

MODELAGEM DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DE MECANISMOS FLEXÍVEIS PLANOS CONTENDO AMORTECIMENTO VISCOELÁSTICO

Cleves Mesquita Vaz

Domingos Alves Rade

Antônio Marcos Gonçalves de Lima

Universidade Federal de Uberlândia - UFU

Faculdade de Engenharia Mecânica - FEMEC

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

C. P. 593 - CEP 38400-902 – Uberlândia, MG, Brasil

mesquitav@mecanica.ufu.br ; domingos@ufu.br ; amglima@mecanica.ufu.br

Resumo: *Este trabalho tem por objetivo apresentar o desenvolvimento de uma formulação Lagrangeana para a modelagem do comportamento dinâmico de mecanismos flexíveis planos dotados de amortecimento viscoelástico, levando em consideração as restrições cinemáticas através da técnica dos Multiplicadores de Lagrange. Para a caracterização das deformações dos corpos elásticos é utilizado o Método de Elementos Finitos com base na teoria de vigas de Euler-Bernoulli. Como foco principal do trabalho, é feita a inclusão do comportamento viscoelástico de acordo com o modelo de Golla-Hughes-McTavish (GHM), que baseia-se na introdução de variáveis dissipativas internas.*

Palavras-chave: *Mecanismos Flexíveis, Elementos Finitos, Amortecimento, Viscoelasticidade*

1. INTRODUÇÃO

A pesquisa na área de dinâmica de sistemas de multicorpos tem sido motivada pelo crescente interesse no projeto e simulação do comportamento de estruturas mecânicas industriais, tais como mecanismos geradores/transformadores de movimento, veículos aeroespaciais e robôs (Shigley and Uicker Jr., 1980). Neste contexto, tais sistemas são entendidos como sistemas mecânicos constituídos por conjuntos de componentes rígidos e/ou flexíveis interconectados (Beer and Johnston, 1996). Na maioria das vezes, os movimentos destes componentes são cinematicamente restringidos devido à existência de diferentes tipos de juntas, sendo caracterizados por grandes deslocamentos lineares e altas rotações. Com o intuito de se criar sistemas mais leves e precisos que estejam sendo operados a altas velocidades, ênfase tem sido dada a caracterização dos efeitos da flexibilidade de seus componentes sobre o comportamento dinâmico do sistema. Nestes casos, técnicas de discretização, tais como o Método de Elementos Finitos (MEF), têm sido empregadas (Shabana, 1998; Damilano, 1993). Em numerosas situações, as oscilações elásticas do mecanismo devem ser controladas passiva ou ativamente, de modo a minimizar o desgaste, a emissão de ruído e a transmissão de vibrações transmitidas (Shabana, 1997). Dentre as estratégias de amortecimento passivo, destaca-se, por sua simplicidade de implementação e eficiência, o uso de materiais dissipadores de energia, tais como os materiais viscoelásticos (Chen and Levy, 1999). Neste contexto, este trabalho visa apresentar o desenvolvimento de uma formulação Lagrangeana para a modelagem do comportamento dinâmico de sistemas de multicorpos, aplicados a mecanismos planos de cadeia fechada, restringidos cinematicamente. As deformações dos corpos elásticos são caracterizadas pelo MEF, com base na teoria de vigas de Euler-Bernoulli (Santos, 2001). O modelo de Golla-Hughes-McTavish (GHM) é usado para a representação do efeito de amortecimento viscoelástico no sistema (Lima, 2003).

2. CINEMÁTICA DO CORPO FLEXÍVEL

2.1 Sistemas de Coordenadas

No estudo de corpos rígidos os deslocamentos internos não são considerados, possibilitando com isso, a descrição da posição absoluta de qualquer ponto do corpo em função de sua posição local e das coordenadas de translação e rotação absolutas de um único sistema referencial, que se encontra rigidamente fixado ao corpo (Mabie and Ocvirk, 1967). Por outro lado, para corpos elásticos, a deformação é considerada, sendo necessário caracterizar os deslocamentos entre pontos do corpo com o auxílio de sistemas de coordenadas adicionais (Ferreira, 1997). Neste trabalho são usados quatro referenciais, como mostra a Fig. (1):

