

MÉTODOS DE REDUÇÃO DE MODELOS APLICADOS A SISTEMAS CONTENDO AMORTECIMENTO VISCOELÁSTICO

Antônio Marcos Gonçalves de Lima

Domingos Alves Rade

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica
Campus Santa Monica P. O. BOX 593, CEP. 38400-902, Uberlândia – MG – Brasil
amglima@mecanica.ufu.br; domingos@ufu.br

Resumo: Este trabalho é dedicado ao estudo de procedimentos por elementos finitos de sistemas incorporando materiais viscoelástico, enfocando aspectos importantes relativo às principais técnicas de redução da ordem das matrizes de elementos finitos, permitindo a realização de análises nos domínios da frequência e do tempo. Neste contexto, serão enfocados dois métodos de redução, a saber: o método de redução modal e o método do balanceamento interno modificado. Para computar a dependência em frequência do comportamento do material viscoelástico utilizado nas simulações, será utilizado o modelo de Golla-Hughes-McTavish (GHM). O trabalho está organizado da seguinte forma: comentários introdutórios com relação ao uso de modelos viscoelásticos, bem como dos procedimentos de inclusão nas matrizes de elementos finitos de sistemas dinâmicos, são apresentados. Em seguida, é realizado um estudo dos principais métodos de redução de modelos. Simulações numéricas utilizando estruturas bidimensionais são apresentados para ilustrar os procedimentos de modelagem dos métodos de redução.

Palavras-chave: Materiais Viscoelásticos, Modelagem por Elementos Finitos, Métodos de Redução

1. INTRODUÇÃO

No contexto do uso de controle passivo de vibrações mecânicas, o uso de materiais viscoelásticos tem sido bastante utilizados como uma estratégia conveniente em um grande número de aplicações industriais. Para modelar o comportamento dinâmico de estruturas complexas incorporando amortecimento viscoelástico, procedimentos de elementos finitos têm sido combinados com modelos matemáticos que descrevem o comportamento de dependência das propriedades mecânicas de materiais viscoelásticos com relação à frequência de vibração. Uma classe importante de modelos viscoelásticos, são aquelas baseadas na adição de variáveis internas, também chamadas de variáveis dissipativas para representar o comportamento dinâmico de materiais viscoelásticos, como por exemplo, o modelo dos campos de deslocamentos anelásticos (ADF), proposto por Lesieutre (1992) e o modelo de Golla-Hughes-McTavish (1985; 1993). Em geral, a inclusão de variáveis internas tende a aumentar o número de graus-de-liberdade do sistema global de equações aumentada, comparada com o sistema não-amortecido. Em consequência, a resolução numérica dessas equações pode requerer um grande esforço computacional. Além disso, o aumento na dimensão dos modelos analíticos pode tornar difícil o uso de técnicas de controle ativo. Esta desvantagem no uso desses modelos pode ser contornada pelo uso dos chamados métodos de redução de modelos, que tende a reduzir a ordem das matrizes de elementos finitos do sistema aumentado enquanto preserva a capacidade de representar o comportamento dinâmico do sistema amortecido (Salmanoff, 1997).

Um método bastante simples, mais ainda muito utilizado é o chamado método de condensação estática de Guyan, no qual a redução é feita baseada no particionamento das equações do movimento em termos das coordenadas mestre e escravas. Negligenciando a inércia associada às

coordenadas escravas, somente as coordenadas mestre são mantidas no modelo. Este método de redução é comumente empregado na redução de coordenadas físicas insignificantes como coordenadas de rotações, mas não são aplicados para sistemas contendo amortecimento (Yae and Inman, 1993). Entretanto, esta técnica produz um sistema reduzido contendo coordenadas que são um subconjunto das coordenadas originais do sistema (Lam, 1997).

O método do balanceamento interno, proposto por Moore (1981), é derivado do sistema no espaço de estado. A principal desvantagem deste método é que as coordenadas do sistema reduzido não são um subconjunto das coordenadas do sistema original, produzindo um sistema com coordenadas não físicas (Salmanoff, 1997). Para contornar este problema, Yae and Inman (1993) propuseram uma modificação do método do balanço interno, o qual combina as vantagens desejadas de um sistema reduzido contendo coordenadas como um subconjunto das coordenadas físicas, podendo ser aplicado a sistemas contendo amortecimento.

Outro método de redução que tem sido muito utilizado é o chamado método de redução modal (Trindade *et. al*, 2000), de acordo com qual, o sistema é expresso como uma combinação linear do número reduzido de autovetores complexos, os quais são assumidos como sendo os de maior significado para caracterizar o comportamento dinâmico do sistema amortecido numa banda de frequência de interesse.

