

ANÁLISE DE VIBRAÇÃO MECÂNICA EM UMA CHAMINÉ INDUSTRIAL

Rogério Rodrigues dos Santos

Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia
Av. João Naves de Ávila, 2160 - Campus Santa Mônica - Bloco 1M - Uberlândia/MG
rrsantos@mecanica.ufu.br

Valder Steffen Jr.

Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia
Av. João Naves de Ávila, 2160 - Campus Santa Mônica - Bloco 1M - Uberlândia/MG
vsteffen@mecanica.ufu.br

Resumo: A análise de vibrações mecânicas envolve um grande número de ferramentas analíticas, computacionais e experimentais, capazes de tratar uma enorme gama de problemas de engenharia. Neste trabalho é considerado o problema de vibrações de uma chaminé industrial. Devido ao baixo amortecimento inerente à estrutura, uma chaminé industrial construída em aço soldado é propensa a oscilar sob a ação do vento, em decorrência de vórtices que surgem e desaparecem a intervalos regulares de tempo, nos lados opostos da chaminé. Quando a frequência de atuação das forças é próxima da frequência natural da chaminé, a vibração atingirá uma amplitude que, de acordo com o tempo de duração, pode causar falha por fadiga no sistema. Uma forma de aumentar o amortecimento da estrutura é construí-la sobre uma fundação elástica. Apresenta-se um estudo preliminar sobre o problema, considerando as situações com e sem amortecimento, procurando extrair aspectos importantes a serem considerados em nível de projeto deste tipo de estrutura.

Palavras-chave: vibração mecânica, sistemas amortecidos e não amortecidos.

1. INTRODUÇÃO

A análise de vibrações mecânicas envolve um grande número de ferramentas analíticas, computacionais e experimentais, capazes de tratar uma enorme gama de problemas de engenharia. Neste trabalho é considerado o problema de vibrações de uma chaminé industrial.

Devido ao baixo amortecimento característico da estrutura, a chaminé está propensa a oscilar por causa do vento. Se a excitação causada pelo vento tiver frequência próxima a frequência natural da estrutura, a vibração poderá atingir uma amplitude que, dependendo do período de duração, causará a falha da chaminé pela fadiga do metal. O fato de ocorrer ou não a excitação depende das características do amortecimento da estrutura nas frequências dos modos normais de vibração. Caso haja amortecimento suficiente, a oscilação não aumentará, mesmo se a excitação do vórtice de vento for igual a frequência natural da chaminé.

Uma forma de aumentar seu amortecimento é construí-la sobre uma fundação amortecida. Quando a chaminé flerte, a fundação flexível deforma e seu alto amortecimento aumenta a taxa total de dissipação de energia da chaminé. Neste estudo, são determinadas as frequências naturais e modos de vibração de um modelo com sete graus de liberdade sem amortecimento. Posteriormente é analisada como a adição de uma fundação amortecida altera o resultado anterior e como o amortecimento do modo de menor frequência pode ser aumentado pela ação dessa fundação.

Procura-se um equilíbrio entre a matemática e a física do problema apoiando-se na valiosa ajuda que pode ser obtida dos métodos numéricos, pois a velocidade de processamento dos computadores atuais possibilitam a obtenção da solução numérica a um tempo e custo acessíveis.

2. EQUAÇÃO DO MOVIMENTO

O comportamento do sistema é descrito por um sistema de equações diferenciais ordinárias, que tem a forma geral $M \ddot{y} + C \dot{y} + Ky = f(t)$, com M , C e K independentes do tempo representando massa, amortecimento e rigidez, respectivamente.

