

Ferramenta Numérica aplicando Metodologia Híbrida a Radier Estaqueado

Sofia Leão Carvalho

Universidade Federal de Goiás, Goiânia, Brasil, sofialeao@gmail.com

Maurício Martines Sales

Universidade Federal de Goiás, Goiânia, Brasil, sales.mauricio@gmail.com

Flávio Augusto Xavier Carneiro Pinho

Universidade Federal de Goiás, Goiânia, Brasil, flavio.axcp@gmail.com

RESUMO: Radiers estaqueados passaram a ser utilizados como solução para as fundações com maior frequência devido ao crescimento vertical acentuado das edificações e consequente aumento de cargas e recalques. Atualmente, esta alternativa de fundação é objeto de estudo de muitos pesquisadores. Nesse contexto, a metodologia híbrida ganhou destaque entre projetistas e pesquisadores por representar um avanço nessas análises já que produz bons resultados com custo computacional relativamente baixo. Uma limitação em ferramentas que utilizam metodologia híbrida, no entanto, é representar o perfil do solo na sua forma heterogênea. O programa SoFIA – Soil-Foundation Interaction Analysis – é um programa de metodologia híbrida que utiliza o Método dos Elementos Finitos. O radier é modelado com elementos de placas apoiados sobre uma base elástica que representa o meio solo/estacas. A rigidez equivalente da base elástica é calculada por meio de análises axissimétricas utilizando também o MEF. Nesse trabalho são mostrados exemplos de análise comparando resultados a trabalhos existentes na literatura para análise completa de radier estaqueado. Os exemplos analisados mostraram bons resultados comparados à literatura quanto recalque, divisão do carregamento entre radier e estacas e momentos. O trabalho ressalta ainda o cálculo das interações entre elementos de estacas e solo de forma automática uma análise axissimétrica, vantajosa quando comparada a uma análise completa tridimensional e à análise em Método dos Elementos de Contorno.

PALAVRAS-CHAVE: Radier Estaqueado, Análise Numérica, Método dos Elementos Finitos, Ferramenta Híbrida.

1 INTRODUÇÃO

O radier estaqueado destaca-se como uma nova técnica que aliou duas fundações diferentes que quando trabalhando em conjunto, melhoram a capacidade de carga e reduzem recalques excessivos e diferenciais. O radier, com suas características de fundação rasa, possui boa capacidade de suporte, já as estacas são conhecidas por sua boa capacidade redutora de recalques.

Novos critérios de análise mais precisos devem combinar comportamentos tão distintos dessas fundações. Buscando compreender melhor a interação entre os elementos que compõem o radier estaqueado, diversas ferramentas baseadas

em métodos numéricos surgiram. O Método dos Elementos Finitos (MEF) se destaca por ser o mais completo e versátil.

A análise do radier estaqueado utilizando elementos sólidos requer um grande refinamento da malha de elementos finitos, o que representa um elevado consumo de processamento computacional. Também por isso, nos últimos anos alguns autores perceberam que ao combinar diferentes metodologias aplicadas ao radier estaqueado, poderiam analisar essa fundação economizando gasto computacional e tempo de processamento. Tais metodologias combinadas ficaram conhecidas como metodologias híbridas.

As ferramentas híbridas, nesse caso, normalmente discretizam o radier em elementos

de placa enquanto simplifica o meio solo/estaca como um meio elástico sobre o qual o radier se apoia.

Essa aproximação do comportamento do conjunto solo/estacas ainda é um importante objeto de estudo. Os pesquisadores buscam entender melhor a rigidez equivalente e os parâmetros elásticos para levar em conta a heterogeneidade dos solos.

Este artigo mostra as etapas de construção de um programa de metodologia híbrida para a análise de radier estaqueado denominado SoFIA (Soil-Foundation Interaction Analysis). O programa foi desenvolvido em linguagem orientada a objetos. Toda análise é feita utilizando MEF.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A partir de meados da década de 70, a combinação entre fundação profunda e rasa começou a despertar atenção dos projetistas pois propiciava economia em circunstâncias onde somente o radier não seria capaz de atender aos requisitos básicos de projeto. As estacas associadas ao radier além de melhorarem a capacidade última de carregamento, ajudam a combater os recalques total e diferencial do conjunto, permitindo a utilização de espessuras menores no radier. (POULOS, 2001a) O radier estaqueado é uma fundação onde ambos, radier e estacas, são responsáveis pelas mobilizações de carregamentos e de recalques.