Este trabalho enfatiza a incorporação do modelo viscoelástico GHM em sistemas de elementos finitos, bem como o uso do método do balanço interno modificado e o método de redução modal para a análise de estruturas bidimensionais, para obter as respostas do sistema em termos de funções resposta em frequência, e no domínio do tempo.

2. MODELO DE GOLLA-HUGHES-McTAVISH (GHM).

O modelo GHM foi desenvolvido por Golla e Hughes (1985) e adaptado por Golla e McTavish (1993). De acordo com este modelo, a função módulo no domínio de Laplace é expressa como:

$$G(s) = G_r \left(1 + \sum_{i=1}^{N_G} \alpha_i \frac{s^2 + 2\zeta_i \omega_i s}{s^2 + 2\zeta_i \omega_i s + \omega_i^2} \right) \quad (1)$$

onde G_r é o módulo estático, α_i , ζ_i , ω_i são os parâmetros do i mini-oscilador, e N_G é o número de mini-osciladores. O módulo dinâmico para este modelo é expresso da seguinte forma:

$$G_u = G_r \left(1 + \sum_{i=1}^{N_G} \alpha_i \right) \quad (2)$$

Considere a equação de elementos finitos de uma estrutura contendo N graus-de-liberdade:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [D]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{F\} \quad (3)$$

onde $[M] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ é a matriz de massa (simétrica e definida positiva), $[D] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ (simétrica e definida não-negativa) é a matriz de amortecimento viscoso, e $[K] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ é a matriz de rigidez (simétrica e definida não-negativa), $\{q\} \in \mathbb{R}^N$ é o vetor de deslocamento e $\{F\} \in \mathbb{R}^N$ é o vetor de carregamento. É assumido que a estrutura contenha elementos elásticos e viscoelásticos, tal que a matriz de rigidez pode ser decomposta como segue:

$$[K] = [K_e] + [K_v(s)] \quad (4)$$

onde $[K_e]$ é a matriz de rigidez correspondente à subestrutura elástica e $[K_v(s)]$ é a matriz de rigidez associada com a subestrutura viscoelástica. A inclusão da dependência em frequência do

comportamento dinâmico do material viscoelástico pode ser feita gerando-se $[K_v(s)]$ para tipos específicos de elementos (barras, vigas, placas, etc) considerando inicialmente os módulos $E(s)$ e $G(s)$ como sendo constantes. Através do princípio da correspondência elástico-viscoelástico (Christensen, 1982), os módulos podem ser fatorados fora da matriz de rigidez e feito dependente da frequência de acordo com um modelo viscoelástico particular adotado. O coeficiente de Poisson pode ser assumido como sendo independente da frequência, e dessa forma, $E(s)$ torna-se proporcional a $G(s)$ pela seguinte relação $G(s) = E(s)/2(1+\nu)$. Dessa forma, escrevendo $[K_v(s)] = G(s)[\bar{K}_v]$, as equações (4) e (3) podem ser combinadas para formar a seguinte expressão:

$$(s^2[M] + s[D] + [K_e] + G(s)[\bar{K}_v])\{q(s)\} = \{F(s)\} \quad (5)$$

Introduzindo a equação (1) na equação (5), pode-se escrever a seguinte expressão:

$$(s^2[M] + s[D] + [K_e] + [K_v^0])\{q(s)\} + [K_v^0] \left(\sum_{i=1}^{N_G} \alpha_i \frac{s^2 + 2\zeta_i \omega_i s}{s^2 + 2\zeta_i \omega_i s + \omega_i^2} \right) \{q(s)\} = \{F(s)\} \quad (6)$$

onde $[K_v^0] = G_r[\bar{K}_v]$ é a matriz de rigidez associada à subestrutura viscoelástica.

O modelo GHM pode ser representado por séries de coordenadas dissipativas $\{q_i^G(s)\}$ ($i = 1, \dots, N_G$), que são relacionadas com as coordenadas elásticas $\{q\}$ de acordo com:

$$\{q_i^G(s)\} = \frac{\omega_i^2}{s^2 + 2\zeta_i \omega_i s + \omega_i^2} \{q\} \quad (7)$$

Introduzindo a equação (7) na equação (6), após algumas manipulações e retornando ao domínio do tempo, o seguinte sistema de equações acopladas pode ser obtido:

$$\{s^2[M] + s[D] + [K_e] + [K_v^\infty]\}\{q\} - \alpha[K_v^0]\{q^G\} = \{F\} \quad (8a)$$

$$s^2\{q^G\} + s2\zeta\omega\{q^G\} + \omega\{q^G\} - \omega^2\{q\} = \{0\} \quad (8b)$$

onde $[K_v^\infty] = [K_v^0] \left(1 + \sum_{i=1}^{N_G} \alpha_i \right)$ é a matriz de rigidez dinâmica associada à subestrutura viscoelástica.