Como conclusão pode ser dito que o sistema sujeito a alguma excitação apresenta um certo comportamento. Este comportamento caracteriza a chamada de resposta dinâmica do sistema. A relação entre a excitação e a resposta neste caso é dada por

$$\text{Excitação } f(t) \rightarrow \text{Características do sistema } G(t) \rightarrow \text{Resposta } y(t)$$

$$\text{onde } G(t) = M \frac{d^2}{dt^2} + C \frac{d}{dt} + K.$$

A Fig. (1) mostra um modelo onde a chaminé é representada por sete barras rígidas e sem massa. A rigidez de flexão da chaminé é representada pela mola rotacional k em cada nó. A massa da chaminé é representada pela massa pontual m , localizada no centro de cada barra. As coordenadas $y_1, y_2, \dots, y_7$ representam o movimento lateral do extremo da barra.

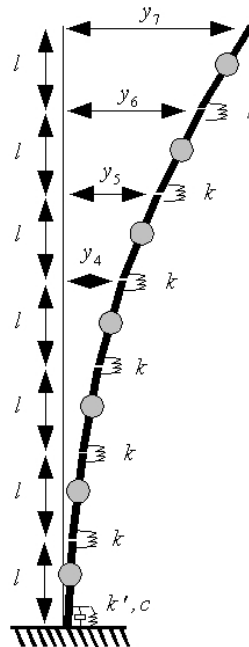


Figura 1: Modelo de chaminé flexível com fundação amortecida.

A partir do princípio de d'Alembert, aplicado sobre cada componente da chaminé metálica de 42 m de altura, diâmetro de 2,25 m, espessura da parede de 6,8 mm e peso de 21 ton, onde cada elemento mede 6 m e tem o peso de 3 ton, pode-se obter as equações do movimento do sistema, aqui escritas na forma matricial.

Para calcular o ângulo de deflexão rotacional usa-se a teoria de vigas de Euler-Bernoulli, resultando a expressão $\phi = \frac{Ml}{EI}$; E módulo Young, $I = \frac{\pi}{64} [D^4 - (D - 2t)^4]$ para uma barra de tamanho l , momento fletor M , e rigidez de flexão EI . Assim, a equação de movimento é obtida das seguintes matrizes:

$$M = \frac{ml}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 8 & 12 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 8 & 12 & 16 & 9 \\ 1 & 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 11 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 24 & 13 \end{bmatrix}$$

$$K = \frac{mg}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2k}{mgl} & \frac{-4k}{mgl} + 1 & \frac{2k}{mgl} - 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2k}{mgl} & \frac{-4k}{mgl} + 3 & \frac{2k}{mgl} - 2 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{2k}{mgl} & \frac{-4k}{mgl} + 5 & \frac{2k}{mgl} - 2 & -2 & -1 \\ 0 & \frac{2k}{mgl} & \frac{-4k}{mgl} + 7 & \frac{2k}{mgl} - 2 & -2 & -2 & -1 \\ \frac{2k}{mgl} & \frac{-4k}{mgl} + 9 & \frac{2k}{mgl} - 2 & -2 & -2 & -2 & -1 \\ \frac{-4k}{mgl} + 11 & \frac{2k}{mgl} - 2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -1 \\ \frac{2k'}{mgl} - 2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

e $C_{7 \times 7} = [0]$, $C_{7,1} = \frac{c}{l}$, com os parâmetros

Tabela 1: Parâmetros para o modelo da chaminé.

tamanho de cada elemento	$l = 6 \text{ m}$
massa por elemento	$m = 3 \times 10^3 \text{ kg}$
rigidez rotacional entre elementos	$k = 10^9 \text{ N m/rad}$
rigidez rotacional na base	$k' = 2 \times 10^9 \text{ N m/rad}$
amortecimento rotacional a base (caso não amortecido)	$c = 0$
amortecimento rotacional a base (caso amortecido)	$c = 5.85 \times 10^7$
aceleração devido a gravidade	$g = 9,81 \text{ m/s}^2$

3. MODELO DE VARIÁVEIS DE ESTADO

Para um sistema com n graus de liberdade as equações de movimento consistem em um conjunto de n equações diferenciais de segunda ordem. Em geral estas equações estão acopladas, o que implica que as equações do sistema de equações devem ser resolvidas simultaneamente. Isto não é uma tarefa fácil. Entretanto, utilizando uma transformação linear é possível expressar o conjunto de equações em termos de um sistema equivalente de primeira ordem, o que acarreta em dobrar a ordem das matrizes envolvidas.