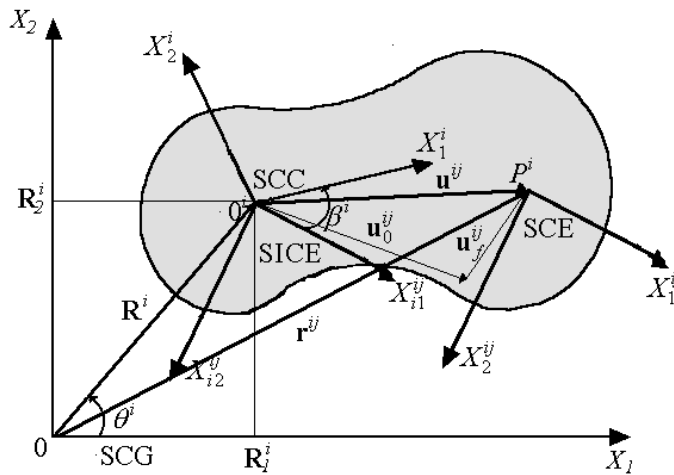


Figura 1: Posição de um ponto arbitrário do elemento j , no corpo i .

Na discretização pelo MEF, um elemento j do corpo flexível i , no sistema de multicorpos apresentará o Sistema de Coordenadas Global (SCG), que é fixo, e os flutuantes, que são: do corpo (SCC), do elemento (SCE) e um sistema intermediário do elemento (SICE), que é paralelo ao SCE.

Assim, o conjunto de *coordenadas generalizadas* do elemento j no corpo i , pode ser escrito da seguinte forma (Shabana, 1998):

$$\mathbf{e}^{ij} = \mathbf{e}_0^{ij} + \mathbf{e}_f^{ij}, \quad (1)$$

onde $\mathbf{e}_f^{ij}$ são as *coordenadas elásticas* de j e $\mathbf{e}_0^{ij}$ representa as coordenadas nodais em seu estado indeformado. Portanto, o *campo de deslocamento* do elemento considerado, no SICE, é definido por $\mathbf{w}_i^{ij}$, onde:

$$\mathbf{w}_i^{ij} = \mathbf{S}^{ij} \mathbf{e}_i^{ij}, \quad (2)$$

sendo $\mathbf{S}^{ij}$ é a matriz de *funções de forma* para o elemento j . Para um elemento de viga, segundo a teoria de Euler-Bernoulli a matriz de forma do elemento pode ser dada por:

$$\mathbf{S}^{ij} = \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 1-3\xi^2+2\xi^3 & \ell(\xi-2\xi^2+\xi^3) & 0 & 3\xi^2-2\xi^3 & \ell(\xi^3-\xi^2) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

onde ξ é a razão adimensional entre a coordenada axial do ponto, na configuração não-deformada do elemento e ℓ , que é o comprimento do elemento j .

A orientação do SCE com relação ao SCC é definida pela matriz de transformação $\mathbf{C}^{ij}$, que é representada por:

$$\mathbf{C}^{ij} = \begin{bmatrix} \cos \beta^{ij} & -\sin \beta^{ij} \\ \sin \beta^{ij} & \cos \beta^{ij} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

onde β^{ij} é o ângulo de orientação do elemento, entre os sistemas SICE e SCC.

A matriz de *rotação* $\mathbf{C}^{ij}$ é empregada para definir o campo de deslocamentos em relação ao sistema de coordenadas do corpo, isto é:

$$\bar{\mathbf{u}}^{ij} = \mathbf{C}^{ij} \mathbf{w}_i^{ij} \quad (5)$$

As condições de compatibilidade entre os elementos do corpo são simplificadas se as coordenadas nodais forem expressas com relação ao SCC, ou seja:

$$\mathbf{e}_i^{ij} = \bar{\mathbf{C}}^{ij} \mathbf{e}^{ij}, \quad (6)$$

onde:

$$\bar{\mathbf{C}}^{ij} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_1^{ij} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{C}}_1^{ij} \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{C}}_1^{ij} = \begin{bmatrix} \cos \beta^{ij} & \sin \beta^{ij} & 0 \\ -\sin \beta^{ij} & \cos \beta^{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Com isso, pode-se escrever:

$$\bar{\mathbf{u}}^{ij} = \bar{\mathbf{N}}^{ij} \mathbf{q}_n^{ij}, \quad (8)$$

onde $\bar{\mathbf{N}}^{ij} = \mathbf{C}^{ij} \mathbf{S}^{ij} \bar{\mathbf{C}}^{ij}$ e $\mathbf{q}_n^{ij}$ representa o vetor de coordenadas nodais generalizadas de j , no corpo i .