O sistema de equações (8) pode ser combinado para formar o seguinte sistema de equações acopladas no domínio do tempo:

$$[M_G]\{\ddot{q}_G\} + [D_G]\{\dot{q}_G\} + [K_G]\{q_G\} = \{F_G\} \quad (9)$$

onde $\{q_G\} = [\{q\}^T \{q_1^G\}^T \dots \{q_{N_G}^G\}^T]^T$, $\{F_G\} = [\{F\}^T \{0\}^T \dots \{0\}^T]^T$,

$$[M_G] = \begin{bmatrix} [M] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_1}{\omega_1^2} [K_v^0] & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\alpha_{N_G}}{\omega_{N_G}^2} [K_v^0] \end{bmatrix}, [K_G] = \begin{bmatrix} [K_e] + [K_v^\infty] & -\alpha_1 [K_v^0] & \dots & -\alpha_{N_G} [K_v^0] \\ -\alpha_1 [K_v^0]^T & \alpha_1 [K_v^0] & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ -\alpha_{N_G} [K_v^0]^T & \dots & 0 & \alpha_{N_G} [K_v^0] \end{bmatrix} e$$

$$[D_G] = \begin{bmatrix} [D] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{2\alpha_1 \zeta_1}{\omega_1} [K_v^0] & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{2\alpha_{N_G} \zeta_{N_G}}{\omega_{N_G}} [K_v^0] \end{bmatrix}.$$

onde $[M_G], [D_G], [K_G] \in \mathbb{R}^{t_G \times t_G}$ com $t_G = N(1 + N_G)$, $[K_v^0] = G_r [K_v]$ é a matriz de rigidez estática e $[K_v^\infty] = [K_v^0] \left(1 + \sum_{N_G} \alpha_i\right)$ é a matriz de rigidez dinâmica.

A inclusão das coordenadas dissipativas para computar a dependência em frequência do comportamento dinâmico do sistema amortecido viscoelasticamente aumenta a ordem da equação diferencial do movimento tal que os graus-de-liberdade estruturais são no mínimo dobrados.

3. MÉTODO DE REDUÇÃO MODAL.

Para desenvolver a formulação pertencente ao Método de Redução Modal é conveniente transformar o sistema de segunda ordem (9) numa forma equivalente de primeira ordem (modelo de espaço de estados) com uma equação de saída adicionada como segue:

$$\{\dot{x}\} = [A]\{x\} + [B]\{F\} \quad (10)$$

$$\{y\} = [C]\{x\} \quad (11)$$

onde $\{x\} = \left[\{q\}^T \quad \{q_1^{GG}\}^T \quad \dots \quad \{q_{N_G}^{GG}\}^T \quad \{\dot{q}\}^T \quad \{\dot{q}_1^{GG}\}^T \quad \dots \quad \{\dot{q}_{N_G}^{GG}\}^T \right]^T$, $[K_T] = [K_e] + [K_v^\infty]$ e

$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & [0] & \dots & [0] & [I] & [0] & \dots & [0] \\ [0] & [0] & \dots & [0] & [0] & [I] & \dots & [0] \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ [0] & [0] & \dots & [0] & [0] & [0] & \dots & [I] \\ -[M]^{-1}[K_T] & \alpha_1 [M]^{-1}[R] & \dots & \alpha_{N_G} [M]^{-1}[R] & [0] & [0] & \dots & [0] \\ \omega_1^2 [\Lambda]^{-1}[R]^T & -\omega_1^2 [I] & \dots & [0] & [0] & -2\zeta_1 \omega_1 [I] & \dots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{N_G}^2 [\Lambda]^{-1}[R]^T & [0] & \dots & -\omega_{N_G}^2 [I] & [0] & [0] & \dots & -2\zeta_{N_G} \omega_{N_G} [I] \end{bmatrix}.$$

Uma vez que $[A]$ é uma matriz não-simétrica, os seguintes problemas de autovalor são associados ao sistema (10):

$$[A][R_r] = [\Lambda][R_r] \quad (12)$$

$$[A]^T [R_l] = [\Lambda][R_l] \quad (13)$$

onde $[\Lambda] = \text{diag}(\lambda)$ é a matriz espectral formada pelos autovalores complexos, e $[R_l]$ e $[R_r]$ são as matrizes modais cujas colunas contém os autovetores de esquerda e de direita, respectivamente, os quais são assumidos ser normalizados de modo satisfazer:

$$[R_l]^T [R_r] = [I] \quad (14)$$

Os autovetores de esquerda e de direita podem ser separados em autovetores estruturais, $[R_e]$, e autovetores dissipativos $[R_d]$ do sistema amortecido, de acordo com:

