flows over a Circular Cylinder using the Immersed Boundary Method", Journal of Computational Physics, 189, 351-370.

9. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

MATHEMATICS MODELLING OF FLUID-STRUCTURE INTERACTION PROBLEMS

Alessandra Costa Vilaça

Federal University of Uberlândia - UFU

alevica@uol.com.br

Ana Lúcia Fernandes de Lima e Silva

Federal University of Uberlândia - UFU

alfernandes@mecanica.ufu.br

Aristeu da Silveira Neto

Federal University of Uberlândia - UFU

aristeus@mecanica.ufu.br

Abstract: Problems with flow on moving and deformable structures are very often in engineering applications. These problems have generally been numerically analysed through the Finite Elements and Finite-Elements Volumes. Difficulties faced to the discretization process, in regard to complexity of geometries and also their mobility. The new methodology had been used to profile this difficulty. Important contributions have been done through of research group in Computacional Fluid Dynamics of the Heat and Mass Transfer Laboratory of Federal University of Uberlândia. In the present study will be present a formulation that mathematical model problems of fluid-structure interaction, which, accoupled with the Immersed Boundary Method, become a powerful methodology for analysis of problems of this nature.

Palavras-chave: flow on complex geometries, immersed boundary, fluid-structure interaction, physical virtual model.