2.2 Condições de Conectividade e Referência

O vetor de coordenadas generalizadas $\mathbf{q}_n^{ij}$, do elemento j , situado no corpo i , pode ser escrito da seguinte forma no SCC:

$$\mathbf{q}_n^{ij} = \mathbf{B}_1^{ij} \mathbf{q}_n^i, \quad (9)$$

onde $\mathbf{B}_1^{ij}$ é uma *matriz de transformação Booleana* constante, cuja utilidade é a conectividade entre dois elementos do corpo. Logo, o campo de deslocamentos, em relação ao SCC, ficará:

$$\bar{\mathbf{u}}^{ij} = \mathbf{N}^{ij} \mathbf{q}_n^i, \quad (10)$$

sendo $\mathbf{N}^{ij} = \mathbf{C}^{ij} \mathbf{S}^{ij} \overline{\mathbf{C}}^{ij} \mathbf{B}_1^{ij}$.

Por outro lado, devem ser impostas condições de referências para o corpo considerado, objetivando a eliminação dos modos de corpo rígido (Ferreira, 1997). Na formulação apresentada este procedimento é feito pela introdução de uma matriz de transformação $\mathbf{B}_2^i$, que expressa o bloqueio de alguns graus de liberdade do contorno, sendo incluída no equacionamento da seguinte maneira:

$$\mathbf{q}_n^i = \mathbf{q}_0^i + \overline{\mathbf{q}}_f^i = \mathbf{q}_0^i + \mathbf{B}_2^i \mathbf{q}_f^i, \quad (11)$$

Com isso, o campo de deslocamentos assume a seguinte forma:

$$\overline{\mathbf{u}}^{ij} = \mathbf{N}^{ij} (\mathbf{q}_0^i + \mathbf{B}_2^i \mathbf{q}_f^i) \quad (12)$$

Introduzindo as coordenadas de referência $\mathbf{q}_r^i = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{iT} & \theta^{iT} \end{bmatrix}^T$, que descrevem a localização da origem O^i , bem como a orientação do corpo de referência, define-se a posição de um ponto arbitrário situado no elemento j , do corpo i , por:

$$\mathbf{r}^{ij} = \mathbf{R}^i + \mathbf{A}^i \overline{\mathbf{u}}^{ij}, \quad (13)$$

em que $\mathbf{A}^i$ é a matriz de rotação de transformação de coordenadas do corpo para o referencial global; sendo assim, a Eq. (13) pode ser descrita por:

$$\mathbf{r}^{ij} = \mathbf{R}^i + \mathbf{A}^i \mathbf{N}^{ij} (\mathbf{q}_0^i + \mathbf{B}_2^i \mathbf{q}_f^i) \quad (14)$$

3. MATRIZES DE MASSA E RIGIDEZ ELEMENTARES

A velocidade para um ponto arbitrário P é obtida pela diferenciação da Eq. (14) em relação ao tempo:

$$\dot{\mathbf{r}}^{ij} = \dot{\mathbf{R}}^i + \dot{\mathbf{A}}^i \mathbf{N}^{ij} (\mathbf{q}_0^i + \mathbf{B}_2^i \mathbf{q}_f^i) + \mathbf{A}^i \mathbf{N}^{ij} \mathbf{B}_2^i \dot{\mathbf{q}}_f^i \quad (15)$$

Usando o fato de que $\dot{\mathbf{A}}^i = \dot{\theta}^i \mathbf{A}_\theta^i$, pode-se reescrever a Eq. (15):

$$\dot{\mathbf{r}}^{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}_\theta^i \mathbf{N}^{ij} \mathbf{q}_n^i & \mathbf{A}^i \mathbf{N}^{ij} \mathbf{B}_2^i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}}^i \\ \dot{\theta}^i \\ \dot{\mathbf{q}}_f^i \end{bmatrix} \quad (16)$$