$$[R_r] = [R_{re}] [R_{rd}]; [R_l] = [R_{le}] [R_{ld}] \quad (15)$$

Em geral, os autovetores dissipativos são relacionados às coordenadas dissipativas e são sobre-amortecidos, de modo que suas contribuições ao comportamento dinâmico do sistema são pequenas. Nestas circunstâncias, eles podem ser negligenciados, e o estado original pode ser representado pela contribuição dos autovetores elásticos, $\{x\} \approx [T_{re}]\{x_e\}$, (Trindade, 2000). As equações (10) and (11) podem ser expressas como:

$$\{\dot{x}_e(t)\} = [A_R]\{x_e(t)\} + [B_R]\{u(t)\} \quad (16a)$$

$$\{y(t)\} = [C_R]\{x_e(t)\} \quad (16b)$$

onde $[A_R] = [R_{le}]^T [A] [R_{re}]$, $[B_R] = [R_{le}]^T [B]$ e $[C_R] = [C] [R_{re}]$ são as matrizes de estado reduzidas de entrada e de saída do sistema viscoelástico amortecido.

4. MÉTODO DO BALANCEAMENTO INTERNO.

O método do balanceamento interno é outro importante método de redução de sistemas amortecidos. Entretanto, ele não garante que as coordenadas reduzidas sejam um subconjunto das coordenadas originais do sistema. Este método é baseado na controlabilidade e observabilidade de cada estado balanceado.

De acordo com Moore (1981) o método do balanceamento interno é definido de modo que os graminianos sejam diagonais e iguais. Para o sistema expresso pelas equações (10) e (11), os graminianos de controlabilidade e observabilidade, denotados por $[W_c]$ e $[W_o]$, podem ser definidos de modo a satisfazer a equação de estabilidade de Lyapunov (Salmanoff, 1997):

$$[A][W_c] + [W_c][A]^T = -[B][B]^T \quad (17)$$

$$[A]^T [W_o] + [W_o][A] = -[C]^T [C] \quad (18)$$

A decomposição de Cholesky da matriz $[W_c]$ é desenvolvida de acordo com a seguinte equação:

$$[W_c] = [L_c][L_c]^T \quad (19)$$

A transformação da matriz $[P]$ é dada por:

$$P = [L_c][U][\Lambda]^{-1/2} \quad (20)$$

onde $[\Lambda]$ e $[U]$ são os autovalores e autovetores do problema de autovalor $([L_c][W_o][L_c]^T)$.

O método do balanceamento interno é dado como:

$$\{\dot{\hat{x}}\} = [\hat{A}]\{\hat{x}\} + [\hat{B}]\{F\} \quad (21a)$$

$$\{y\} = [\hat{C}]\{\hat{x}\} \quad (21b)$$

onde $[\hat{A}] = [P]^{-1} [A] [P]$, $[\hat{B}] = [P]^{-1} [B]$, $[\hat{C}] = [C] [P]$ e $[\hat{x}] = [P]^{-1} [x]$.

Pela definição de um sistema internamente balanceado, os $W_c(P) = W_o(P) = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N\}$, os termos σ_i (1, 2, ..., N) são uma medida da controlabilidade do estado i onde N é o número total de graus-de-liberdade no modelo de elementos finitos. Neste sentido, o sistema balanceado

internamente (21a) pode ser particionado em estados retidos, $\{\hat{x}_r\}$, e espaços reduzidos, $\{\hat{x}_d\}$, de acordo com os estados com grandes σ_i e pequenos σ_i :

$$\begin{Bmatrix} \dot{\hat{x}}_r \\ \dot{\hat{x}}_d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{rr} & \hat{A}_{rd} \\ \hat{A}_{dr} & \hat{A}_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{x}_r \\ \hat{x}_d \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_r \\ \hat{B}_d \end{bmatrix} \{F\} \quad (22)$$

Agora, desenvolvendo a redução estática do sistema acima, a qual remove os estados indesejados $\{\hat{x}_d\}$ da equação, mas retém a contribuição à dinâmica do sistema de acordo com os estados $\{\hat{x}_r\}$, o modelo reduzido é obtido na seguinte forma:

$$\{\dot{\hat{x}}_r\} = [\hat{A}_r] \{\hat{x}_r\} + [\hat{B}_r] \{F\} \quad (23a)$$

