

# Análise de estaca submetida a carregamento lateral via Método dos Elementos Finitos Estendido

Edel Rolando Martínez Concepción

Santa Helena Empreendimentos e Participações Ltda, Brasília, Brasil, edel.rolando@gmail.com

**RESUMO:** Na pesquisa estudou-se o problema de transmissão de cargas laterais da estrutura às fundações profundas tipo estaca isolada e a representação do início e propagação de fraturas pelo Método dos Elementos Finitos Estendido (XFEM). Consideram-se que as estacas analisadas estão submetidas a carregamento lateral de forma monótona. Mediante a análise numérica do XFEM, e adotando um modelo linear elástico no concreto (curva tensão - deformação), representou-se o fraturamento de estacas isoladas submetidas a carga lateral. Foram avaliadas as principais deficiências dos métodos tradicionais e, apoiado nelas, estabeleceu-se as estratégias para adequar a modelagem constitutiva, de tipo estrutural, da estaca. Abordaram-se os aspectos correspondentes ao processo de simulação numérica, calibração dos modelos e validação. Tratou-se de referenciar importantes pesquisas e temas de interesses referentes às fundações profundas para assim entender o comportamento destas. Comparou-se a capacidade de carga da estaca entre o método analítico de Broms (1964) e os resultados obtidos da simulação numérica via XFEM. As principais formulações e hipóteses do modelo numérico utilizado são brevemente descritas. O XFEM usa uma discretização fixa de elementos, que não necessita ajustar-se à interface, facilitando o cálculo de descontinuidades. Isso é possível mediante a extensão do elemento finito com funções de base adicionais em determinados nós enriquecidos, os quais captam o comportamento da solução perto da interface. No trabalho demonstrou-se a precisão das análises utilizando o XFEM e o modelo constitutivo através de comparação de resultados numéricos e ensaios experimentais, observando a resposta e capacidade de carga deste tipo de fundação, assim como os padrões de fraturamento. Apreciou-se que os estudos relacionados ao comportamento das estacas fraturadas podem levar a projetos otimizados, uma vez que é avaliado um fenômeno que em regra é desconsiderado durante o desenho ou mesmo provas de carga da fundação profunda. As simulações de fraturas na estaca de concreto foram realizadas no programa de elementos finitos Abaqus. Assim, demonstrou-se a capacidade do módulo XFEM em Abaqus para resolver complexos problemas de propagação de fraturas.

**PALAVRAS-CHAVE:** carga lateral, fratura, XFEM.

## 1 INTRODUÇÃO

As fundações compostas por uma estaca isolada ou um grupo de estacas são usadas extensivamente em solos moles, onde as fundações superficiais são inapropriadas por não poder proporcionar a capacidade requerida, ou por experimentar grandes recalques. Durante o projeto de fundações profundas é importante estudar os métodos de cálculo para determinar o comportamento de estacas que estão submetidas ao efeito de cargas laterais. O modelo mais utilizado para efetuar as análises de estacas submetidas a cargas horizontais consiste em

analisar a fundação como uma série de elementos de viga (flexível), e considerar a interação solo - estaca representando ao primeiro como um grupo de molas concentrados perpendiculares à estaca (Modelo Discreto de Winkler).

As ferramentas numéricas constituem uma parte fundamental das simulações das estacas, principalmente durante o aprendizado dos complexos mecanismos de fraturas. Os métodos e ferramentas computacionais aperfeiçoam o desenho de engenharia, aceleram os estudos e, conseqüentemente, esclarecem algumas das

preocupações sobre o potencial impacto de uma fratura.

Não obstante, devido à forte não linearidade que representa a fratura e à propagação da mesma, a simulação numérica pode ser um problema árduo e custoso.