3.1 Matriz de Massa Elementar

A energia cinética para o elemento j , é dada por:

$$T^{ij} = \frac{1}{2} \int_{V^{ij}} \rho^{ij} \dot{\mathbf{r}}^{ijT} \dot{\mathbf{r}}^{ij} dV^{ij} \quad (17)$$

Assim, a Eq. (17) poderá ser expressa da seguinte maneira:

$$T^{ij} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^{ijT} \mathbf{M}^{ij} \dot{\mathbf{q}}^{ij}, \quad (18)$$

onde $\mathbf{M}^{ij}$ é a *matriz de inércia elementar*, dada por:

$$\mathbf{M}^{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{RR}^{ij} & \mathbf{m}_{R\theta}^{ij} & \mathbf{m}_{Rf}^{ij} \\ & \mathbf{m}_{\theta\theta}^{ij} & \mathbf{m}_{\theta f}^{ij} \\ sim. & & \mathbf{m}_{ff}^{ij} \end{bmatrix} \quad (19)$$

O detalhamento das submatrizes figurando em (19) pode ser encontradas em Shabana ,1998.

3.2 Matriz de Rigidez Elementar

O *trabalho virtual* realizado pelas forças elásticas para o elemento j é dado por:

$$\delta W_S^{ij} = - \int_{V^{ij}} \sigma^{ijT} \delta \varepsilon^{ij} dV^{ij}, \quad (20)$$

onde σ^{ij} e ε^{ij} são, respectivamente, os vetores de *tensão* e *deformação* do elemento j . Utilizando a equação constitutiva e escrevendo a deformação em função do campo de deslocamentos, tem-se as seguintes relações: $\sigma^{ij} = \mathbf{E}^{ij} \varepsilon^{ij}$ e $\varepsilon^{ij} = \mathbf{D}^{ij} \mathbf{C}^{ij} \mathbf{S}^{ij} \bar{\mathbf{C}}^{ij} \mathbf{B}_1^{ij} \mathbf{B}_2^i \mathbf{q}_f^i$, onde $\mathbf{E}^{ij}$ é a matriz de coeficientes elásticos e $\mathbf{D}^{ij}$ é um operador diferencial. Assim, pode-se escrever:

$$\delta W_S^{ij} = - \mathbf{q}_f^i T \mathbf{k}_{ff}^{ij} \delta \mathbf{q}_f^i \quad (21)$$

Portanto, a matriz de rigidez elementar será dada por:

$$\mathbf{K}^{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{ff}^{ij} \end{bmatrix} \quad (22)$$

A submatriz $\mathbf{k}_{ff}^{ij}$ encontrada em (21), é detalhada por Shabana ,1998.

3.3 Matriz de Amortecimento Viscoso

A *matriz de amortecimento elementar* $\mathbf{C}_v^{ij}$ será admitida proporcional às matrizes de massa e rigidez e será expressa por:

$$\mathbf{C}_v^{ij} = \mu_1 \mathbf{M}^{ij} + \mu_2 \mathbf{K}^{ij}, \quad (23)$$

onde μ_1 e μ_2 são os coeficientes de proporcionalidade chamados de *números de Rayleigh*.

3.4 Vetores de Forças Externas Generalizadas

Os vetores de *forças externas* e de *velocidades quadráticas* também podem obtidos pela aplicação da definição do trabalho virtual e, decompostos em função das coordenadas generalizadas de translação, rotação e elásticas, conforme podem ser vistos à seguir:

$$\mathbf{Qe}^{ij} = [\mathbf{Qe}_R^{ij} \quad \mathbf{Qe}_\theta^{ij} \quad \mathbf{Qe}_f^{ij}]^T \quad \text{e} \quad \mathbf{Qv}^{ij} = [\mathbf{Qv}_R^{ij} \quad \mathbf{Qv}_\theta^{ij} \quad \mathbf{Qv}_f^{ij}]^T \quad (24)$$

No que se segue, será omitido o índice j para as matrizes de massa, rigidez e amortecimento, bem como para os vetores de forças externas, uma vez que a formulação para o corpo i é consistente com as equações elementares apresentadas até este ponto.

