



**13º POSMEC - Simpósio do Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Mecânica**

**Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Engenharia Mecânica**



ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA DE PLACAS FABRICADAS A PARTIR DE MATERIAIS COMPÓSITOS VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Ilvan Porto Pereira Júnior

Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Campus Santa Mônica, Bloco M, s/n
ippereira@mecanica.ufu.br

Raquel Santini Leandro Rade

Faculdade de Física, Universidade Federal de Uberlândia, Campus Santa Mônica, Bloco X, s/n
rslr@ufu.br

Domingos Alves Rade

Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Campus Santa Mônica, Bloco M, s/n
domingos@ufu.br

Resumo: No presente trabalho aborda-se a análise dinâmica e estática de placas fabricadas a partir de materiais compósitos via método dos elementos finitos.

São obtidas as dez primeiras frequências naturais de uma determinada placa além da sua resposta harmônica e transiente em nós predefinidos da malha. Estes resultados propiciarão uma análise da sensibilidade na resposta dinâmica à variação angular das camadas em relação ao sistema referencial de eixos da placa e uma melhor compreensão no que diz respeito ao amortecimento histerético inerente ao material, analisado a partir da resposta transiente.

No que diz respeito a análise estática, procura-se obter a configuração do estado de tensões e deformação nos laminados, uma vez que de acordo com a teoria de placas, o campo de tensões é descontínuo, isso devido às diferentes propriedades do material ao longo da sequência de empilhamento. Entretanto, o campo de deformações permanece contínuo, garantindo a integridade estrutural.

A partir da análises dos resultados, conclui-se que as variações no comportamento estático e dinâmico refletem uma grande flexibilidade na utilização do material compósito. Entretanto, paradoxalmente, essa característica pode se transformar numa grande desvantagem, sendo esta a dificuldade na fabricação de materiais que reproduzam o comportamento esperado.

Palavras-Chave: *Materiais Compósitos, Análise Estática, Análise Dinâmica.*

1-INTRODUÇÃO

No campo da ciência dos materiais, o uso dos compósitos tem apresentado uma certa predileção por diversos setores da indústria, pode-se notar, por exemplo, uma larga aplicação no setor aeroespacial e biomédico.

A vantagem dos compósitos advém da sua alta rigidez comparada ao seu baixo peso específico, o que proporciona estruturas cada vez mais leves e rígidas. Entretanto, para aplicações onde se deseja obter uma alta performance alcançada pelo material, são necessárias análises precisas que garantam o bom desempenho nas funções atribuídas ao mesmo.

2-OBJETIVO

No presente trabalho abordar-se-á a análise dinâmica e estática de placas fabricadas a partir de materiais compósitos via método dos Elementos Finitos (MEF). Como ferramenta computacional será utilizado o software Ansys® 6.0.

Deseja-se obter as primeiras frequências naturais de uma determinada placa além da sua resposta harmônica em nós predefinidos da malha, estes resultados propiciarão uma análise da sensibilidade na resposta dinâmica à variação angular das camadas da placa em relação ao sistema referencial de eixos.

Outra parte da análise dinâmica que permite uma melhor compreensão no que diz respeito ao amortecimento histerético inerente ao material compósito é a resposta transiente da estrutura, na presente abordagem devido a uma excitação na forma de impacto.

No que diz respeito a análise estática, procura-se obter a configuração do estado de tensões e deformação nos laminados, uma vez que de acordo com a teoria clássica, o campo de tensões é descontínuo, isso devido às diferentes propriedades do material ao longo da sequência de empilhamento, sendo que o campo de deformações permanece contínuo, razão pela qual é garantida a integridade da estrutura.

3-MATERIAIS COMPÓSITOS

Um material compósito é uma mistura de dois ou mais materiais que diferem em forma e composição química e são essencialmente insolúveis um no outro produzindo assim propriedades muitas vezes mais interessantes do que um único material. Ser capaz de prever as propriedades de um composto, dadas as propriedades dos componentes e seu arranjo geométrico, onde as propriedades mecânicas podem ser expressas para esse tipo de material devido ao conceito de homogeneização. Essas propriedades são determinadas a partir de um elemento de volume representativo, sendo este volume representado por V .