$$\{y\} = [\hat{C}_r] \{\hat{x}_r\} \quad (23b)$$

5. MODELO DE ELEMENTOS FINITOS DE UMA VIGA TRATADA COM CAMADA RESTRITA PASSIVA.

Nesta seção a formulação de uma viga sanduíche com 3 camadas é apresentada, baseada no desenvolvimento original de Lesieutre e Lee (1996). Este desenvolvimento é incorporado em modelos sistemas de vigas bidimensionais tratados com camadas restritas passivas. A Figura 1 ilustra um elemento de viga sanduíche com três nós, de comprimento L e largura b (não indicados), que é formado por três camadas: uma viga base, um núcleo viscoelástico e a camada restringente. Na mesma figura, são também indicados, os graus-de-liberdade nodais: deslocamentos transversais, w_i , deslocamentos longitudinais, u_i , e ângulos de cisalhamento na camada viscoelástica, β_i ($i = 1, \dots, 3$). As seguintes hipóteses são consideradas:

a) a viga base e a camada restringente são supostas elásticas com deformação de cisalhamento transversal desprezível. São consideradas as rigidez de extensão e rigidez de flexão. As inércias transversal e de rotação da seção transversal são incluídas.

b) para o núcleo viscoelástico, as hipóteses clássicas de Euler-Bernoulli são aumentadas com a inclusão de um ângulo de cisalhamento associado à tensão de cisalhamento transversal.

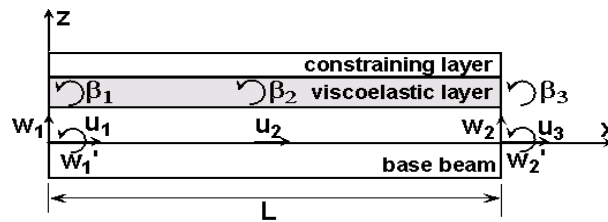


Figura 1 – Elemento de viga sanduíche com três camadas

O deslocamento transversal w_i é suposto ser o mesmo para todas os pontos pertencentes a uma mesma seção transversal e é interpolado por um polinômio cúbico em x , de acordo com:

$$w = w(x, t) = N_w(x) \bar{w}(t) \quad (25)$$

$$\text{onde } N_w(x) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} & x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} & \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} & -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{bmatrix} \text{ e } \{w(t)\} = [w_1(t) \quad w_1'(t) \quad w_2(t) \quad w_2'(t)]^T.$$

Os deslocamentos longitudinais u_i dos pontos pertencentes ao plano médio da viga base são interpolados por um polinômio quadrático em x :

$$u_0(x, t) = N_u(x)\bar{u}(t) \quad (26)$$

$$\text{onde } N_u(x) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3x}{L} + \frac{2x^2}{L^2} & \frac{4x}{L} + \frac{4x^2}{L^2} & -\frac{x}{L} + \frac{2x^2}{L^2} \end{bmatrix} \text{ e } \{\bar{u}(t)\} = \begin{bmatrix} u_1(t) & u_2(t) & u_3(t) \end{bmatrix}^T.$$

O ângulo de cisalhamento do núcleo viscoelástico β é interpolado consistentemente com u :

$$\beta(x, t) = N_u(x)\bar{\beta}(t) \quad (27)$$

$$\text{onde } \{\bar{\beta}(t)\} = \begin{bmatrix} \beta_1(t) & \beta_2(t) & \beta_3(t) \end{bmatrix}^T.$$

A energia de deformação levando em conta os efeitos de extensão, flexão e cisalhamento, é dada por:

$$U(t) = \frac{b}{2} \int_0^L \int_z \left[E(x, z) \varepsilon_{xx}^2 + G(x, z) \varepsilon_{xz}^2 \right] dz dx \quad (28)$$

Usando as relações de deformação-deslocamento e levando em conta as aproximações (25) a (27), o desenvolvimento da equação (28) conduz a:

$$U(t) = \frac{1}{2} \{q^{(e)}\}^T [K^{(e)}] \{q^{(e)}\} \quad (29)$$

onde $\{q^{(e)}\} = \begin{bmatrix} \{\bar{u}\} & \{\bar{w}\} & \{\bar{\beta}\} \end{bmatrix}^T$ é o vetor dos graus-de-liberdade nodais elementares. A matriz de rigidez elementar pode ser expressa como segue:

$$[K^{(e)}] = [K_B^{(e)}] + [K_V^{(e)}] + [K_C^{(e)}] \quad (30)$$

onde $[K_B^{(e)}]$, $[K_V^{(e)}]$, $[K_C^{(e)}]$ representa, respectivamente, as contribuições da viga base, núcleo viscoelástico e camada restringente à matriz de rigidez elementar. As expressões para estas matrizes são completamente desenvolvidas por Lesieutre e Lee (1996).