A vantagem obtida com esta transformação é que um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem é consideravelmente mais fácil de resolver que um conjunto de equações acopladas de segunda ordem. Além disso, esta formulação considera o caso geral de amortecimento, sem a necessidade de supor um tipo específico de amortecimento, como o amortecimento proporcional, por exemplo.

O modelo de variáveis de estado é uma forma de escrever as equações do movimento utilizando um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem acopladas, representadas na forma matricial. Com esta representação é possível desenvolver uma representação que preserve a relação entre informações de entrada e saída, e descrever um sistema de ordem n através de n equações de

primeira ordem. Além disso, este tipo de formulação é necessária no caso do tratamento de problemas de controle.

Dado $M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + C \frac{dy(t)}{dt} + K y(t) = f(t)$ então $M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = f(t) - C \frac{dy(t)}{dt} - K y(t)$.

Sejam as variáveis de estado $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ tais que

$$x_1(t) = y(t) \text{ e } x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{dx_1(t)}{dt} = \dot{x}_1(t).$$

Assim $x_1(t)$ é a posição da massa e $x_2(t)$ é a velocidade, o que implica

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \frac{dx_2(t)}{dt} = \dot{x}_2(t) = -CM^{-1}x_2(t) - KM^{-1}x_1(t) + M^{-1}f(t)$$

que é o modelo de variáveis de estado, e é usualmente escrito na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -KM^{-1} & -CM^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \end{bmatrix} f(t)$$

$$y(t) = [I_n \ 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Considerando que este sistema está na forma padrão

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \text{ (equação de estado)}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \text{ (equação de saída)}$$

onde

$x(t)$ - vetor de estado ($n \times 1$) dos estados de um sistema de ordem n ,

A - matriz do sistema ($n \times n$),

B - matriz de entrada ($n \times r$),

$u(t)$ - vetor de entrada ($r \times 1$),

$y(t)$ - vetor de saída ($p \times 1$),

C - matriz de saída ($p \times n$),

D - matriz de acoplamento direto entre entrada e saída ($p \times r$).

um valor de D diferente de zero indica que há pelo menos um caminho direto entre a entrada e a saída, onde a função de transferência do caminho pode ser modelada como ganho puro. No caso de apenas uma entrada ($r=1$), a matriz B torna-se um vetor coluna e o vetor $u(t)$ torna-se um escalar. No caso de apenas uma saída ($p=1$), o vetor $y(t)$ torna-se um escalar e a matriz C um vetor linha.

4. FUNÇÃO DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

Um sistema excitado por uma função $f(t)$ tem uma resposta $y(t)$ que depende das características $G(t)$ do sistema. No sistema em questão $y(t)$ denota deslocamento e $G(t)$ é um operador diferencial linear com coeficientes constantes. Se a resposta obtida é a velocidade $v(t) = \dot{y}(t)$ ao invés do deslocamento, as características do sistema serão da forma de um operador diferencial-integral que é a integral de $G(t)$.

Se a equação diferencial que descreve o sistema é transformada utilizando a transformada de Laplace, a relação entre excitação e resposta (entrada e saída, respectivamente) será uma expressão algébrica. Considerando condições iniciais nulas teremos $M s^2 \bar{y}(s) + C s \bar{y}(s) + K \bar{y}(s) = \bar{F}(s)$, onde

$$\bar{y}(s) = L\{y(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} y(t) dt \text{ e } \bar{F}(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

são as transformadas de Laplace de $y(t)$ e $f(t)$ respectivamente.