Impondo as condições de tensões e deformações na fronteira do elemento de volume, a tensão e a deformação médias são definidas por:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}(X_k) dV \quad (1)$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}(X_k) dV \quad (2)$$

onde X_k e dV são respectivamente o ponto e o elemento de volume.

Definindo C_{ijkl} e S_{ijkl} como matrizes de rigidez e flexibilidade, respectivamente, as relações entre tensão e deformação são dadas por:

$$\bar{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (3)$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = S_{ijkl} \cdot \sigma_{kl} \quad (4)$$

4-MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADO A PLACAS

Na formulação via MEF, os graus de liberdade utilizados nos nós são três, um dizendo respeito ao deslocamento e dois as rotações entre eixos, logo será utilizado um elemento retangular para a obtenção das matrizes de massa e rigidez, adequadamente escolhido devido a geometria da estrutura.

Segundo o elemento e o número de graus de liberdade, o elemento nodal será um vetor de dimensão doze e terá a seguinte forma:

$$w = [w_1 \ \theta_{\varepsilon 1} \ \theta_{\eta 1} \ w_2 \ \theta_{\varepsilon 2} \ \theta_{\eta 2} \dots \theta_{\eta 4}]^T \quad (5)$$

As relações entre a translação e as rotações em termos de coordenadas naturais fica definida por:

$$\begin{aligned} \theta_{\varepsilon} &= \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \theta_{\eta} &= -\frac{\partial w}{\partial \varepsilon} \end{aligned} \quad (6 \text{ a.b})$$

Derivando a função de interpolação $\phi(\varepsilon, \eta)$, o que permite o processo usual aplicado no método, tem-se como uma boa escolha para este caso, o polinômio descrito por:

$$\begin{aligned} \phi(\varepsilon, \eta) &= c_{i1} + c_{i2}\varepsilon + c_{i3}\eta + c_{i4}\varepsilon^2 + c_{i5}\varepsilon\eta + c_{i6}\eta^2 + c_{i7}\varepsilon^3 + \dots \\ &\dots + c_{i8}\varepsilon^2\eta + c_{i9}\varepsilon\eta^2 + c_{i10}\eta^3 + c_{i11}\varepsilon^3\eta + c_{i12}\varepsilon\eta^3 \\ i &= 1 \dots 12 \end{aligned} \quad (7)$$

O deslocamento fica definido pela seguinte relação:

$$W(\varepsilon, \eta) = \phi^T w \quad (8)$$

Assim, as matrizes de rigidez e massa são obtidas a partir da equação da energia do sistema, ou seja:

$$U = \int_{A_j} D_E \left\{ (\nabla^2 W)^2 + (1-\nu) \left[2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] \right\} dA_j \quad (9)$$

onde D_E representa a variável de rigidez à flexão da placa:

$$D_E = \int_{A_j} m W^2 dx dy \quad (10)$$

Realizando uma transformação em termos das coordenadas naturais (x_j, y_j) obtém-se as seguintes relações:

$$\begin{aligned} x &= x_j + a\varepsilon \\ y &= y_j + b\eta \end{aligned} \quad (11)$$

Assim, substituindo as expressões da Eq.11 na Eq.10 e efetuando as devidas operações se obtém as matrizes de massa M_j e rigidez K_j para a placa.

$$K_j = ab \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 D_{Ej} \left\{ \left(\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varepsilon^2} + \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} \right) \left(\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \phi^T}{\partial \varepsilon^2} + \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 \phi^T}{\partial \eta^2} \right) \right\} + \dots$$

$$\left\{ \frac{1-\nu}{a^2 b^2} \left[2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varepsilon \partial \eta} \frac{\partial^2 \phi^T}{\partial \varepsilon \partial \eta} - \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varepsilon^2} \frac{\partial^2 \phi^T}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 \phi^T}{\partial \varepsilon^2} \right) \right] \right\} d\varepsilon d\eta \quad (12)$$

$$M_j = ab \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 m_j \phi \phi^T d\varepsilon d\eta \quad (13)$$