3.5 Restrições Cinemáticas

As restrições cinemáticas são expressas por equações algébricas não lineares, que dependem das coordenadas generalizadas do corpo e, eventualmente, do tempo, e são escritas sob a seguinte forma vetorial:

$$\Phi(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0} \quad (25)$$

A derivada do vetor Φ , em relação às coordenadas generalizadas é representada pela matriz $\Phi_{\mathbf{q}}$ e é conhecida como *matriz jacobiana de restrição* e será introduzida no equacionamento da dinâmica dos sistemas de multicorpos.

4. EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

O trabalho virtual das forças que atuam no corpo i é dado por: $\delta W^i = \delta W_S^i + \delta W_e^i$, onde δW_S^i é devido às forças elásticas e δW_e^i é resultante das forças externas que estão sendo aplicadas em i . Estas expressões podem ser dadas por:

$$\delta W^i = \mathbf{Q}^{iT} \delta \mathbf{q}^i; \quad \delta W_S^i = -\mathbf{q}^{iT} \mathbf{K}^i \delta \mathbf{q}^i; \quad \delta W_e^i = \mathbf{Qe}^{iT} \delta \mathbf{q}^i, \quad (26)$$

onde $\mathbf{Q}^i$ é o vetor de forças generalizadas associadas às coordenadas do corpo i . Assim:

$$\mathbf{Q}^i = -\mathbf{K}^i \mathbf{q}^i + \mathbf{Qe}^i \quad (27)$$

As *Equações de Lagrange*, para o corpo i , no sistema de multicorpos são dadas por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^i}{\partial \dot{\mathbf{q}}^i} \right)^T - \left(\frac{\partial T^i}{\partial \mathbf{q}^i} \right)^T + \Phi_{\mathbf{q}}^T \lambda = \mathbf{Q}^i, \quad (28)$$

em que λ é o vetor dos *Multiplicadores de Lagrange*. Logo, teremos:

$$\mathbf{M}^i \ddot{\mathbf{q}}^i + \mathbf{K}^i \mathbf{q}^i + \Phi_{\mathbf{q}}^T \lambda = \mathbf{Qe}^i + \mathbf{Qv}^i \quad (29)$$

A matriz de amortecimento viscoso é incorporada no modelo descrito pela Eq. (29), que pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathbf{M}^i \ddot{\mathbf{q}}^i + \mathbf{C}_v^i \dot{\mathbf{q}}^i + \mathbf{K}^i \mathbf{q}^i + \Phi_q^T \lambda = \mathbf{Qe}^i + \mathbf{Qv}^i, \quad (30)$$

que são as equações do movimento para o sistema amortecido (Shabana, 1998).

5. INCLUSÃO DO EFEITO VISCOELÁSTICO NA FORMULAÇÃO

A matriz de rigidez pode ser fatorada da seguinte forma: $\mathbf{K}^i = E^i(s) \bar{\mathbf{K}}^i$, onde $E^i(s)$ é a *função módulo* do material viscoelástico, que é uma função complexa que traduz a dependência da rigidez e do amortecimento em relação à frequência (Chen and Levy, 1999).

Para o *modelo de Golla-Hughes-McTavish* (GHM), a função módulo é representada por:

$$E^i(s) = E_R^i \left[1 + \sum_{i=1}^{N_G} \alpha_i \frac{s^2 + 2\zeta_i \omega_i s}{s^2 + 2\zeta_i \omega_i s + \omega_i^2} \right], \quad (31)$$

onde: E_R^i é *módulo estático* do material; α_i , ζ_i e ω_i são parâmetros reais específicos do material viscoelástico e N_G é o número de coordenadas dissipativas do sistema (Lima, 2003). Escrevendo o somatório da Eq. (31) numa forma simplificada, temos:

$$E^i(s) = E_R^i (1 + \bar{E}^i) \quad (32)$$

Substituindo a Eq. (32) na Eq. (30), teremos:

$$\mathbf{M}^i \ddot{\mathbf{q}}^i + \mathbf{C}_v^i \dot{\mathbf{q}}^i + E_R^i \bar{\mathbf{K}}^i \mathbf{q}^i + E_R^i \bar{E}^i \bar{\mathbf{K}}^i \mathbf{q}^i + \Phi_q^T \lambda = \mathbf{Qe}^i + \mathbf{Qv}^i, \quad (33)$$