A função que relaciona entrada e saída do sistema é chamada função de transferência, e é definida por

$$G_{ij}(s) = \frac{L\{\text{saída no ponto } j \text{ devido a entrada no ponto } i\}}{L\{\text{entrada no ponto } i\}}$$

que neste caso se reduz a $G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{F}(s)}$

Temos então $G_{ij}(s) = C(i\omega I - A)^{-1} B$ que expressa a função de resposta em frequência para $s = i\omega$.

Realizando o cálculo para $i=7$ e $j=7$ com os valores da Tab. (1) obtém-se

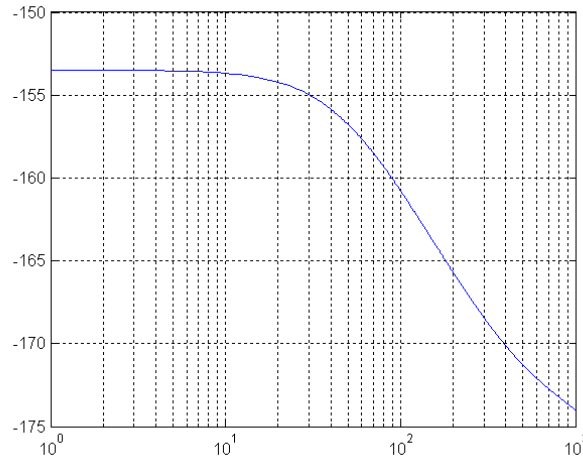


Figura 2: Função de resposta em frequência, caso não amortecido.

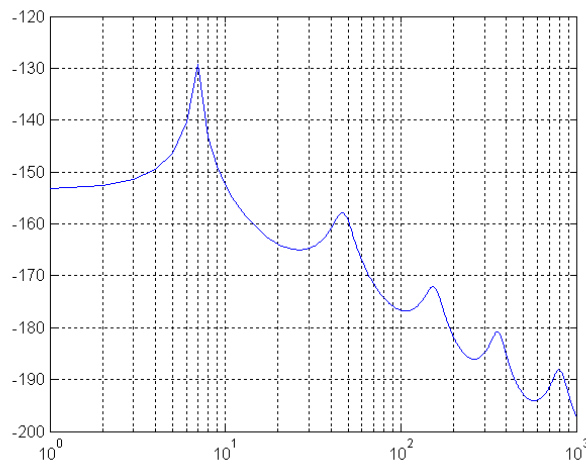


Figura 3: Função de resposta em frequência, caso amortecido.

5. AUTOVALORES DA EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA

Ao considerar a equação de estado para o caso sem excitação, a resposta de movimento livre tem a forma geral $y(t) = Ye^{\lambda t}$ onde Y é um vetor coluna ($n \times 1$) cujos elementos são independentes de t . Substituindo $y(t)$ na equação de estado, para $B = 0$, resulta $\lambda Y = AY \Rightarrow [A - \lambda I]Y = 0$, que é um sistema de n equações nas variáveis λ . Para obter uma solução não trivial para o sistema, deve-se ter $\det[A - \lambda I] = 0$, que corresponde a determinar os autovalores da matriz A .

Na prática, os autovalores são determinados utilizando softwares. A disponibilidade de utilizar um programa computacional é uma vantagem importante oferecida pela formulação da resposta em sistema linear. Ao desenvolver o determinante acima obtém-se uma equação algébrica de ordem n em λ conhecida como equação característica. As n raízes desta equação são os valores característicos ou autovalores. A raiz quadrada positiva destes valores $\omega = \sqrt{\lambda}$ são as frequências

naturais do sistema. A menor frequência ω_1 é chamada frequência fundamental. Há no máximo n frequências nas quais é possível um movimento harmônico.

A amplitude u_i destes movimentos harmônicos é dada pelo vetor característico, ou autovetor associado a cada autovalor. Os vetores característicos u são chamados vetores modais e representam os modos naturais de vibração. Os modos normais são característicos de cada sistema, assim como as frequências naturais e dependem das propriedades de inércia e rigidez.