5-FUNDAMENTOS DE ANÁLISE MODAL, HARMÔNICA E TRANSIENTE

A determinação das frequências naturais não amortecidas e modos de vibrar de um sistema, é obtida a partir da solução da equação que descreve o movimento para uma estrutura não amortecida, dada por:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{0\} \quad (14)$$

Para um sistema linear, as vibrações serão de forma harmônica, descritas por:

$$\{u\} = \{\phi\}_i \cos\{\phi\}_i \cos \omega_i t \quad (15)$$

onde:

$\{\phi\}_i$ representa o autovetor do modo de vibrar da i-ésima frequência natural;
 ω_i é a i-ésima frequência natural circular (radianos por unidade de tempo) e t o tempo.

Assim, a Eq.14 pode ser reescrita na seguinte forma:

$$(-\omega_i^2 [M] + [K])\{\phi\}_i = \{0\} \quad (16)$$

Essa desigualdade é satisfeita para as seguintes soluções:

$$\{\phi\}_i = \{0\} \quad \text{ou} \quad \det(-\omega_i^2 [M] + [K]) = 0 \quad (17)$$

Como a primeira opção é a trivial, se opta pela segunda, de forma que a solução é dada por:

$$|-\omega_i^2 [M] + [K]| = \{0\} \quad (18)$$

A solução da Eq.18 representa um problema de autovalor, o qual pode ser resolvido para n valores de ω^2 e n autovetores, onde n é o número de graus de liberdade.

A FRF, função resposta em frequência, geralmente traduz o comportamento do sistema dentro de uma certa faixa de frequências. Os picos na maioria dos casos são traduzidos como as frequências naturais do sistema, o que possibilita ao projetista análises referentes a faixas de utilização de determinados equipamentos.

A análise transiente é feita a partir de uma resposta da amplitude de vibração no tempo, o que confere ao projetista uma sensibilidade no que diz respeito ao amortecimento do sistema.

6-ESPECIFICAÇÃO DO MATERIAL COMPÓSITO E DA ESTRUTURA ANALISADA

Utilizou-se um composto de S-Glass/Epoxy, formado por quatro camadas com a seguinte seqüência: $[0, 45]_{2s}$ com as dimensões definidas pela Fig.1.

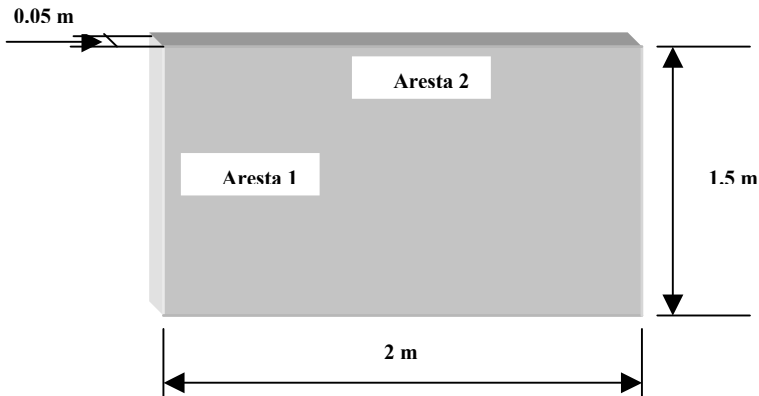


Figura 1

7-ANÁLISE ESTATICA DA PLACA

O principal propósito da análise estática de placas foi o estudo da resposta da estrutura a um dado carregamento, para que essa forneça ao projetista informações sobre a influência da seqüência de empilhamento e do alinhamento das camadas com o seu respectivo eixo de referência.

O campo de tensões e de deformações apresentam particularidades que podem ser evidenciadas para cada camada. Considerando que o material continuará íntegro ao longo do carregamento, fica claro que o campo de deformações é contínuo na interface das camadas, entretanto, como as camadas podem apresentar direções preferenciais e serem fabricadas a partir de materiais distintos, o campo de tensões se mostra descontínuo nas interfaces.

