



Bifurcações da Região de Estabilidade Fraca do Ponto de Equilíbrio Hopf Supercrítico do tipo-0 de Sistemas Dinâmicos Autônomos não Lineares

Josaphat R. R. Gouveia Jr.¹

Fabíolo Moraes Amaral²

Colegiado de Matemática, IFBA, Eunápolis, Ba

Luís Fernando C. Alberto³

Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação, EESC, USP

Av. Trabalhador Sancarlense, 400, 13566-590, São Carlos, São Paulo, Brasil

Resumo. Este artigo estuda o comportamento da região de estabilidade fraca de um ponto de equilíbrio Hopf supercrítico do tipo-zero de sistemas dinâmicos sujeitos a variação de parâmetros. O comportamento da região de estabilidade fraca e de sua fronteira quando ocorre uma bifurcação Hopf supercrítica do tipo-0 no atrator é explorado. Uma caracterização completa da fronteira da região de estabilidade fraca na vizinhança de um valor de bifurcação Hopf supercrítica do tipo-0 é apresentado neste trabalho.

Palavras-chave. Ponto Hopf Supercrítico do tipo-0. Bifurcação Hopf Supercrítica do tipo-0. Região de Estabilidade Fraca. Fronteira da Região de Estabilidade Fraca.

1 Introdução

As caracterizações existentes da fronteira da região de estabilidade são fornecidas sob algumas suposições sobre o campo vetorial, incluindo a hiperbolicidade dos pontos de equilíbrio na fronteira da região de estabilidade e condições de transversalidade. Sob variação de parâmetros, bifurcações locais podem ocorrer na fronteira da região de estabilidade e a suposição de hiperbolicidade dos pontos de equilíbrio pode ser violada nos pontos de bifurcações. Logo, estudar a caracterização da fronteira da região de estabilidade em pontos de bifurcações é de fundamental importância para entender como a região de estabilidade se comporta sob variação de parâmetros.

Alguns avanços nesta direção já foram obtidos e relatados na literatura. Em [1], por exemplo, uma completa caracterização da fronteira da região de estabilidade na presença

¹josaphat@ifba.edu.br

²fabio@ifba.edu.br

³lcalberto@usp.br

de pontos de equilíbrio sela-nó do tipo-0 e uma completa caracterização de bifurcações da região de estabilidade induzidas por bifurcações sela-nó do tipo-0 foram estudadas. Em [2], uma completa caracterização de bifurcações da região de estabilidade induzidas por bifurcações sela-nó do tipo- k , com $k \geq 1$ foram exploradas. Em [4], a caracterização da fronteira da região de estabilidade na presença de pontos de equilíbrio não-hiperbólicos do tipo Hopf foram desenvolvidas como o primeiro passo para entender o comportamento da região de estabilidade na ocorrência de bifurcações locais do tipo Hopf na fronteira da região de estabilidade. Em [6], uma caracterização da fronteira da região de estabilidade fraca do ponto de equilíbrio não-hiperbólico Hopf supercrítico do tipo-0 na presença agora de pontos de equilíbrio hiperbólicos foram apresentadas.

Nesse artigo, resultados que exploram o comportamento da região de estabilidade fraca de um ponto de equilíbrio Hopf supercrítico do tipo-0 de sistemas dinâmicos sujeitos a variação de parâmetros são explorados. Uma caracterização completa da fronteira da região de estabilidade fraca na vizinhança de um valor de bifurcação de Hopf supercrítica do tipo-0 é apresentado. Este artigo é organizado da seguinte maneira. Na Seção 2, uma caracterização da fronteira da região de estabilidade fraca é apresentada. A principal contribuição deste artigo é apresentada na Seção 3. Mais precisamente, uma caracterização completa da fronteira da região de estabilidade fraca na vizinhança de um valor de bifurcação Hopf supercrítico do tipo-0 é desenvolvida. A Seção 4 é dedicada aos exemplos.

2 Caracterização da Fronteira da Região de Estabilidade Fraca

Considere a classe de sistemas dinâmicos autônomo dependente de um parâmetro

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R} \quad (1)$$

onde $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um campo vetorial de classe $\mathcal{C}^1$. A solução do sistema (1), para um parâmetro fixo μ , iniciando em x no tempo $t = 0$ é denotada por $\varphi(t, x)$. Define-se elemento crítico do sistema dinâmico autônomo (1), para um parâmetro fixo μ , como sendo ou uma órbita fechada ou um ponto de equilíbrio.