A energia cinética incluindo deslocamentos longitudinal e transversal, e as rotações, é:

$$T(t) = \frac{b}{2} \int_0^L \int_z \rho(x, z) (\dot{w}^2 + \dot{u}^2) dz dx \quad (31)$$

Usando as aproximações (25) a (27), o desenvolvimento da equação (31) conduz a:

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{q}^{(e)}\}^T [M^{(e)}] \{\dot{q}^{(e)}\} \quad (32)$$

onde $[M^{(e)}] = [M_B^{(e)}] + [M_V^{(e)}] + [M_C^{(e)}]$ representam, respectivamente, a contribuição da viga base, núcleo viscoelástico e camada restringente as matrizes de massa. Comparando-se as equações (4) e (30), escreve-se:

$$[K_e] = [K_B] + [K_C], \quad [K_v] = [K_v] = G(s) [\bar{K}_v] \quad (33)$$

onde a matriz $[K_e]$ é formada pela soma das matrizes de rigidez elementar pertencentes à viga base e à camada restringente, resultando numa matriz constante, independente da frequência, e $[K_v]$ é a matriz dependente da frequência relacionada ao núcleo viscoelástico. As expressões para estas matrizes são fornecidas por Lesieutre e Lee (1996).

6 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

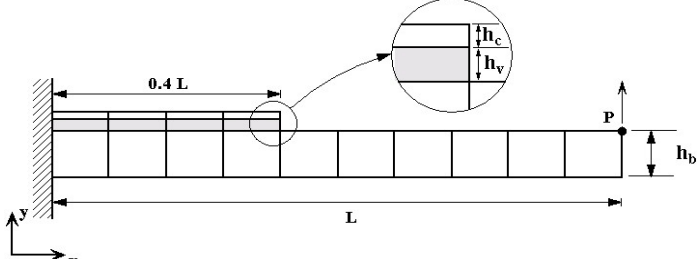
Nesta seção, são apresentadas simulações numéricas para ilustrar o uso do modelo previamente descrito para avaliar o desempenho do amortecimento de materiais viscoelásticos e dos métodos de redução aplicados a sistemas estruturais bi-dimensionais. Nestas simulações que seguem, foram utilizadas as características viscoelásticas do material comercialmente disponível 242F01, fabricado pela 3MTM (a 25°C, e banda frequencial de 8 a 8000 Hz). A otimização foi desenvolvida usando-se Algoritmos Genéticos, com populações de 800 indivíduos, em 200 gerações usando-se restrições laterais. Os valores dos parâmetros obtidos são dados na Tabela 1 (Lima *et al*, 2003).

Tabela 1. Parâmetros do modelo viscoelástico GHM identificados para o material 3MTM 242F01.

Mini-oscillator	1	2	3	4	5	6
α_i	1,047	5,524	1,589	10,330	59,999	163,130
ζ_i	3911,898	323,891	48,414	30,544	14,627	4,763
ω_i [rad/s]	4943,062	6577,256	56363,554	45473,430	8601,413	57841,215
G_r [MPa]	0,079					

A Tabela 2 apresenta os valores das propriedades físicas e geométricas usadas no modelo de elementos finitos, o qual foi implementado baseado na teoria apresentada na Seção 5.

Tabela 2 – Ilustração do modelo de elementos finitos, implementado para a viga com tratamento superficial parcial.

Beam-Treated			
Base-beam	Viscoelastic core	Constraining layer	
$L = 0,5 \text{ m}$ $b = 38 \times 10^{-3} \text{ m}$	$L = 0,5 \text{ m}$ $b = 38 \times 10^{-3} \text{ m}$	$L = 0,5 \text{ m}$ $b = 38 \times 10^{-3} \text{ m}$	
$h_b = 45 \times 10^{-4} \text{ m}$	$h_v = 20 \times 10^{-5} \text{ m}$	$h_c = 5 \times 10^{-4} \text{ m}$	
$E = 70,3 \times 10^9 \text{ N/m}$	$\rho = 1099,5 \text{ Kg/m}^3$ $\nu = 0,5$	$E = 70,3 \times 10^9 \text{ N/m}$	
$\rho = 2750 \text{ Kg/m}^3$		$\rho = 2750 \text{ Kg/m}^3$	