O experimento numérico realizado utilizou como condições de contorno o engastamento das arestas 1 e 2, ver Fig.1, e como carregamento uma pressão de -5 KPa sob toda a superfície da placa. Os resultados obtidos estão indicados nas Figs. 2, 3, 4 e 5.

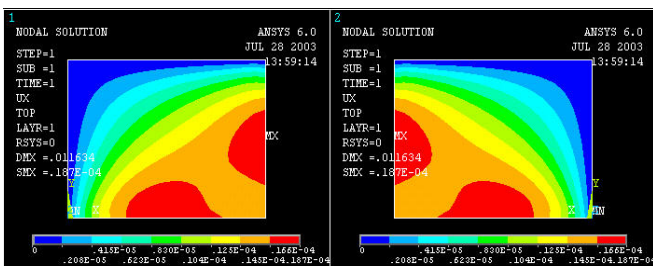


Figura 2- Campo de deformações Ux camada 1

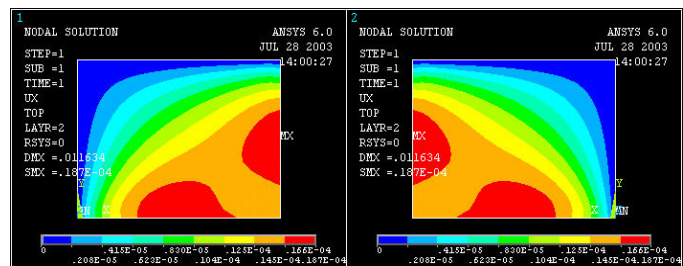


Figura 3- Campo de deformações Ux camada 2

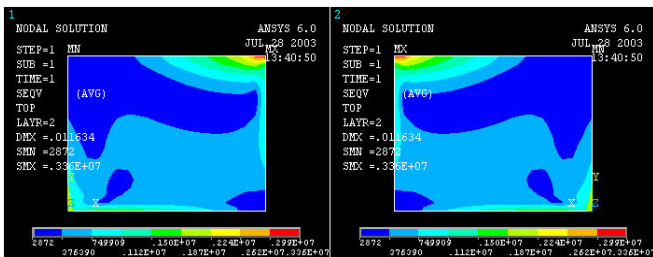


Figura 4- Campo de tensões V. Mises camada 1

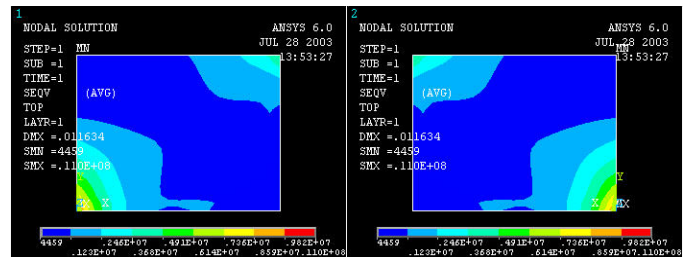


Figura 5- Campo de tensões V. Mises camada 2

8-ANÁLISE DINÂMICA DA PLACA

Uma grande vantagem apresentada por estruturas fabricadas a partir de materiais compósitos é a sua grande versatilidade no que diz respeito ao seu comportamento dinâmico, o que é de grande importância na confecção de um projeto mecânico.

Se for considerada uma placa fabricada a partir de uma material isotrópico e homogêneo, a única forma de se fazer com que os seus modos de vibrar e suas respectivas frequências naturais sejam alteradas é provocando uma variação na sua geometria, ou na sua massa, ou em suas condições de contorno, isso é claro considerando que o material seja perfeitamente íntegro, pois o dano inserirá alterações em sua rigidez, provocando alterações nas suas características dinâmicas. No que diz respeito aos materiais anisotrópicos, isto não é plenamente aplicado, pois estes podem variar as suas características dinâmicas apenas de acordo com o alinhamento das direções principais das camadas da placa. Outro ponto relevante é no que diz respeito ao amortecimento histerético, que pode ser alterado em função da proporção de fibra e matriz ou do próprio alinhamento das camadas (ver Fig.6).