O conjunto de vetores $\{u_1, \dots, u_n\}$ constituem uma base de espaço vetorial no sentido de que qualquer vetor n dimensional que represente um movimento possível do sistema pode ser obtido através da combinação linear destes vetores.

Através do cálculo dos autovalores para o sistema não amortecido e amortecido, obtém-se as frequências naturais não amortecidas e amortecidas em *rad/s* para a chaminé a partir de diferentes valores de rigidez k' da fundação.

Tabela 2: Frequências naturais

$k' = 2 \times 10^9 \text{ Nm/rad}$	$k' = 1 \times 10^9 \text{ Nm/rad}$
Sem amortecimento	
6.8406e+000	6.0315e+000
4.3060e+001	3.9204e+001
1.2343e+002	1.1561e+002
2.5692e+002	2.4722e+002
4.8427e+002	4.7571e+002
9.6486e+002	9.5944e+002
3.1520e+003	3.1502e+003
Com amortecimento	
6.8659e+000	6.1095e+000
4.6670e+001	4.3353e+001
7.5836e+001	4.6894e+001
1.5410e+002	1.5626e+002
3.5759e+002	3.5943e+002
8.0234e+002	8.0377e+002
2.9963e+003	2.9955e+003

e os modos de vibração são obtidos a partir dos autovetores associados a cada autovalor, resultando em

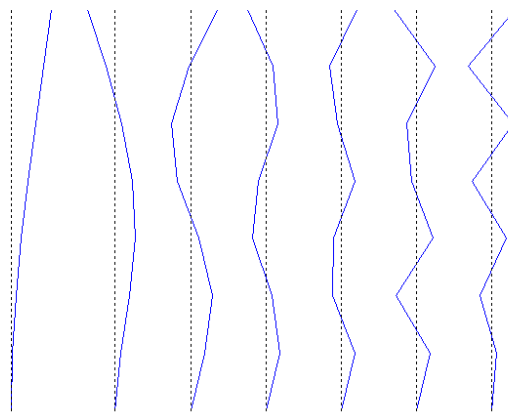


Figura 4 – Autovetores obtidos utilizando os parâmetros da Tab. (1).

Para o caso amortecido obtém-se primeiramente os autovalores complexos e também os autovetores correspondentes. Os modos de vibração são então obtidos considerando a fase do autovetor (que é complexo) associado a cada autovalor. Nos gráficos seguintes, a evolução do modo de vibração em relação ao tempo é obtido somando-se um ângulo de 45° à fase de cada autovetor representado no plano complexo e multiplicando os componentes do auto-vetor pela função exponencial decrescente que considera o amortecimento, no caso, $e^{-\alpha t}$. Este ângulo corresponde a um oitavo de período. Dessa forma, obtém-se informações da evolução do modo ao longo do período, nos tempos $t_1 = T/8$; $t_2 = 2T/8$;... $t_8 = T$.

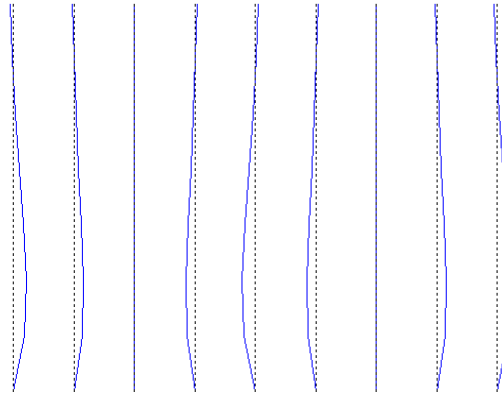


Figura 5: Posições sucessivas da chaminé em vibração livre no primeiro modo de vibração amortecido.