Pode-se evitar a remalhagem através do uso do Método dos Elementos Finitos Estendido (XFEM) para um problema de fratura. O XFEM foi introduzido por Belytschko e Black (1999) e Moës et al. (1999) através da implementação de funções de forma especiais enriquecidas e graus de liberdade adicionais à aproximação padrão de elementos finitos. Uma apropriada aproximação do fenômeno de fraturas via XFEM sugere a construção de malhas densas na ponta da trinca, que podem implicar em alto custo computacional. O XFEM ultrapassa as desvantagens associadas à utilização do FEM e permite a representação da fratura sem discretizar as superfícies. Com base nisso, a geometria da fratura é completamente independente da configuração de malha de elementos finitos empregada. Como resultado, a remalhagem não é necessária, o que acelera a simulação da propagação da fratura.

O XFEM oferece vantagens em relação ao clássico FEM, principalmente em problemas em que acontecem mudanças nas fronteiras. Por exemplo: no avanço temporal da fratura. Ele também apresenta várias melhorias ao FEM, entre elas a flexibilidade oferecida no alinhamento da descontinuidade com os eixos dos elementos, conforme Figura 1 (b), o qual era uma limitação do FEM, como pode ser observado na Figura 1 (a).

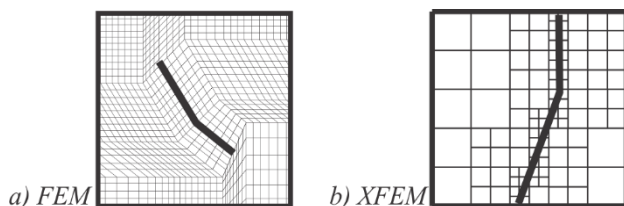


Figura 1. Propagação das fraturas  
a) FEM b) XFEM

Se explicarmos de forma abreviada as características de enriquecimento previstas no XFEM. Para representar a descontinuidade através da fratura o método utiliza uma função denominada Heaviside. O problema de

enriquecimento na ponta da fratura contou com duas abordagens. Em ambas, uma zona de enriquecimento de tamanho fixo é definida, com posição centrada na ponta da fissura. Na primeira estratégia, são adicionados ao espaço de elementos finitos deslocamentos assintóticos na ponta da trinca, os quais serão multiplicados pelas funções de forma correspondente para os nós que estão na zona de enriquecimento. Na segunda, os deslocamentos assintóticos são adicionados sem acontecer a multiplicação. A fim de limitar a influência, este enriquecimento só é considerado dentro da área de enriquecimento. A condição de correspondência é prescrita, para assegurar a continuidade do deslocamento através da interface entre a área do enriquecimento e do resto do domínio.

O trabalho foi organizado nas seguintes seções. A segunda é usada para descrever o efeito das cargas laterais nas estacas, assim como os modelos mais utilizados. Na terceira seção, descreve-se os principais fundamentos do XFEM e as estratégias de enriquecimentos utilizadas. A seção 4 apresenta o modelo numérico de estudo e os resultados obtidos. A última seção lista as conclusões alcançadas.

## 2 CARGAS LATERAIS E MODELOS FÍSICOS

As estacas podem estar submetidas a cargas laterais derivadas das ações externas em contato com a estrutura superior, conforme se representa na Figura 2a), as quais devem ser previstas adequadamente pelo projetista. As estacas resistem ao esforço horizontal e aos momentos produto da deflexão, até um instante onde se logra uma reação e o terreno que circunda a fundação é mobilizado. O comportamento das estacas submetidas a estas cargas depende em princípio da rigidez da fundação e da força resistente do solo. A sobrecarga produz um deslocamento horizontal do terreno. O efeito predomina em solos moles onde o excesso de esforço produz neste um comportamento como um fluido e transmite os efeitos laterais à fundação, conforme representou-se na Figura 2b). Este efeito não acostuma acontecer em solos granulares ou quando a pressão transmitida às camadas moles coesivas é menor a  $1,5q_u$ .