Outra forma para evidenciar a influência do alinhamento das camadas no comportamento dinâmico é uma análise da FRF aplicada ao mesmo nó da malha de elementos finitos. Para tal análise se utiliza uma malha com 800 elementos e limita-se a uma faixa de frequência que vai de zero a cem hertz. Uma curiosidade que pode ser observada, foi o não aparecimento de algumas frequências naturais dentro desta faixa, assunto que será discutido de forma mais oportuna na conclusão do presente trabalho.

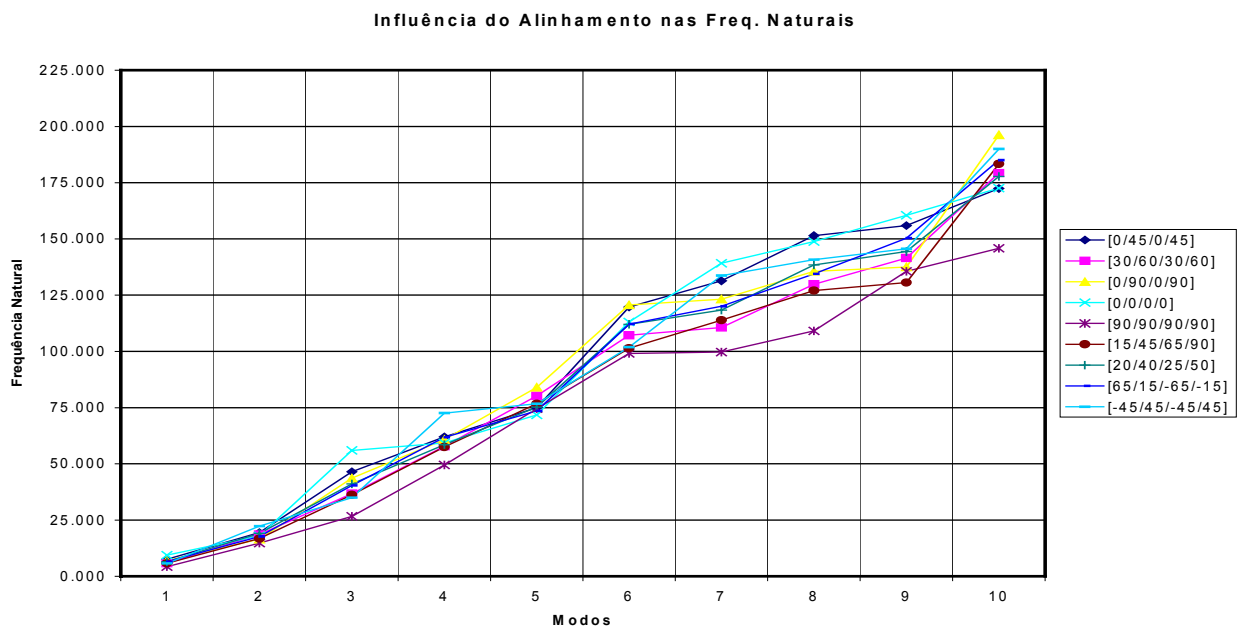


Figura 6- Variação das frequências naturais do sistema

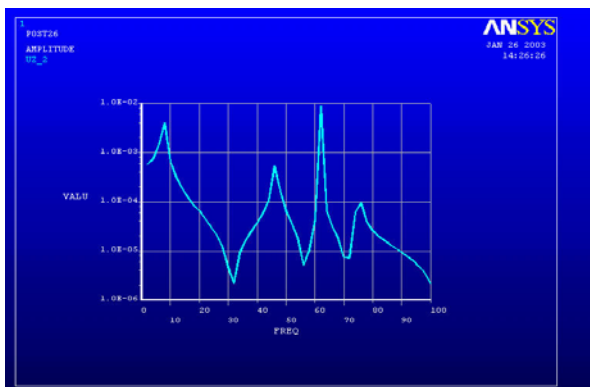


Figura 7- FRF alinhamento [0 / 0 / 0 / 0]