A utilização de métodos computacionais no dimensionamento de fundações é continuamente crescente, principalmente no que diz respeito à avaliação de recalques. Segundo Potts e Zdravkovic (2001), na engenharia geotécnica o MEF passou a ser usado largamente somente depois da expansão do seu uso em outras áreas da engenharia, pois algumas questões complexas e exclusivas da Geotecnia só passaram a ser compreendidas recentemente.

2.1.1 MEF e Ferramentas Híbridas aplicados às Fundações

O primeiro trabalho que considerou a análise completa tridimensional de radier estaqueado utilizando MEF foi o de Ottaviani (1975). Ele utilizou um modelo elástico-linear para o solo com um grupo de estacas, com e sem o contato solo/bloco. Em sua análise ele concluiu que ao

considerar o bloco em contato com o solo, não só estava contribuindo para diminuir as tensões cisalhantes no solo na parcela superior das estacas, como aumentando as tensões verticais no solo na ponta das estacas.

Devido à dificuldade de processamento utilizando o MEF, vários autores publicaram trabalhos com simplificações restringindo geometricamente a análise, mas também impossibilitando a obtenção de determinados parâmetros, como o trabalho de Presley e Poulos (1986), que simplificou um radier estaqueado quadrado por círculos concêntricos de estacas equivalentes.

Os pioneiros, no entanto, foram Hain e Lee (1978) que trabalharam com um programa híbrido que analisa o radier em elementos de placa pelo MEF, considerando sua rigidez, e o conjunto estaca/solo foi analisado pelo Método dos Elementos de Contorno, MEC, sobrepondo os efeitos de deslocamento do solo e da estaca.

A combinação dos métodos numéricos citados anteriormente passou a ser utilizada como alternativa para suprir as limitações dos métodos e criar ferramentas matemáticas que fossem eficientes na análise de fundações estaqueadas. O princípio das combinações é reduzir os passos matemáticos, e por isso, reduzir o uso de memória e o tempo de processamento.

Algumas das principais ferramentas desenvolvidas passaram a utilizar o MEF principalmente na análise do radier, enquanto o conjunto solo/estaca analisado por outros métodos. Poulos (1994a), em seu trabalho, modelou o radier em placas pelo MEF, enquanto que as estacas como molas interativas e o solo como um meio elástico contínuo. Já Russo (1998) modelou as estacas como molas de comportamento não linear e Kim *et al* (2001) consideram o solo como molas de Winkler e as estacas como molas acopladas.

2.2 Interações dos elementos da fundação

De acordo com Hain e Lee (1978), a análise da estaca reforçando o meio contínuo do solo, além da análise de uma única estaca, necessita considerar quatro interações entre a própria estaca e a superfície do solo. Poulos (1972), que investiga a relação de recalques entre as estacas, relaciona o fator de interação α como sendo a

razão entre o recalque de uma estaca pelo recalque de outra estaca carregada através do MEC.

Segundo Sharnouby e Novak (1990) e Chen et al (2011), no entanto, esse método para obtenção dos fatores de interação tende a exagerar os recalques e simplificar a heterogeneidade dos solos. A análise em MEF, nesses casos, são mais apropriadas, e a escolha do elemento axissimétrico é ideal para a condição da estaca verticalmente carregada com sessão circular instalada verticalmente no solo com litologia horizontal (POTTS e ZDRAVKOVIC, 2001) Somente quando alguma dessas condições é contrariada, recomenda-se a utilização de modelos em uma única análise 3D utilizando elementos sólidos.

3 METODOLOGIA DO PROGRAMA SoFIA

O programa SoFIA utiliza o Método dos Elementos Finitos para a análise do radier em elementos de placa e determina os coeficientes de interação do meio elástico solo/estacas por meio de análises axissimétricas também em MEF. Esses coeficientes são base para o cálculo da matriz de flexibilidade e da matriz de rigidez equivalente do meio solo/estaca que é somada à matriz de rigidez do radier. Portanto, o programa SoFIA utiliza em toda sua metodologia elementos finitos.

A ferramenta foi construída em linguagem orientada a objetos, com o intuito de facilitar a expansão da ferramenta sem comprometimento da estrutura original do programa.