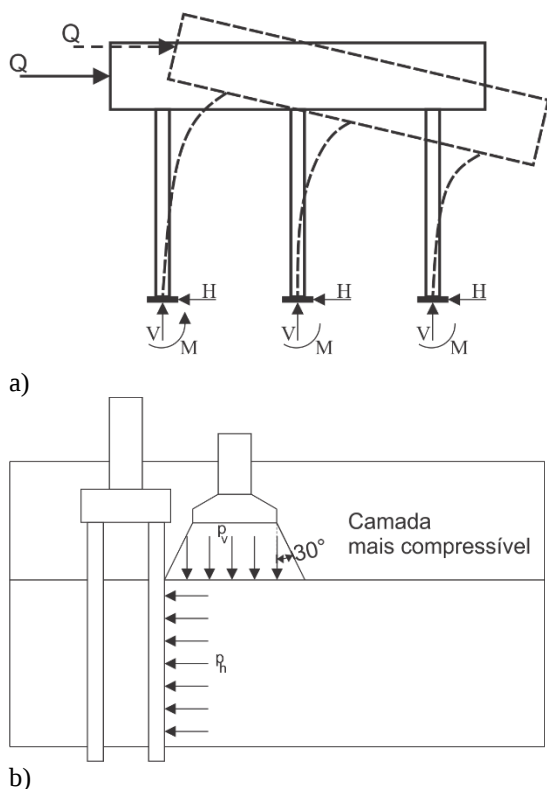


Figura 2. Estaca submetida a carga lateral  
a) Carga diretamente aplicada b) Empuxos laterais produzidos pela sobrecarga

Na atualidade a análise do problema no sistema solo - estaca é geralmente modelado de três formas diferentes que podem se encontrar nas pesquisas de Poulos e Davis (1980), Fleming et al. (1992) e em Pacheco (2007). Por um lado se tem o modelo da viga sobre uma fundação elástica, método proposto originalmente por Winkler em 1967, os modelos elásticos contínuos, nos que o solo é representado como um meio semi - infinito, composto de um material homogêneo, isotrópico e elástico. Outra possibilidade para modelar o sistema é usar o Método de Elementos Finitos (MEF), ou o Método dos Elementos de Contorno (MEC), onde o solo e a estaca são discretizadas com unidades que modelem adequadamente o comportamento de cada um e da interface entre ambos. Para o caso da estaca, trabalhando a flexão foram desenvolvidas várias soluções, partindo de um critério inicial onde são classificadas as estacas em dois tipos: estaca rígida (curta) e estaca elástica (longa). Na Figura 3 podemos observar a natureza na distribuição de deflexão, momento e cisalhamento no

comprimento das estacas rígida e elástica, assim como a suposição de ruptura na interação entre a estaca e o solo.

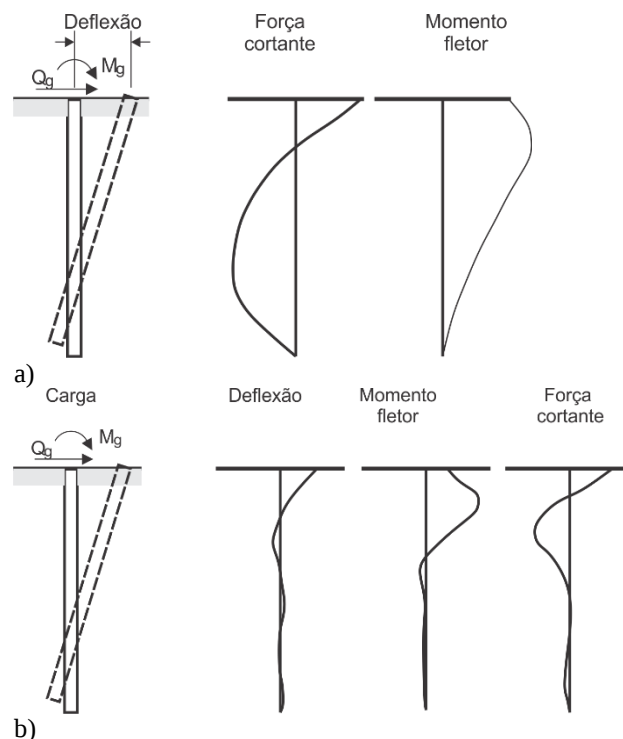


Figura 3. Variação da deflexão, momento e força cisalhante em estaca a) Rígida b) Flexível