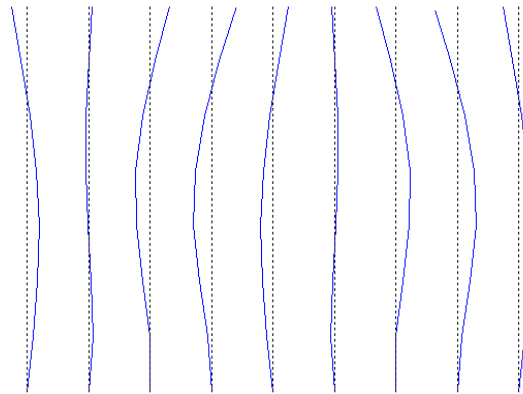


Figura 6: Posições sucessivas da chaminé em vibração livre no segundo modo de vibração amortecido.

6. CONCLUSÃO

Este trabalho considerou o problema de vibração de uma chaminé metálica. Após a formulação modelo matemático para o problema, apresentou-se o problema na forma de equações de estado, formulação esta que possibilita o estudo do caso geral de amortecimento.

A partir do modelo de variáveis de estado, determinou-se a função de resposta em frequência para os casos com e sem amortecimento. A obtenção dos autovalores da equação característica permitem observar que a frequência fundamental $\omega_1 = 6.8406 \text{ rad/s} (1.08 \text{ Hz})$ é reduzida para

$\omega_1 = 6.0315 \text{ rad/s} (0.95 \text{ Hz})$ quando a rigidez da base é diminuída de $k' = 2 \times 10^9 \text{ Nm/rad}$ para $k' = 1 \times 10^9 \text{ Nm/rad}$. A adição de um amortecedor na base também altera as frequências naturais da estrutura, podendo-se fazer uma combinação entre rigidez e amortecimento para obter um comportamento específico. Por fim foram apresentados os modos de vibração para o caso não amortecido e as posições sucessivas da chaminé nos dois primeiros modos de vibração para o caso amortecido, ao longo de um período.

A perspectiva de continuidade deste trabalho prevê o uso de técnicas de otimização para determinar como a variação dos parâmetros resulta em uma diminuição da amplitude de vibração, além de considerar a inclusão de absorvedores dinâmicos de vibração na estrutura. A parte superior da chaminé há de merecer especial atenção neste caso, em decorrência das grandes amplitudes a que está sujeita.

7. REFERÊNCIAS

- Hildebrand, F. B., 1960, "Methods of Applied Mathematics", Prentice-Hall.
 Meirovitch, L., 1969, "Analytical Methods in Vibrations", The Macmillan Company.
 Newland, D. E., 1989, "Mechanical Vibration Analysis and Computation", Longman Scientific and Technical.
 Scruton, C. and Flint, A. R., 1964, "Wind-Excited Oscillations of Structures", Proc. Instn Civil Engrs, Vol. 27, pp 673-702.
 Tong, K. N., 1960, "Theory of Mechanical Vibration", Wiley.

8. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

MECHANICAL VIBRATION ANALYSIS OF AN INDUSTRIAL CHIMNEY

Rogério Rodrigues dos Santos

Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia
 Av. João Naves de Ávila, 2160 - Campus Santa Mônica - Bloco 1M - Uberlândia/MG
 rrsantos@mecanica.ufu.br

Valder Steffen Jr.

Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia
 Av. João Naves de Ávila, 2160 - Campus Santa Mônica - Bloco 1M - Uberlândia/MG
 vsteffen@mecanica.ufu.br

Abstract: Mechanical vibration analysis involves a large number of analytical, computational and experimental tools, which are able to cover a great number of engineering problems. In this work, the vibration problems of an industrial chimney are considered. A welded steel industrial chimney, because of its inherent low damping, is prone to oscillate under wind action that appears and disappears constantly in the opposite sides of the chimney structure. When the frequency of the wind-induced force is close to one of the chimney's natural frequencies, vibration amplitudes (depending on the duration of the excitation) will cause the system to fail by metal fatigue. One method of artificially increase damping is to construct the chimney on an elastic foundation. In this work, a preliminary study about this problem is presented, by considering two different situations, namely with and without damping. The goal is to give insights about the dynamical behavior of the system, for chimney design purposes.

Keywords: mechanical vibration, damped and undamped systems.