3.1 Hipóteses Consideradas No Cálculo Do Radier Estaqueado

O programa SoFIA analisa o conjunto no regime elástico linear, valendo então a hipótese da superposição dos efeitos do recalque das estacas e do solo. Nele, o radier é representado por uma placa esbelta, seguindo as hipóteses de Kirchhoff para as estruturas do tipo.

O deslocamento vertical no plano médio do radier é igual ao deslocamento da superfície do solo naquela localidade. Ou seja, as interfaces entre o radier e o conjunto solo/estacas estão perfeitamente ligadas e indissociáveis,

independente da natureza dos esforços (tração ou compressão).

Além disso, o acréscimo de rigidez do solo e das estacas se dá apenas na direção correspondente ao deslocamento vertical. Ou seja, o solo e as estacas não são capazes de resistir aos esforços horizontais e momentos fletores aplicados diretamente a eles.

Uma estaca ou o conjunto delas contida em uma massa de solo se movimenta de forma semelhante à massa de solo ao seu redor, sendo que a presença de uma ou um conjunto de estacas não altera o comportamento do solo na suas proximidades, mantendo-se linear e elástico.

Os deslocamentos medidos seguem as sugestões de interação de Hain e Lee (1978), interagindo os elementos de estaca e solo entre si. Quando a estaca é carregada, a influência sobre outra estaca e outro elemento de solo são medidos na superfície do solo. No caso de um elemento de solo carregado, os deslocamentos relativos a outra massa de solo são medidos na superfície enquanto os deslocamentos causados numa estaca são medidos a um terço do comprimento dessa estaca, desconsiderando sua existência nesse ponto. O fator de influência de um terço do comprimento é uma calibração de Poulos (1994a) em relação a métodos mais precisos.

3.2 Problema radier estaqueado

As propriedades geométricas e físicas são definidas pelo usuário. O radier pode conter regiões com espessuras e materiais diferentes. Os centros das estacas devem coincidir com algum nó do radier, conforme mostra a Figura 1.

O solo é dividido em camadas que podem ter diferentes espessuras e propriedades do material. É ilimitado o número de tipos de estacas utilizadas em cada problema, e cada tipo é definido pelas propriedades geométricas, como diâmetro e comprimento, além de propriedades do material.

O elemento de placa utilizado na análise do radier possui quatro nós. Foram desconsiderados esses efeitos das deformações de cisalhamento já que a espessura do radier é muito menor do que as demais dimensões, portanto são válidas as hipóteses de Kirchhof.

O elemento de placa utilizado na análise do radier possui quatro nós. Foram desconsiderados

esses efeitos das deformações de cisalhamento já que a espessura do radier é muito menor do que as demais dimensões, portanto são válidas as hipóteses de Kirchhoff.

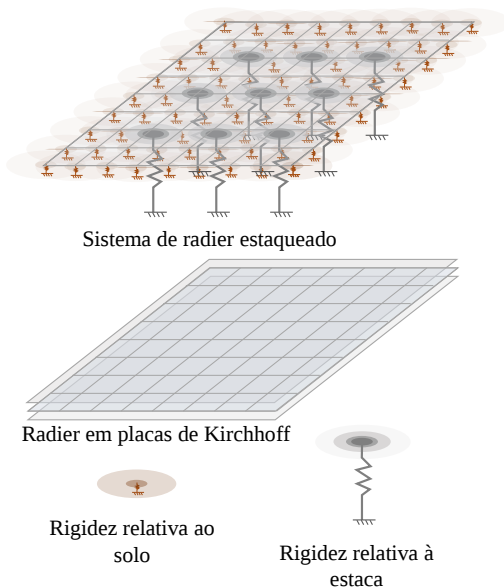


Figura 1 - Sistema do radier estacado utilizado no programa SoFIA com molas interativas. Análise das Interações

No programa SoFIA as interações são obtidas pelas análises do perfil de solo e dos tipos de estacas que forem usadas no radier. A interferência desses elementos em outros (estaca ou solo) é medida pelo deslocamento provocado por um carregamento equivalente unitário.

Cada deslocamento nodal vertical sobre o radier, seja ele sobre um elemento solo ou estaca, influencia todos os outros nós. O somatório de todas essas influências dão origem à matriz f de flexibilidade, cuja a inversa é a matriz de rigidez $K_{S/E}$ do meio solo/estaca.