Segundo Coduto (2001) a capacidade resistente das estacas está limitada por três vias diferentes: a capacidade do solo pode ser excedida, isto provoca grandes deslocamentos horizontais; os momentos podem gerar grandes curvas de tensão no material da fundação, finalizando em uma ruptura estrutural das estacas e as deflexões no radier das estacas podem ser grandes para ser compatíveis com os da superestrutura. Estes métodos de ruptura devem ser considerados na etapa de projeto. A análise do comportamento de estacas carregadas lateralmente está fundamentada no conceito de reação elástica, onde é admitido que o solo em volta da estaca pode ser simulado por uma série de molas horizontais, cada mola representa o comportamento de um estrato de solo por unidade de altura. As hipóteses neste caso é que o solo é homogêneo, todas as molas são idêntico e o comportamento do solo pode ser determinado se é conhecida a constante da mola, chamada constante de balasto ( $k_s$ ). Este modelo propõe que a deflexão lateral em qualquer ponto da estaca está relacionada linearmente com a

pressão de contato solo - estaca nesse ponto:  $p(z) = K_h(z) \cdot v(z)$ , onde  $v(z)$  é o deslocamento transversal,  $p$  é a pressão de contato e  $K_h$  o módulo de balasto horizontal do solo. Valores típicos da constante de balasto podem-se encontrar no manual disponibilizado pela Sociedade Canadense de Geotecnia (SCG, 1985).

### 3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS ESTENDIDO (XFEM) E A SIMULAÇÃO DE DISCONTINUIDADES

O Método dos Elementos Finitos Estendido permite fazer simulações da geometria de uma fratura separadamente do domínio de elementos finitos. O XFEM é muito útil para analisar o início e propagação de fraturas. O método possui algumas vantagens em relação ao clássico MEF, fundamentalmente em problemas onde acontecem mudanças nas fronteiras como o avanço de fraturas.

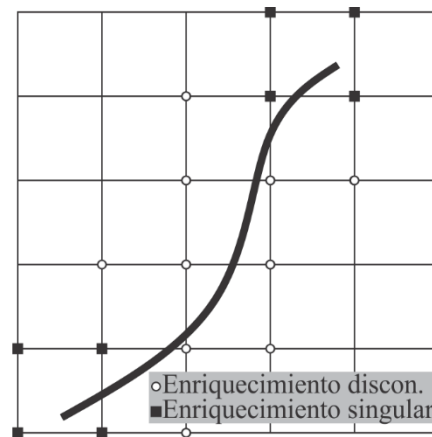
A formulação matemática do XFEM, para aproximar o campo de deslocamentos com uma descrição implícita-explicita é apresentada na equação abaixo (Baydoun & Fries, 2012).

$$u(x) = \sum_{i \in I} N_i(x) u_i + \sum_{i \in I_{\text{segmentos}}} N_i^*(x) [H(x) - H(x_i)] a_i + \sum_{i \in I_{\text{ponta}}} N_i^*(x) \left[ \sum_{m=1}^4 (B^m(x) - B^m(x_i)) b_i^m \right] \quad (1)$$

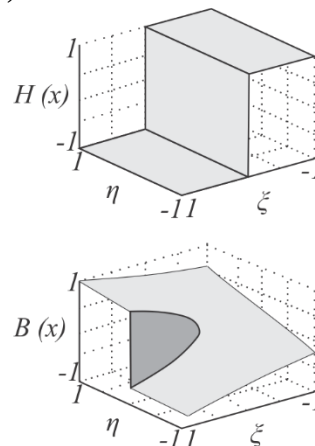
O primeiro termo é a aproximação clássica do Método de Elementos Finitos (MEF), descrito por uma função continua de forma  $N_i(x)$ , e as incógnitas  $u_i$  nos pontos nodais. A descontinuidade no campo de deslocamentos da fratura assim como o comportamento especial na ponta da fratura é tomada em consideração, respectivamente, pelos segundos e terceiros termos.