Fazendo $\mathbf{K}_v^{0i} = E_R^i \bar{\mathbf{K}}^i$, obtém-se:

$$\mathbf{M}^i \ddot{\mathbf{q}}^i + \mathbf{C}_v^i \dot{\mathbf{q}}^i + \mathbf{K}_v^{0i} \mathbf{q}^i + \bar{E}^i \mathbf{K}_v^{0i} \mathbf{q}^i + \Phi_q^T \lambda = \mathbf{Qe}^i + \mathbf{Qv}^i, \quad (34)$$

No modelo GHM, as coordenadas dissipativas estão relacionadas às variáveis elásticas através da equação:

$$\mathbf{q}_i^{Gi}(s) = \left(\frac{\omega_i^2}{s^2 + 2\zeta_i \omega_i s + \omega_i^2} \right) \cdot \mathbf{q}^i \quad (35)$$

Com isso, a Eq. (34) poderá ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{M}^i \ddot{\mathbf{q}}^i + \mathbf{C}_v^i \dot{\mathbf{q}}^i + \mathbf{K}_v^{0i} (1 + \alpha_i) \mathbf{q}^i - \mathbf{K}_v^{0i} \alpha_i \mathbf{q}_i^{Gi}(s) + \Phi_q^T \lambda = \mathbf{Qe}^i + \mathbf{Qv}^i, \quad (36)$$

Fazendo a substituição $\mathbf{K}_v^{\infty i} = \mathbf{K}_v^{0i} (1 + \alpha_i)$ têm-se:

$$\mathbf{M}^i \ddot{\mathbf{q}}^i + \mathbf{C}_v^i \dot{\mathbf{q}}^i + \mathbf{K}_v^{\infty i} \mathbf{q}^i - \alpha_i \mathbf{K}_v^{0i} \mathbf{q}_i^{Gi}(s) + \Phi_q^T \lambda = \mathbf{Q} \mathbf{e}^i + \mathbf{Q} \mathbf{v}^i \quad (37)$$

Passando a Eq. (37) para o *domínio de Laplace* escreve-se:

$$(s^2 \mathbf{M}^i + s \mathbf{C}_v^i + \mathbf{K}_v^{\infty i}) \mathbf{q}^i - \alpha_i \mathbf{K}_v^{0i} \mathbf{q}_i^{Gi} + \Phi_q^T \lambda = \mathbf{Q} \mathbf{e}^i + \mathbf{Q} \mathbf{v}^i \quad (38)$$

Combinando as Eqs. (35) e (38) e retornando ao domínio do tempo chega-se ao sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{M}^i \ddot{\mathbf{q}}^i + \mathbf{C}_v^i \dot{\mathbf{q}}^i + \mathbf{K}_v^{\infty i} \mathbf{q}^i - \alpha_i \mathbf{K}_v^{0i} \mathbf{q}_i^{Gi}(s) + \Phi_q^T \lambda = \mathbf{Q} \mathbf{e}^i + \mathbf{Q} \mathbf{v}^i \\ \frac{\alpha_i}{\omega_i^2} \mathbf{K}_v^{0i} \ddot{\mathbf{q}}_i^{Gi} + 2 \frac{\alpha_i \zeta_i}{\omega_i} \mathbf{K}_v^{0i} \dot{\mathbf{q}}_i^{Gi} + \alpha_i \mathbf{K}_v^{0i} \mathbf{q}_i^{Gi} - \alpha_i \mathbf{K}_v^{0i} \mathbf{q}^i = \mathbf{0} \end{cases} \quad (39)$$