3.3 Método dos elementos finitos aplicado à análise de radier estacado

Os coeficientes de flexibilidade da matriz do meio solo/estaca obtidos das análises axissimétricas são transformados em matriz de rigidez e somados à matriz de rigidez do radier somente nos graus de liberdade referentes ao deslocamento vertical. O sistema final resultante dessa análise é dado pela equação 1.

$$(K_R + K_{S/E})U = F \quad (1)$$

onde:

K_R = matriz de rigidez do radier;

$K_{S/E}$ = matriz de rigidez do sistema solo/estaca;

U = vetor de deslocamentos;

F = vetor de força.

3.4 Fluxograma

O fluxograma da análise do radier estacado resumido na Figura 2, se divide em duas etapas principais: obtenção da matriz de rigidez do meio de solo/estacas através das análises axissimétricas; e a análise do radier estacado com as matrizes de rigidez do radier e do meio solo/estaca somados.

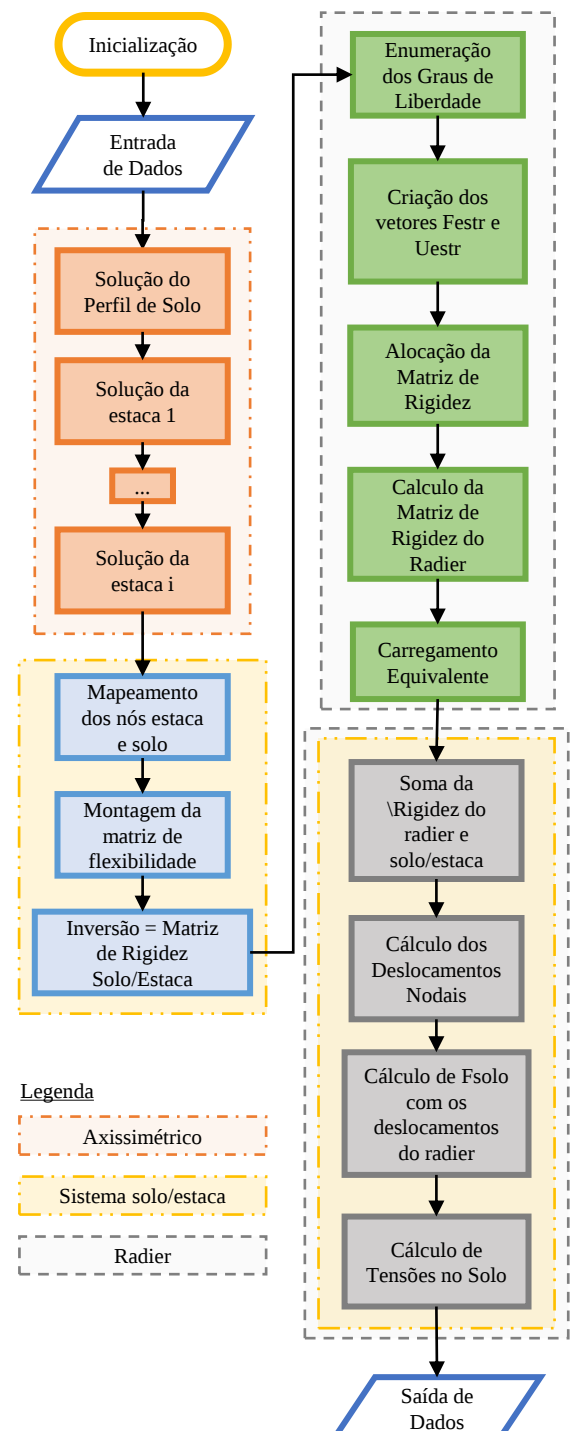


Figura 2 - Fluxograma básico do programa SoFIA

A solução das malhas com elementos axissimétricos para solo e estacas é seguida da montagem da matriz de flexibilidade mapeando todos os nós do radier onde existem nós com solo e nós com estacas. Após a etapa de montagem da matriz de rigidez do radier, são enumerados os graus de liberdade e montado o vetor de carregamento equivalente. Da solução do sistema do radier com o meio solo/estaca, são obtidos deslocamentos, forças e tensões no radier e no solo.

3.5 Análise do Radier Estaqueado

Nessa seção são analisadas fundações completas de radier estaqueado, comparando alguns parâmetros: recalque, importante no estudo do posicionamento de estacas; divisão da mobilização de carregamento entre estacas e radier e momentos no radier.