As funções de forma padrão  $N_i$  (MEF) e as funções de forma que localizam o enriquecimento de  $N_i^*$  podem ter diferentes ordens.  $I$  é o conjunto de todos os nós no domínio,  $H(x)$  é o passo de enriquecimento, a

$a_i$  é a variável incógnita de enriquecimento no nó  $i$  e  $I^{\text{corte}}$  é o conjunto de nós onde o lado do elemento é totalmente cortado pela fratura, como é representado na Figura 4. Ademais, as  $B_m(x)$  são as quatro funções de enriquecimento da fratura na ponta, as  $b_i^m$  são as variáveis incógnitas correspondentes do enriquecimento e  $I^{\text{rama}}$  é o conjunto de nós na vizinhança da ponta da fratura. As funções de enriquecimento na ponta  $B_m(x)$  são propostas em Belytschko e Black (1999) e alcançam os campos assintóticos próximo da ponta. Estão fundamentadas em coordenadas polares  $(r, \theta)$  nas proximidades da ponta da fratura segundo a equação 2.



a)



b)

Figura 4. a) Representação da fratura por nós enriquecidos b) funções especiais  $H(x)$  e  $B(x)$

$$B(x) = \left\{ \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right\} \quad (2)$$

E foi demonstrado sua utilidade também em três dimensões. Com a finalidade de alinhar as

funções de enriquecimento com a frente da fratura, o plano onde  $\theta$  é zero deve ser tangente à frente da fratura. Pode-se afirmar que uma implementação exitosa do XFEM é possível através dos seguintes passos: 1. Definir os conjuntos de nós enriquecidos  $I^{corde}$  e  $I^{rama}$ . 2. Avaliar as funções de enriquecimento 3. Realizar a integração numérica apropriada considerando as descontinuidades e as singularidades nas funções de enriquecimento, mais detalhes podem ser obtidos no trabalho de Stolarska et al. (2001). As equações de equilíbrio e as equações de continuidade obtém-se na forma discreta, usando o XFEM para a discretização no espaço, no tempo podem ser usadas várias ferramentas como o esquema generalizado de Newmark.

### 3.1 Primeira estratégia de enriquecimento: Adição de graus de liberdade em cada nó

A primeira estratégia está fundamentada no trabalho de Béchet et al (2005) e Laborde et al (2005) para problemas de elasticidade plana. Nestas duas pesquisas chamou-se o método como enriquecimento geométrico referenciando-se ao XFEM de área de enriquecimento fixa. Os nós abrangidos na área definida em torno da ponta da fratura são enriquecidos com funções de descontinuidade. Enquanto, para cada nó enriquecido, um conjunto de dois graus de liberdade é adicionado ao grau de liberdade oferecido pelo clássico MEF.

O enriquecimento é obtido como a multiplicação das funções descontínuas com as funções de forma do elemento finito. As funções descontínuas da ponta da fratura estão relacionadas exclusivamente com a parcela do deslocamento.

Os elementos passarão a ter três graus de liberdade em cada nó, a adição de duas funções descontínuas significará num aumento a seis graus de liberdade para cada nó incluído na região enriquecida. Lembrando que alguns nós serão enriquecidos pelas funções assintóticas e descontínuas.