O sistema acima pode ser escrito na seguinte forma matricial:

$$\mathbf{M}_G \ddot{\mathbf{q}}_G + \mathbf{C}_G \dot{\mathbf{q}}_G + \mathbf{K}_G \mathbf{q}_G = \mathbf{F}_G, \quad (40)$$

onde:

$$\mathbf{M}_G = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^i & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\alpha_1 \mathbf{K}_v^{0i}}{\omega_1^2} & \mathbf{0} & \vdots \\ \vdots & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \frac{\alpha_{N_G} \mathbf{K}_v^{0i}}{\omega_{N_G}^2} \end{bmatrix}; \mathbf{C}_G = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_v^i & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{2\alpha_1 \zeta_1 \mathbf{K}_v^{0i}}{\omega_1} & \mathbf{0} & \vdots \\ \vdots & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \frac{2\alpha_{N_G} \zeta_{N_G} \mathbf{K}_v^{0i}}{\omega_{N_G}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_G = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_v^{\infty i} & -\alpha_1 \mathbf{K}_v^{0i} & \dots & -\alpha_{N_G} \mathbf{K}_v^{0i} \\ -\alpha_1 \mathbf{K}_v^{0iT} & \alpha_1 \mathbf{K}_v^{0i} & \mathbf{0} & \vdots \\ \vdots & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ -\alpha_{N_G} \mathbf{K}_v^{0iT} & \dots & \mathbf{0} & \alpha_{N_G} \mathbf{K}_v^{0i} \end{bmatrix}; \mathbf{F}_G = \begin{bmatrix} (\mathbf{Q} \mathbf{e}^i + \mathbf{Q} \mathbf{v}^i - \Phi_q^T \lambda)^T \\ \mathbf{0}^T \\ \vdots \\ \mathbf{0}^T \end{bmatrix}; \mathbf{q}_G = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^{iT} \\ \mathbf{q}_1^{GiT} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{N_G}^{GiT} \end{bmatrix}$$

A Eq. (40) representa o sistema equações do movimento para um modelo de multicorpos, com componentes flexíveis, considerando-se o amortecimento viscoelástico.

6. RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

O sistema algébrico-diferencial, formado pelas equações aumentadas do movimento (Eq. (40)) e pela segunda derivada das equações de restrições cinemáticas (Eq. (25)), representa, na forma matricial, o sistema de multicorpos amortecido, restringido por juntas cinemáticas e é dado pela seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_G & \Phi_{q_G}^T \\ \Phi_{q_G} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_G \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}\mathbf{e} + \mathbf{Q}\mathbf{v} - \mathbf{C}_G \dot{\mathbf{q}}_G - \mathbf{K}_G \mathbf{q}_G \\ -\Phi_{tt} - \left(\left(\Phi_{q_G} \dot{\mathbf{q}}_G \right)_{q_G} + 2\Phi_{q_G t} \right) \dot{\mathbf{q}}_G \end{bmatrix}, \quad (41)$$

a partir do qual pode-se calcular o vetor dos *multiplicadores de Lagrange*, bem como o vetor de *aceleração generalizada* para um dado conjunto de condições iniciais de deslocamentos e velocidades.

Encontrado o vetor λ , as equações do movimento podem ser colocadas na seguinte forma:

$$\mathbf{M}_G \ddot{\mathbf{q}}_G + \mathbf{C}_G \dot{\mathbf{q}}_G = -\mathbf{K}_G \mathbf{q}_G + \mathbf{Q}^*, \quad (42)$$

onde $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}\mathbf{e} + \mathbf{Q}\mathbf{v} - \Phi_{q_G}^T \lambda$. Acrescentando a equação $\mathbf{M}_G \dot{\mathbf{q}}_G = \mathbf{M}_G \dot{\mathbf{q}}_G$, chega-se à forma matricial abaixo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_G & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_G & \mathbf{M}_G \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_G \\ \ddot{\mathbf{q}}_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M}_G \\ -\mathbf{K}_G & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{q}_G \\ \dot{\mathbf{q}}_G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^* \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (46)$$

Dada uma condição inicial para o vetor $[\mathbf{q}_G \quad \dot{\mathbf{q}}_G]^T$ é possível, através de um processo de integração numérica, encontrar o vetor $[\mathbf{q}_G \quad \ddot{\mathbf{q}}_G]^T$. Neste o caso, o algoritmo de *Runge-Kutta de quarta ordem* tem sido usado com sucesso na maioria dos trabalhos encontrados na literatura.