3.5.1 Recalque

Para a análise de recalques foi comparado resultados ao trabalho de Kuwabara (1989), um pioneiro na análise de radier estaqueado e ainda bastante utilizado para comparação de trabalhos mais recentes. As estacas são analisadas em grupo e isoladamente pelo MEC e os recalque e parcela de mobilização dos elementos da fundação são observados variando o comprimento e os espaçamentos entre estacas num meio semi-infinito de solo homogêneo, isotrópico e elástico. Os detalhes da geometria são mostrados na Figura 3 e para a espessura da camada de solo foi adotado o dobro do comprimento da estaca.

No gráfico da Figura 4 são mostrados resultados do programa SoFIA aos obtidos por Kuwabara (1989) e Sales (2000) em outros três programas: GARP (POULOS, 1994b), ALLFINE (FARIAS, 1993) e APPRAF, de Small e Zhang¹ (1999, *apud* Sales, 2000). O primeiro programa, como já descrito, utiliza metodologia híbrida, com placa pelo MEF e rigidez do solo/estaca como molas interativas. O programa ALLFINE é desenvolvido em MEF com enfoque em problemas geotécnicos, e o

último programa, o APPRAF, é um programa baseado no Método das Camadas Finitas para representar o comportamento do solo (SALES, 2000).

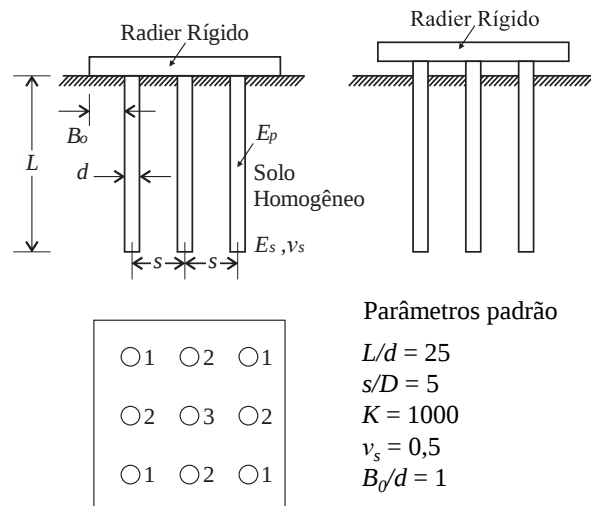


Figura 3 - Esquema gráfico genérico dos exemplos de Kuwabara (1989).

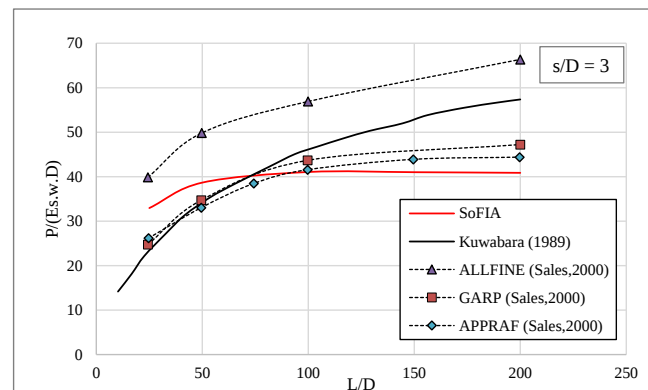


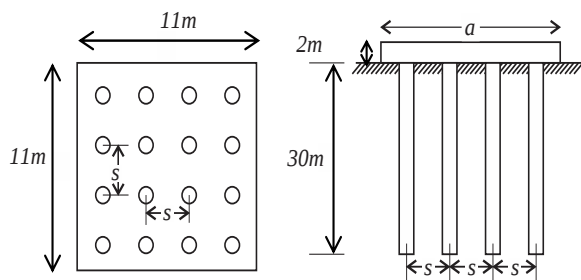
Figura 4 - Resposta carga x recalque de Kuwabara (1989) com seguintes espaçamentos: (a) $s/d = 3$;

Percebe-se pelo gráfico o mesmo comportamento entre os programas. A análise feita pelo programa SoFIA se aproxima do comportamento do programa GARP e APPRAF, estabilizando os recalques com o aumento do comprimento das estacas. O programa SoFIA, no entanto tem uma variação muito menor para comprimentos relativos menores que 100, enquanto que nem o ALLFINE e o método proposto por Kuwabara (1989) possuem uma estabilização com o aumento do comprimento das estacas.

¹ Small, D.M.A, & Zhang, H. (1999). Dados fornecidos através de comunicação pessoal com Sales (2000).