Um ponto de equilíbrio ψ^* do sistema (1), para um parâmetro fixo μ , é dito ser *hiperbólico* se todos os autovalores da matriz Jacobiana $D_x f(\psi^*)$ tem parte real não nula. Dizemos que a órbita fechada do sistema dinâmico autônomo ((1)) é hiperbólica, se a matriz Jacobiana da Aplicação de Poincaré associada à órbita fechada ψ^* em $x_0 \in \psi^*$ possui todos os multiplicadores característicos com módulo diferente de 1, com exceção apenas de um multiplicador característico que têm módulo igual a 1. Além disso, um ponto de equilíbrio hiperbólico ψ^* é do *tipo- k* se a matriz Jacobiana possui k autovalores com parte real positiva e $n - k$ autovalores com parte real negativa. Se ψ^* é uma órbita periódica hiperbólica do *tipo- k* se a matriz Jacobiana possui k multiplicadores característicos com módulo maior que 1, $1 \leq k \leq n - 1$ e $n - k - 1$ multiplicadores característicos com módulo menor que 1. Um conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto invariante do sistema (1), para um parâmetro fixo μ , se toda trajetória de (1) começando em S permanece em S para todo $t \in \mathbb{R}$.

Um ponto de equilíbrio não hiperbólico $x_{\mu_0} \in \mathbb{R}^n$ de (1), para um parâmetro fixo $\mu = \mu_0$, é chamado um ponto de equilíbrio de Hopf e (x_{μ_0}, μ_0) um ponto de bifurcação de Hopf se as seguintes condições forem satisfeitas: **(i)** $D_x f(x_{\mu_0})$ tem um par simples de autovalores imaginários puros, $\pm i\omega$, e nenhum outro autovalor com parte real nula; e **(ii)** $l_1 \neq 0$, onde l_1 é o Primeiro Coeficiente de Lyapunov, veja [4, 8].

Pontos de equilíbrio de Hopf ou pontos de bifurcações de Hopf podem ser classificados de acordo com o sinal do primeiro coeficiente de Lyapunov. Um ponto de equilíbrio de Hopf $x_{\mu_0} \in \mathbb{R}^n$ de (1) é chamado um ponto de equilíbrio Hopf supercrítico se o primeiro coeficiente de Lyapunov $l_1 < 0$ e é chamado um ponto de equilíbrio de Hopf subcrítico se o primeiro coeficiente de Lyapunov $l_1 > 0$. Coeficientes de Lyapunov estão relacionados com o comportamento assintótico do sistema na variedade central. Um ponto de equilíbrio Hopf supercrítico atrai órbitas na variedade central enquanto um ponto de equilíbrio Hopf subcrítico a repele.

Pontos de equilíbrio de Hopf podem também ser classificados em tipos de acordo com o número de autovalores de $D_x f(x_{\mu_0})$ com parte real positiva. Um ponto de equilíbrio de Hopf x_{μ_0} de (1) é chamado um ponto de equilíbrio de Hopf do tipo- k se $D_x f(x_{\mu_0})$ tem k ($k \leq n - 2$) autovalores com parte real positiva e $n - k - 2$ com parte real negativa.

Neste artigo, estaremos interessados principalmente nos pontos de equilíbrio Hopf supercríticos do tipo-0. Se x_{μ_0} é um ponto de equilíbrio Hopf supercrítico do tipo-0 de (1), então as seguintes propriedades são satisfeitas, veja [7, 8]: **i.** A variedade estável local $(n-2)$ -dimensional $W_{loc}^s(x_{\mu_0})$ de x_{μ_0} existe, é única, e se $q \in W_{loc}^s(x_{\mu_0})$ então $\varphi(t, q) \rightarrow x_{\mu_0}$ as $t \rightarrow +\infty$; **ii.** A variedade central local bidimensional $W_{loc}^c(x_{\mu_0})$ de x_{μ_0} existe, não é única, e se $q \in W_{loc}^c(x_{\mu_0})$ então $\varphi(t, q) \rightarrow x_{\mu_0}$ as $t \rightarrow +\infty$.

A Figura 1 ilustra as variedades invariantes do ponto de equilíbrio Hopf supercrítico do tipo-0 em $\mathbb{R}^3$.