7. CONCLUSÕES

Foi desenvolvida a formulação lagrangeana para a modelagem de sistemas de multicorpos hídridos (rígidos/flexíveis), bidimensionais, de acordo com a Teoria de Viga de Euler-Bernoulli, sujeitos a restrições cinemáticas, sendo obtidas as equações algébrico-diferenciais do movimento não lineares. Na formulação, buscou-se evidenciar a natureza dos sistemas de referência e das coordenadas generalizadas empregadas para a representação da posição instantânea dos corpos do sistema. A discretização dos corpos é feita com o Método de Elementos Finitos, explicitando a influência das coordenadas generalizadas elásticas na dinâmica de multicorpos. Foi introduzido na formulação o efeito viscoelástico de amortecimento, segundo o modelo de Golla-Hughes-McTavish, evidenciando-se que tal modelo permite obter as equações do movimento na forma usual de equações de segunda ordem, sendo caracterizado pelo aumento da dimensão do sistema de equações do movimento, como resultado da inclusão de variáveis internas dissipativas. Para a integração das equações do movimento é sugerido o método de Runge-Kutta.

8. REFERÊNCIAS

- Bauchau, O.A., 1998, "Computational Schemes for Flexible, Nonlinear Multi-Body Systems", *Multibody System Dynamics*, Vol. 2, pp. 169-225.
- Beer, F. and Johnston Jr., E. R., 1996, "Mecânica Vetorial para Engenheiros – Dinâmica", 5^a Edição, Makron Books, Rio de Janeiro.
- Burden, R. L. and Faires, J. D., 2003, "Análise Numérica", Thomson Learning. São Paulo.
- Chen, Q., and Levy, C., 1999, "Vibration Analysis and Control of Flexible Beam by using Smart Damping Structures", Elsevier Science Ltd., *Composites - Part B*, 30: Engineering, pp. 395-406.
- Ferreira, A. M., 1997, "Análise Dinâmica de Mecanismos Flexíveis Planos", Dissertação de Mestrado, IME – Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro.

- Lima, A. M. G., 2003, “Modelagem Numérica e Avaliação Experimental de Materiais Viscoelásticos Aplicados ao Controle Passivo de Vibrações Mecânicas”, Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia.
- Mabie, H.H. and Ocvirk, F.W., 1967, “Mecanismos e Dinâmica das Máquinas”, LTU, Rio de Janeiro, Brasil.
- Santos, I.F., 2001, “Dinâmica de Sistemas Mecânicos – Modelagem, Simulação, Visualização e Verificação”, Makron Books.
- Shabana, A.A., 1998, “Dynamic of Multibody Systems”, Cambridge University Press, New York
- Shabana, A.A., 1997, “Flexible Multibody Dynamics: Review of Past and Recent Developments”, Multibody System Dynamics, Vol. 1, pp. 189-222.
- Shigley, J.E. and Uicker Jr., J.J., 1980, “Theory of Machines and Mechanisms”, McGraw-Hill Books, New York.

9. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

MODELING OF THE DYNAMIC BEHAVIOR OF FLEXIBLE TWO-DIMENSIONAL MECHANISMS FEATURING VISCOELASTIC DAMPING

Cleves Mesquita Vaz

Domingos Alves Rade

Antônio Marcos Gonçalves de Lima

Federal University of Uberlândia

School of Mechanical Engineering

P. O. Box 593 - CEP 38400-902 - Uberlândia, MG, Brazil

mesquitav@mecanica.ufu.br ; domingos@ufu.br ; amglima@mecanica.ufu.br

Abstract: *In this paper it is presented the development of a Lagrangean formulation for the modeling of the dynamic behavior of two-dimensional flexible mechanisms featuring viscoelastic damping, taking into account the kinematical constraints by using Lagrange multipliers. To characterize the elastic deformations of the compliant bodies, the Finite Element Method is employed. The frequency dependent behavior of the viscoelastic material is characterizes through the Golla-Hughes-McTavish (GHM) model, which is based on the introduction of internal dissipative variables.*

Keywords: *Flexible Mechanisms, Finite Elements, Damping, Viscoelasticity.*