3.5.2 Carregamento dos elementos da fundação

O exemplo analisado a seguir é um radier estaqueado com 16 estacas apresentado pelo comitê técnico TC-18 no ISSMGE (*International Society for Soil Mechanics and Geotechnical Engineering*) por O'Neill *et al.* (1996) e foi analisado por diversos autores. Os detalhes sobre a fundação estão descritos na Figura 5.



Radier:
 $E_r = 35000 \text{ MPa}$
 $\nu_r = 0,16$

Solo:
 $E_s = 7+2,45z \text{ (MPa)}$
 $\nu_s = 0,1$
 $c_u = 110+3,93z \text{ (kPa)}$
 $\sigma_{\text{máx}} = 833 \text{ kPa}$ (considerando $z=2B/3$)

Estacas:
 $E_p = 35000 \text{ MPa}$
 $\nu_p = 0,16$
 $D = 1,0 \text{ m}$
 $s = 3,0 \text{ m}$
 $P_{\text{últ}} = 9,6 \text{ MN}$

Figura 5 - Radier estaqueado sob 16 estacas proposto pelo TC-18

Na análise desse bloco foi utilizada uma carga de 80MN distribuída aplicada em uma área central de $1,0 \times 1,0 \text{ m}$, que representa um fator de segurança bem elevado, considerando que cada estaca suportaria 9,6MN, e as 16 em conjunto um total de 153,6MN. O solo foi estratificado em 18 camadas, com 90m.

Sales (2000) mostra em seu trabalho alguns trabalhos comparando recalque e porcentagem de carregamento das estacas. Esses resultados estão na Figura 6.

O programa SoFIA, como a maioria dos outros resultados, mostra que as estacas absorvem em torno de 98% do carregamento total. Quanto aos recalques, os programas com metodologia parecida (GARP, KURP, HyPR e SoFIA) têm resultados próximos, pois são métodos aproximados enquanto as ferramentas que utilizam totalmente o MEF, como o caso de Yamashita (1998) e do ALLFINE (SALES, 2000) em torno de 30mm. Nessa análise, foram ainda comparados resultados de distribuição de

carga entre as estacas do canto, lado e centro do radier. Esses resultados estão mostrados na Figura 6.

Tabela 1 - Comportamento do radier proposto pelo TC-18

Programa/Método/Autor	Recalque (mm)	Carga estacas (%)
SoFIA	40,7	98,6
MEF–Yamashita(1998)(H/L=3)	29,0	98
Tubulão equivalente Horikoshi & Randolph (1998)	31,0	--
HyPR – Horikoshi & Randolph (1998)	41,0–43,0	100
KURP – Matsumoto (1998)	42,0	96
GARP – (Sales,2000)	42,0	98
PIRAF- Método das Camadas Finitas (Sales,2000)	31,0	98
ALLFINE – MEF (H/L=5) (Sales, 2000)	27,0	95

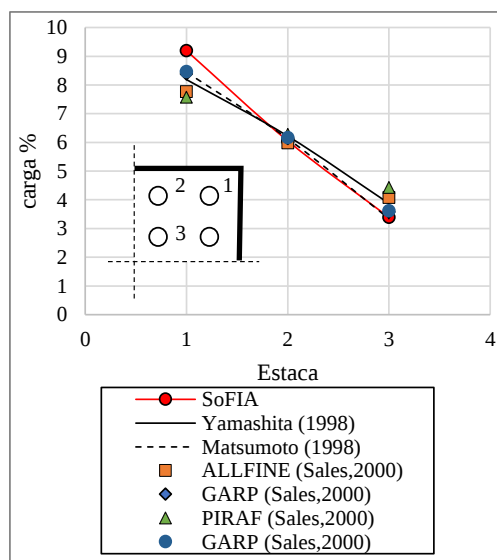


Figura 6 - Carga absorvida pelas estacas em diferentes posições no radier sobre 16 estacas proposto pelo TC-18

O gráfico mostra que o programa SoFIA teve uma tendência em absorver mais carregamento nas estacas do canto e menos nas estacas do centro, comparado aos demais programas. De maneira geral, o programa se aproximou bastante ao resultado dos demais trabalhos.