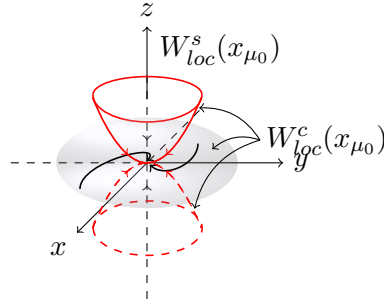


Figura 1: 2 Variedades $W_{loc}^c(x_{\mu_0})$ e $W_{loc}^s(x_{\mu_0})$ para um ponto de equilíbrio Hopf supercrítico do tipo-0 x_{μ_0} do sistema 1 em $\mathbb{R}^3$. $W_{loc}^c(x_{\mu_0})$ não é única. Três possíveis escolhas de $W_{loc}^c(x_{\mu_0})$ são apresentadas na figura.

Seja x_{μ_0} um ponto de equilíbrio Hopf supercrítico do tipo-0 do sistema (1). A região de estabilidade fraca de x_{μ_0} é o conjunto $A_{\mu_0}(x_{\mu_0})$ de pontos $q \in \mathbb{R}^n$ cujas trajetórias convergem para x_{μ_0} quando $t \rightarrow +\infty$, isto é, $A_{\mu_0}(x_{\mu_0}) = \{q \in \mathbb{R}^n : \varphi(t, q) \rightarrow x_{\mu_0} \text{ quando } t \rightarrow +\infty\}$. A região de estabilidade fraca $A_{\mu_0}(x_{\mu_0})$ é um conjunto invariante e aberto. O fecho $\overline{A_{\mu_0}(x_{\mu_0})}$ é invariante e a fronteira da região de estabilidade fraca $\partial A_{\mu_0}(x_{\mu_0})$ é um conjunto

fechado e invariante. Uma caracterização completa da fronteira da região de estabilidade fraca de uma classe de sistemas dinâmicos autônomos não lineares foi apresentada em [6]. Considere o sistema não linear (1) e seja x_{μ_0} um ponto de equilíbrio Hopf supercrítico do tipo-0 do sistema (1) satisfazendo as seguintes suposições: **(S1)** Todos elementos críticos em $\partial A_{\mu_0}(x_{\mu_0})$ são hiperbólicos; **(S2)** As variedades estável e instável dos elementos críticos em $\partial A_{\mu_0}(x_{\mu_0})$ satisfazem a condição de transversalidade; e **(S3)** Trajetórias em $\partial A_{\mu_0}(x_{\mu_0})$ se aproximam de um dos elementos críticos quando $t \rightarrow +\infty$.

Sob as suposições **(S1)**-**(S3)**, o resultado a seguir fornece uma caracterização completa da fronteira da região de estabilidade fraca de um ponto de equilíbrio Hopf supercrítico do tipo-0 em termos das variedades invariantes dos elementos críticos hiperbólico em $\partial A_{\mu_0}(x_{\mu_0})$.

Teorema 2.1. (*Caracterização da Fronteira da Região de Estabilidade Fraca*) [6] *Seja x_{μ_0} um ponto de equilíbrio Hopf supercrítico do tipo-0 de (1) e $A_{\mu_0}(x_{\mu_0})$ sua região de estabilidade fraca. Se as suposições **(S1)** e **(S3)** são satisfeitas, então $\partial A_{\mu_0}(x_{\mu_0}) \subset \bigcup_i W^s(\psi_{\mu_0}^i)$ onde $\psi_{\mu_0}^i$, $i = 1, 2, \dots$ são os elementos críticos hiperbólicos em $\partial A_{\mu_0}(x_{\mu_0})$. Se a suposição **(S2)** é satisfeita, então $\partial A_{\mu_0}(x_{\mu_0}) = \bigcup_i W^s(\psi_{\mu_0}^i)$.*

Neste trabalho, exploraremos o comportamento da fronteira da região de estabilidade fraca da classe de sistemas dinâmicos autônomos dependentes de um parâmetro (1). Ou seja, estudaremos uma caracterização global da fronteira da região de estabilidade fraca $A(p)$ sob a variação de parâmetros quando elementos críticos hiperbólicos do tipo- k , com $k \geq 1$ está na fronteira da região de estabilidade fraca.

O Teorema da Função Implícita garante a persistência dos elementos crítico hiperbólicos $\psi_{\mu_0}^i$, $i = 1, \dots, k$, sob pequenas variações do parâmetro μ . Ou seja, para valores de μ próximos a μ_0 , continuam existindo elementos crítico hiperbólicos perturbados $\psi_{\mu_*}^i$, $i = 1, \dots, k$, na vizinhança dos elementos críticos hiperbólicos $\psi_{\mu_0}^i$, $i = 1, \dots, k$. Para estudarmos o comportamento da fronteira da região de estabilidade fraca na presença de apenas elementos críticos hiperbólicos, admitiremos as afirmações **(S1)**-**(S3)**. Em [5], o Teorema 9.1.3 garante a persistência dos elementos críticos do sistema dinâmico autônomo (1) sob pequenas perturbações do parâmetro μ .