### 3.2 Segunda estratégia de enriquecimento: Funções descontínuas globais e pareo integral

A segunda estratégia foi introduzida por Laborde et al (2005) com o propósito de reduzir o número de graus de liberdade que são

introduzidos na base do elemento finito. Para este objetivo, o apoio das funções singulares é o enriquecimento acrescentado em toda a área, e não são multiplicados pelas funções de forma do elemento finito.

Assim, de seis graus de liberdade adicionais por nó dentro da zona de enriquecimento, passa-se apenas a dois graus de liberdade para todo o sistema.

## 4 MODELO NUMÉRICO DA ESTACA

Para realizar o estudo numérico forma definidas as propriedades medias do solo com predomínio da coesão (argila media a dura) e outro caso onde predomina o atrito (areia), seguindo as hipóteses estabelecidas na metodologia analítica proposta por Broms (1964). Para modelar o comportamento elástico do solo se considerou um módulo de elasticidade de 15000 kPa e um coeficiente de Poisson de 0.30. Os valores assumidos para o solo foram considerados segundo as especificações de Bowles (1997) e Braja (2001). Em todos os casos a dilatação foi considerada nula.

A seguir são apresentados os resultados das provas de cargas considerando o XFEM para a determinação de fraturas na estaca e para o solo, o modelo de comportamento elástico perfeitamente plástico de Mohr-Coulomb. Na prova de carga de Price & Wandle (1987), Figura 5, foi considerada uma estaca de 1,50 m de diâmetro e 12,50 m de comprimento. A resistência do concreto, considerando um corpo de prova cilíndrico, foi fixada em 40 MPa.

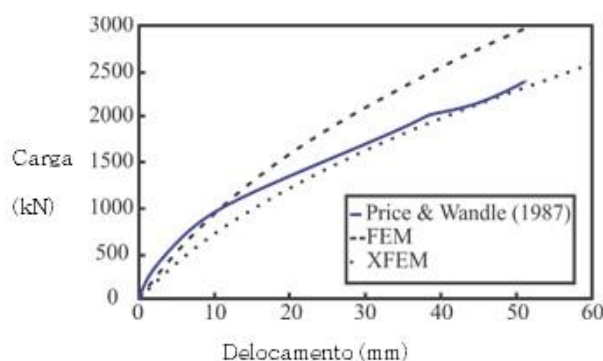
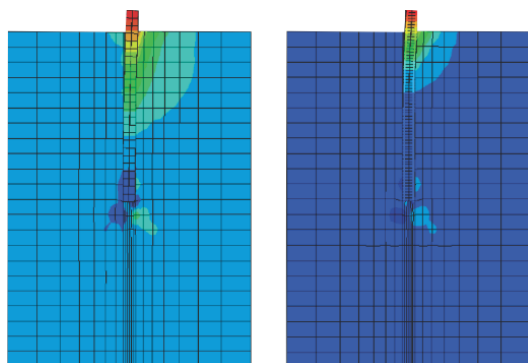
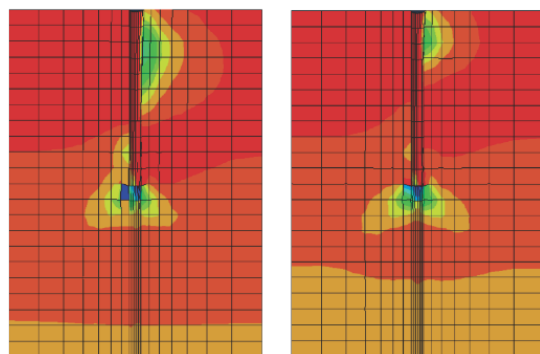


Figura 5. Provas de carga experimental de Price & Wandle (1987) e numérica via MEF e XFEM