3.5.3 Momentos gerados no radier

Sales *et al.* (2015) apresentaram em seu trabalho um estudo sobre momento fletor em um radier apoiado sobre nove estacas submetido a um carregamento de dois pilares inicialmente apresentado por Zhang e Small (2000). A geometria do problema, juntamente com a

discretização da malha são apresentadas na Figura 7.

O solo desse exemplo é isotrópico e homogêneo, cujo módulo de elasticidade E_s é igual a 20 MPa e o coeficiente de Poisson é 0,4. As propriedades do material das estacas e do radier são módulo de Young igual a 20 GPa e coeficiente de Poisson 0,2. O radier quadrado possui lateral 3,9 m e espessura 0,3m. Todas as nove estacas têm comprimento de 15m e diâmetro de 0,3 m. As estacas foram espaçadas de 1,5 m ($s/D=5$) e a aplicação de carga foi feita em pilares de dimensões 0,3x0,6 m, com aplicação de 100 kPa em cada pilar.

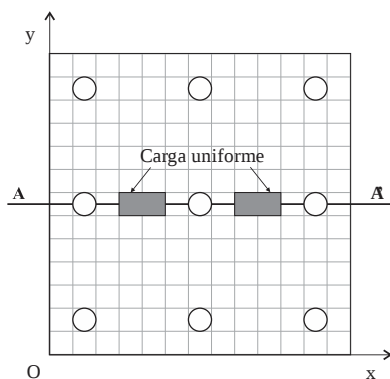


Figura 7 - Divisão da malha (modificado de Sales *et al* (2015))

Poulos *et al.* (2001) analisaram o radier estaqueado através de uma análise 3D em MEF e Zhang e Small (2000) realizaram a análise utilizando o método de elementos finitos para análise do radier e das estacas, e teoria das camadas finitas para a análise do solo. Na Figura 8 são apresentados os resultados do problema original. Além disso, Sales *et al.* (2015) apresentaram duas análises de momento utilizando o GARP, com metodologia híbrida e o DIANA, completamente em MEF.

Os primeiros resultados comparam o momento normalizado Im_x e Im_y pela distância em x normalizada (X/B), na Figura 8. Em ambos os gráficos, percebe-se que todos os métodos deram resultados bem próximos.

No gráfico das duas figuras percebe-se uma leve tendência, tanto do GARP como do SoFIA de momentos negativos bem mais acentuados no posicionamento de estacas, para distância normalizadas em torno 0,1 e 0,5. Esses dois programas utilizam metodologia híbrida. Enquanto isso, a análise de Poulos e o programa DIANA, que utilizaram análises em MEF 3D,

aproximam-se entre si nesses locais de momentos negativos.

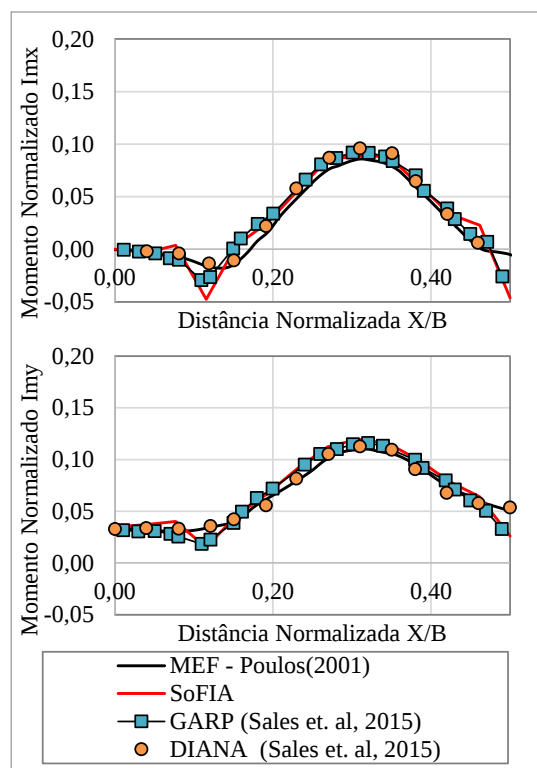


Figura 8 - Momentos em x e y normalizado na seção A-A' respectivamente

4 CONCLUSÕES

Comparado a outros exemplos da literatura, os resultados foram bastante satisfatórios em relação a recalques, carregamentos e momentos. Em geral, os resultados se aproximam mais a outros programas que utilizam metodologia híbrida, ao passo que os programas que são desenvolvidos totalmente em Método dos Elementos Finitos em três dimensões, devem se atentar ao fato de utilizar elementos de placa para a análise do radier no lugar de elementos sólidos 3D. Esse problema está principalmente relacionado à formulação de elementos 3D que podem apresentar problemas de mau condicionamento de cisalhamento.