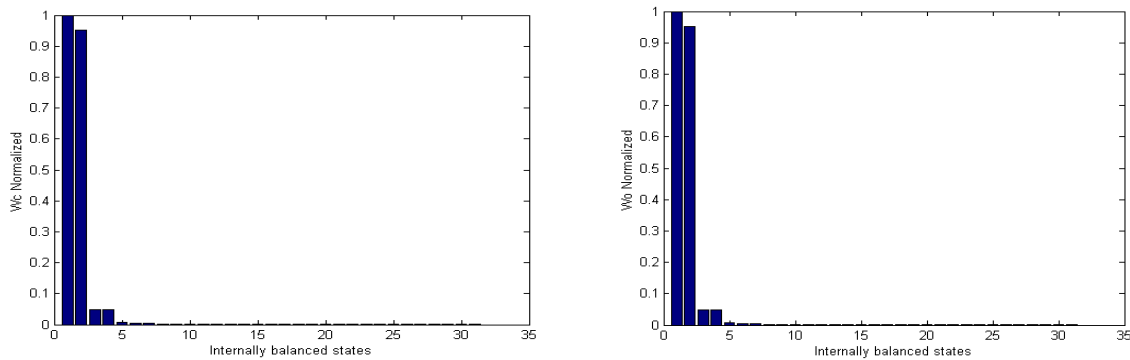


Figura 2 – Wc e Wo versus estados internamente balanceados para o conjunto de dados.

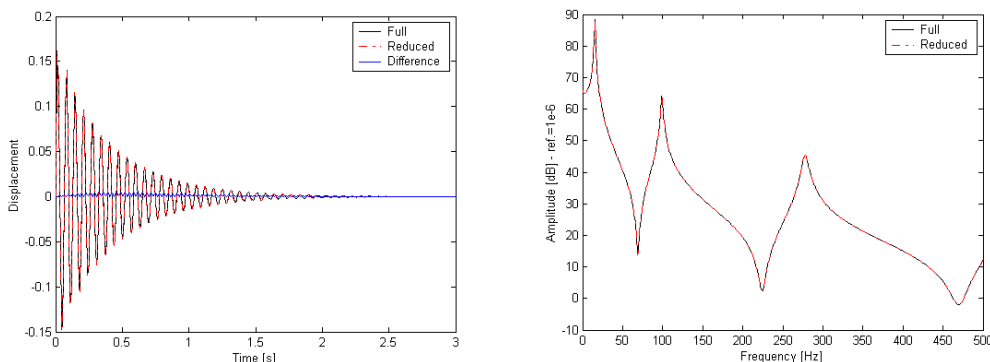


Figura 3 – FRIs e FRFs completas e reduzidas – método do balanceamento interno

A Figura 2 representa os gramíneos internamente balanceados de controlabilidade e observabilidade, W_c e W_o , sendo iguais e diagonais, como previsto pela teoria. A resposta no tempo para uma excitação impulsiva no ponto P, e as amplitudes das funções de resposta em frequência do sistema completo e reduzido são mostradas na Figura 3. Ambas a resposta impulsiva (completa e reduzida) aparecem como esperado, onde as oscilações são inicialmente grandes, mas decrescem exponencialmente, levando a concluir que o método do balanceamento interno é um método de redução viável para sistemas contendo amortecimento viscoelástico, bem como na previsão das respostas, como pode ser visto nas amplitudes das FRFs.

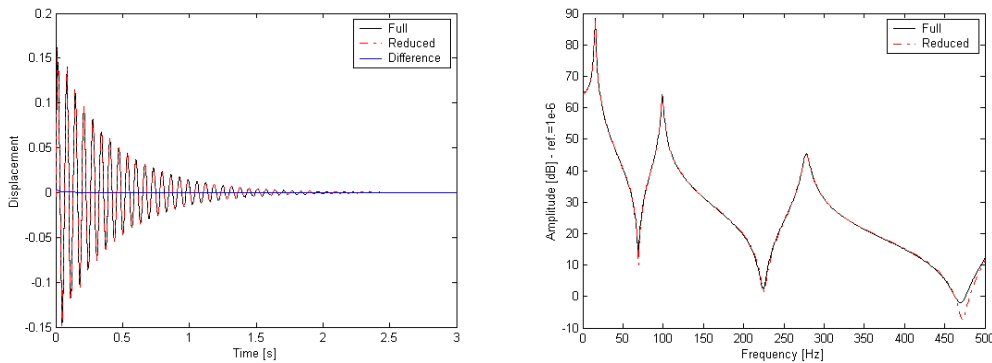


Figura 4 – FRIs e FRFs completas e reduzidas – método de redução modal

A Figura 4 mostra a resposta no tempo para uma excitação impulsiva no ponto P, e as amplitudes das funções de resposta em frequência da viga para o modelo reduzido comparado com as do modelo completo. Como pode ser visto, ambas as respostas ao impulso e as amplitudes das FRFs aparecem como esperado, comparado com as respostas no tempo e amplitudes de funções de resposta em frequência obtidas pelo método do balanceamento interno, levando a concluir que o método de redução modal é um método viável de modelagem dos parâmetros de um material viscoelástico, tal qual o método do balanceamento interno na previsão das respostas dos sistemas viscoelasticamente amortecidos.