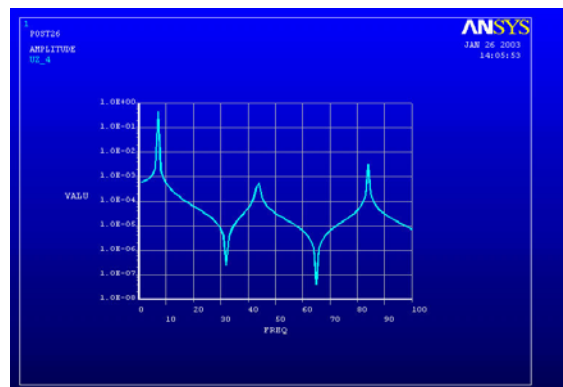


Figura 8- FRF alinhamento [45 / 45 / 45 / 45]

A terceira e última análise realizada sob a placa é a que diz respeito ao seu comportamento vibratório no tempo, essa análise permite uma reflexão sob o comportamento do amortecimento do próprio material. No caso dos materiais compósitos, esse é um fator de extrema relevância, uma vez que o mesmo pode ter o seu coeficiente histerético alterado de acordo com o percentual fibra matriz. Esse tipo de material tem um comportamento viscoelástico ou viscoplástico, o que lhe confere um ciclo histerético com grande capacidade de absorção de energia de deformação, sendo assim, são materiais que possuem um considerável amortecimento.

Foi realizada uma análise a partir da alteração do percentual dos constituintes do compósito (Tab.1). Abaixo será mostrada uma tabela com os respectivos valores dos coeficientes empregados nas análises.

Coef. de amortecimento Histerético	
Percentual fibra x matriz	Coeficiente
40/60	0.22
50/50	0.17

Tabela 1- Coeficiente de amortecimento histerético

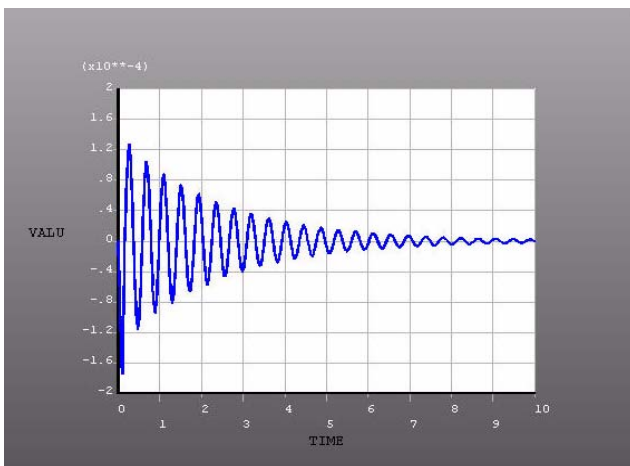


Figura 9- Transiente 0.5/ 0.5

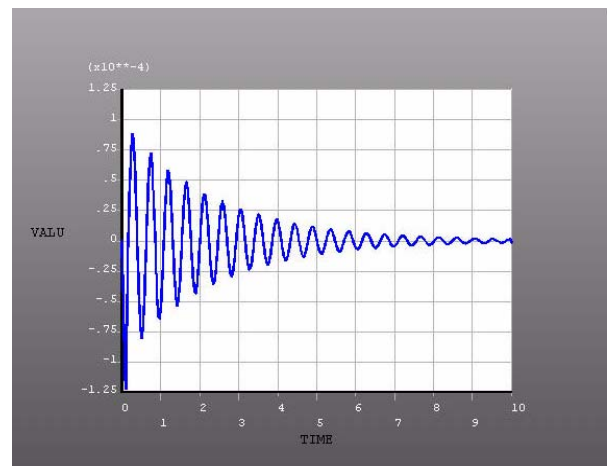


Figura 10- Transiente 0.4/ 0.6

9-CONCLUSÕES

A partir da análise dos resultados obtidos, pode-se concluir que as variações no comportamento estático e dinâmico refletem uma grande flexibilidade no que diz respeito as faixas de utilização do material compósito, entretanto, por uma ótica análoga, essa característica pode se transformar numa grande desvantagem, sendo esta a dificuldade na fabricação de materiais que reproduzam o comportamento esperado.