Além disso, comparados a outros programas de análise usando o MEF 3D, ao método de elemento de contorno e a outros métodos analíticos de cálculo de recalques, a análise axissimétrica se mostrou bastante precisa e rápida para esses fins. A análise de interações pelo Método dos Elementos Finitos representa

ainda um ganho na análise de solos heterogêneos comparado ao MEC, por exemplo.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela concessão da bolsa de estudos.

REFERÊNCIAS

- Chen, S., Song, C., & Chen, L. (2011). Two-pile interaction factor revisited. *Canadian Geotechnical Journal*, 48, 754-766. doi:10.1139/T10-095
- Farias, M. (1993). *Numerical analysis of clay core dams*. PhD Thesis. Swansea, UK: University. College of Swansea.
- Hain, S., & Lee, I. (1978). The analysis of flexible raft-pile systems. *Geotechnique*, 28(1), pp. 65-83.
- Kim, K. N., Lee, S.-H., Kim, K.-S., Chung, C.-K., Kim, M. M., & Lee, H. S. (2001). Optimal pile arrangement for minimizing differential settlements in piled raft foundations. *Computers and Geotechnics*, 28, 235-253.
- Kuwabara, F. (1989). An elastic analysis for piled raft foundations in a homogeneous soil. *Soils and Foundations*, 29, pp. 89-92.
- O'Neil, M. C. (1996). *Case histories of pile-supported rafts. Report for International Society for Soil Mechanics and Geotechnical Engineering Tech Comm*. University of Houston, Texas.
- Ottaviani, M. (1975). Three-dimensional finite element analysis of vertically loaded pile groups. *Geotechnique*, 25(2), pp. 159-174.
- Potts, D., & Zdravkovic, L. (2001). *Finite Element Analysis in Geotechnical Engineering: Application* (1^a ed., Vol. 2). London: Thorns Telford Ltd.
- Poulos, H. (1972). Load Settlement predictions for piles and piers. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division : proceedings of the American Society of Civil Engineers.*, 98, 379-397.
- Poulos, H. (1980b). *Users guide to program DEFPIG*. Sydney: School of Civil Engineering. The University of Sydney.
- Poulos, H. (1994a). An Approximate Numerical Analysis of pile-raft interaction. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 18, 73-92.
- Poulos, H. (1994b).
- Poulos, H. (2001a). *Methods of analysis of piled raft foundations*. International Society of Soil Mechanics and Geotechnical Engineering.
- Poulos, H., & Davis, E. (1980a). *Pile Foundation Analysis and Design*. New York: Wiley.
- Poulos, H., Carter, J., & Small, J. (2001). *Foundation and Retaining structures: research and practice*.
- Presley, J., & Poulos, H. (1986). *Finite Element Analysis of Mechanism of Pile Group Behaviour*. University of Sidney.
- Randolph, M. (1994). Desing methods for pile groups and piled rafts: state-of-art report. *Proc 13th Int. Conf. Soil Mech. Found. Engin*, 5, pp. 61-82. New Delhi.
- Russo, G. (1998). Numerical Analysis of Piled Rafts. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 22, 477-493.
- SALES, M. M. (2000). *Análise do comportamento de sapatas estaqueadas*. Tese de Doutorado. Brasília,DF: Universidade de Brasília.
- Sales, M., Lima, B., Almeida, S., & Farias, M. (2015). Automatic optimazation of piled raft design based on branch and bound method. *The structural design of tall and special buildings*, 24, 351-365.
- Sharnouby, B. E., & Novak, M. (1990). Stiffness constants and interaction factors for vertical response of pile groups. *Canadian Geotechnical Journal*, 27, 813-822.
- TNO, B. (2008). *Diana User's Manual: Release 9.3*. Delf, Netherlands.
- Yamashita, R. (1998). Analyses of piled raft model provided by ISSMGE TC-18 - PArt 2: Estimation by three dimensional finite element analysis.TC-18 Japanese Geot. Society Member's on Piled Rafts.Tokyo. p. 2.1-2.8.
- Zhang, H., & Small, J. (2000). Anaysis of capped pile groups subjected to horizontal and vertical loads. *Computers and Geotechnics*, 26, 1-21.