7 CONCLUSÕES

Os procedimentos de modelagem por Elementos Finitos de estruturas incorporando materiais viscoelásticos para a análise de respostas temporais e de respostas em frequências, combinado com técnicas de redução de modelos foram implementados. Enfocando o comportamento dependente da frequência dos materiais viscoelásticos através do modelo GHM e a implementação do método de redução por balanceamento interno e o método modal.

As simulações numéricas apresentadas permitem ilustrar a aplicação dos procedimentos de redução de modelos como uma ferramenta para avaliar o amortecimento, resposta no tempo e frequências naturais da redução de sistemas contendo amortecimento viscoelástico como uma representação dinâmica de sistemas de ordem mais elevada, para permitir a aplicação de técnicas de controle ativo, além de diminuir o custo computacional no processamento.

8 AGRADECIMENTOS

A. M. G. de Lima agradece o suporte financeiro da CAPES pela bolsa de mestrado concedida. D. A. Rade é grato à Agência CNPq pelo suporte ao seu projeto de pesquisa sob o número 520418/98-0.

9 REFERÊNCIAS

- Christensen, R. M., 1982, "Theory of Viscoelasticity: An Introduction", Academic Press, Inc.
 Golla, D. F. and Hughes, P. C., 1985, "Dynamics of Viscoelastic Structures – A Time-Domain, Finite Element Formulation", Journal of Applied Mechanics, Vol 52, pp. 897-906.

- Lam, M. J., 1997, "Hybrid Active/Passive Models with Frequency Dependent Damping", Ph. D. Thesis, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute, Blacksburg, VA, USA.
- Lesieutre, G. A., 1992, "Finite Elements for Dynamic Modeling of Uniaxial Rods With Frequency-Dependent Material Properties", Int. J. Solids. Structures, Vol 29, No. 12, pp. 1567-1579.
- Lesieutre, G. A. and Lee, U., 1996, "A Finite Element for Beams Having Segmented Active Constrained Layers With Frequency-Dependent Viscoelastic", Smart Mat. Struct.5, pp.615-627.
- Lima, A. M. G., Stoppa, M. H. and Rade, D. A., 2003, "Finite Element Modeling of Structures Incorporating Viscoelastic Materials", Proceedings to XXI IMAC, Hyatt Orlando: Florida.
- Matutti, A. C., Trindade, M. A., Sampaio, R., 2001, "Frequency-dependent Viscoelastic Models for Passive Vibration Isolation Systems", Proceedings of 16th Brazilian Congress of Mechanical Engineering-COBEM, Vibration and Acoustics, Vol. 10, pp. 349-358.
- McTavish, D. J. and Hughes, P. C., 1993, "Modelling of Linear Viscoelastic Space Structures", Journal of Vibration and Accoustics, Vol. 115, No. 1, pp. 103-113.
- Salmanoff, J., 1997, "A Finite Element, Reduced Order, Frequency Dependent Model of Viscoelastic Damping", Ms. C. Thesis, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute, Blacksburg, VA, USA.
- Trindade, M. A., Benjeddou, A., Ohayon, R., 2000, "Modeling of Frequency-dependent Viscoelastic Materials for Active-passive Vibration Damping", Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 122, No. 2, pp. 169-174.
- Yae, K. H. And Inman, D. J., 1993, "Control-oriented Order Reduction of Finite Element Model", Dynamic Systems and Control, Vol. 115, pp. 708-711.

10. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

MODEL REDUCTION METHODS AS APPLIED TO VISCOELASTICALLY DAMPED FINITE ELEMENT MODELS

Antônio Marcos Gonçalves de Lima

Domingos Alves Rade

Federal University of Uberlandia, School of Mechanical Engineering
Campus Santa Monica P. O. BOX 593, CEP. 38400-902, Uberlândia – MG – Brasil
Amglima@mecanica.ufu.br; domingos@ufu.br

Abstract: *This paper is devoted to procedures for the finite element modeling of structures incorporating viscoelastic materials, with emphasis placed on reduction methods intended for the reduction of the order of the finite element matrices of the damped systems to perform frequency response and time domain analyses. This work focuses the use of two methods of reduction: the Modal Reduction Method and the Modified Internal Balancing Method. To account for the frequency-dependent behavior of viscoelastic materials, the Golla-Hughes-McTavish (GHM) model is used. The paper is organized as follows: introductory comments are first presented regarding the use of viscoelastic models and the procedures for their inclusion in the finite element structural matrices. Next, the studied of methods of reduction of viscoelastic finite models is developed. Numerical simulations dealing with two-dimensional structures are presented to illustrate the use of the reduction methods.*

Keywords: *Viscoelastic Materials, Finite Element Modeling, Reduction Methods*