Pode-se afirmar que dentro da análise estática, tem-se um material que permite ser moldado de acordo com as necessidades da estrutura, ou seja, promovendo o direcionamento dos eixos adequadamente de forma a se obter uma maior resistência do sistema.

No campo da dinâmica, as vibrações de magnitude elevada devem ser evitadas, o que garante a preservação da integridade estrutural. Para tal medida geralmente são utilizados amortecedores ou um monitoramento das frequências naturais. No que é tocante ao amortecimento, é sabido que o material compósito, geralmente constituído por fibra e matriz, tem um comportamento global viscoelástico ou viscoplástico, ou seja, um material que possui um alto amortecimento histerético, dependente da percentagem de fibra x matriz.

Algumas frequências naturais da placa não apareceram para certos alinhamentos de fibra, isso ocorre devido ao fato do ponto onde foi coletada a resposta poder ser mais sensível a determinados modos que a outros, ocultando assim, algumas destas frequências inerentes a estrutura.

Com relação as frequências naturais, estas podem variar de acordo com o alinhamento das camadas, assim sendo, tem-se um material que permite alterar os valores destas frequências sem alterar a sua geometria, suas condições de contorno e até mesmo a massa do componente ou da estrutura propriamente dita.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- YOUNG, W.K. ; BANG, H. - The Finite Element Method using MATLAB. Ed-CRC. London - 1996;
 MEIROVITCH, L.- Principles and Techniques of Vibrations. Ed- Prentice-Hall. USA-1997;
 WHITNEY, J.M. ; DANIEL, I.M. - Experimental Mechanics of Fiber Reinforced Composite Materials. Ed-SEM. USA-1984;
 RADE, R.S.L. ; FERREIRA, N.S.S. - Notas de Aula, Materiais Compósitos, UFU- Uberlândia 2003;
 RADE, D.A. - Notas de Aula, Método dos Elementos Finitos, UFU- Uberlândia- 2003
 STEFFEN, V. - Notas de Aula, Fundamentos de Vibração, UFU- Uberlândia- 2003.

STATIC AND DYNAMIC ANALYSIS OF PLATES MANUFACTURED FROM COMPOSITE MATERIALS USING FINITE ELEMENTS METHOD

Ilvan Porto Pereira Júnior

School of Mechanics Engineering, Federal University of Uberlândia
ippereira@mecanica.ufu.br

Raquel Santini Leandro Rade

School of Physics, Federal University of Uberlândia
rslr@ufu.br

Domingos Alves Rade

School of Mechanics Engineering, Federal University of Uberlândia
domingos@ufu.br

Abstract: *In the present work, it is performed the dynamic and static analyses of plates from composite materials using the finite elements method.*

The ten first natural frequencies of a determined plate are obtained beyond its harmonic and transient response in predefined knots of the mesh. These results will allow sensitivity analysis of the dynamic response to the angular variation of the layers with respect to the referencial system of axes of the plate and a better understanding related to the inherent hysteretic damping of the material, analyzed from the transient response.

Concerning the static analysis, it is observed the configuration of the stress state and strain in the layers. In accordance with plate theory, the stress field is discontinuous, which is due to the different properties of the material along the piling sequence. However, the strain field remains continuous, guaranteeing the structural integrity.

From the analysis of the results, it can be concluded that the variations in the static and dynamic behaviors reflect the great flexibility in the use of composite materials. However, this characteristic can be disadvantageous, which becomes a difficulty in the manufacturing of materials that reproduce the expected behavior.

Key words: *Composite Materials, Static Analysis, Dynamic Analysis*