Na Figura 6 são representados pelo modelo numérico a deformada da estaca e a distribuição de tensões horizontais mobilizadas no solo para toda a profundidade analisada, considerando para a estaca o modelo de comportamento linear - elástico e o XFEM para caracterizar as fraturas. Considerar o comportamento linear - elástico para a estaca implicou uma representação maior da capacidade de carga nas condições de trabalho que a capacidade de carga real da fundação, o anterior é contra a segurança do projeto. Na maioria dos casos para as cargas de trabalho e  $FS = 2 - 3$ , o comportamento linear - elástico da estaca é aproximadamente o mesmo que para a fundação real, embora seja menor o fator. A simulação numérica sugere a importância de considerar um apropriado modelo constitutivo para os materiais, assim como uma adequada concepção, calibração e validação da modelagem, que como ferramenta numérica faz possível prever resultados certos, como também induzir erros mais graves que influenciam negativamente na segurança e economia do projeto.



a)



b)

Figura 6 Ensaio numérico de carga no modelo de Price & Wandle (1987) a) Deslocamento b) Tensões

## 5 CONCLUSÕES

O XFEM possibilita uma modelagem realista da estaca de concreto, uma vez que se considera o comportamento não linear e o fenômeno de fraturas presentes neste material. O XFEM é apropriado para modelar a estaca flexível de concreto submetido a carga lateral, evidenciando um erro relativo à prova de carga menor do 15%. Nas simulações observou-se que as estacas ao absorver a carga lateral que atua sobre a estrutura superior mobilizam toda a massa de solo envolta. A simulação da estaca demonstrou a capacidade da formulação proposta no XFEM em prever com exatidão a resposta estrutural sobre a propagação de fraturas de problemas em 3-D.

## AGRADECIMENTOS

O autor agradece o apoio à pesquisa oferecido pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

## REFERÊNCIAS

- Baydoun, M., & Fries, T.P. (2012). Crack propagation criteria in three dimensions using the XFEM and an explicit-implicit crack description, *Int. J. Fracture*, Vol. 178, p. 20.
- Béchet E., Minnebo H., Moës N., Burgardt B. (2005). Improved implementation and robustness study of the X-FEM for stress analysis around cracks. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 64, p. 1033–1056.
- Belytschko, T., & Black, T. (1999). Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 45, p. 601-620.
- Bowles, J.E. (1997). *Foundation analysis and desing*, Fifth Edit, The McGraw-Hill Companies, Inc, p. 1207.
- Braja, M. Das. (2001). *Fundamentos de Ingeniería Geotécnica*, Thomson & Learning, p.607.
- Broms, B. (1964). Lateral resistance of piles in cohesive soils, *Journal of the Soil Mechanic and Foundation Division*, Vol. 90 (2), p. 27-63.
- Coduto, D. P. (2001). *Foundating Desing. Principles and Practices*, New Jersey Prentice Hall, Inc.
- Fleming, W.G.K., Weltman, A.J., Randolph, M.F. and Elson, W.K (1992). *Piling Engineering*. Second edition, John Wiley & Sons.
- Laborde P., Pommier J., Renard Y., Salaün M. (2005). High order extended finite element method for cracked domains, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 64, p. 354–381.
- Moës, N., Dolbow, J., & Belytschko, T. (1999). A Finite Element Method for crack growth without remeshing,

- Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 46, p. 131-150.
- Pacheco, G. E. (2007). *Mecánica Computacional. Modelo simplificado para el análisis dinámico de pilotes sometidos a carga horizontal*. A. A. d. M. Computacional. Córdoba. XXVI.
- Poulos H.G and Davis E.H. (1980). *Pile Foundation Analysis and Design*. John Wiley and Sons.
- Price G., Wandle I.F. (1987). Lateral load tests on large diameter bored piles. Contractor report 46, Transport and Road Research Laboratory, Department of Transport, Crowthorne, England, p. 45.
- SCG (1985). Canadian Foundation Engineering Manual. Piles Subjected to lateral loads. Vancouver, Canada, C.G.S, p. 367-374.
- Stolarska, M., D. L. Chopp, et al. (2001). Modelling crack growth by level sets, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 51(8), p. 943-960.