3 Caracterização da Fronteira da Região de Estabilidade na Vizinhança de valor de parâmetro de bifurcação Hopf do tipo-0

Nesta seção, resultados inéditos da caracterização da fronteira da região de estabilidade fraca numa vizinhança pequena do parâmetro μ próxima ao parâmetro μ_0 de bifurcação Hopf supercrítico do tipo-0 é apresentada.

Sejam x_{μ_0} um ponto de equilíbrio Hopf supercrítico do tipo-zero de (1) e $A_{\mu_0}(x_{\mu_0})$ sua região de estabilidade fraca para um parâmetro fixo $\mu = \mu_0$. O próximo resultado estabelece o comportamento da fronteira da região de estabilidade fraca na vizinhança do parâmetro de Bifurcação Hopf supercrítico do tipo-zero.

Teorema 3.1. (*Fronteira da região de estabilidade de um ponto de equilíbrio Hopf Supercrítico do tipo-zero numa vizinhança desse equilíbrio*) Seja (μ_0, x_{μ_0}) um ponto de bifurcação Hopf supercrítico do tipo-zero de (1) para $\mu = \mu_0$. Seja $A_{\mu_0}(x_{\mu_0})$ a região de estabilidade fraca do ponto de equilíbrio Hopf supercrítico do tipo-zero de (1) para $\mu = \mu_0$. Admita que as suposições: **(B1)** Todos elementos críticos em $\partial A_{\mu}(x_{\mu})$ são hiperbólicos; **(B2)** As variedades estável e instável dos elementos críticos em $\partial A_{\mu}(x_{\mu})$ satisfazem a condição de transversalidade; e **(B3)** Trajetórias em $\partial A_{\mu}(x_{\mu})$ se aproximam de um dos elementos críticos quando $t \rightarrow +\infty$, sejam satisfeitas para todo μ pertencente a um intervalo aberto I contendo $\mu = \mu_0$, exceto em μ_0 onde as condições **(S1)**, **(S2)** e **(S3)** são satisfeitas. Suponha também, que para todo $\mu \in I$, todos os elementos críticos do sistema perturbado $\dot{x} = f(x, \mu)$ sejam elementos críticos perturbados originados do sistema $\dot{x} = f(x, \mu_0)$. Seja $\psi_{\mu_0}^*$ um elemento crítico hiperbólico tal que $\psi_{\mu_0}^* \in \partial A_{\mu_0}(x_{\mu_0})$ onde $\partial A_{\mu_0}(x_{\mu_0})$ é a fronteira da região de estabilidade fraca. Então existe $\epsilon > 0$ tal que

- (i) Existem uma órbita fechada hiperbólica Ω_{μ}^H de tipo-zero e um ponto de equilíbrio hiperbólico do tipo-2, x_{μ}^H para todo $\mu \in (\mu_0, \mu_0 + \epsilon_1)$ e um ponto de equilíbrio hiperbólico do tipo-zero x_{μ}^H para todo $\mu \in (\mu_0 - \epsilon_1, \mu_0)$.
- (ii) Para $\mu \in (\mu_0 - \epsilon, \mu_0)$ temos que $\psi_{\mu}^* \in \partial A_{\mu}(x_{\mu}^H)$ onde x_{μ}^H é o equilíbrio assintoticamente estável originado da bifurcação de Hopf supercrítica do tipo-zero.
- (iii) Para $\mu \in (\mu_0, \mu_0 + \epsilon)$ temos que $\psi_{\mu}^* \in \partial A_{\mu}(\Omega_{\mu}^H)$ onde Ω_{μ}^H é o ciclo limite estável originado da bifurcação de Hopf supercrítica do tipo-zero e $x_{\mu}^H \in \partial A_{\mu}(\Omega_{\mu}^H) \cap A_{\mu}^Q(\Omega_{\mu}^H)$, onde $A_{\mu}^Q(\Omega_{\mu}^H)$ é a região de quase-estabilidade do ciclo limite estável Ω_{μ}^H .

Observe do Teorema 3.1 que para $\mu \in (\mu_0 - \epsilon, \mu_0)$, os elementos críticos hiperbólicos perturbados ψ_{μ}^* do tipo- k , com $1 \leq k \leq n - 2$, na vizinhança em U pertencem à fronteira da região de estabilidade do equilíbrio assintoticamente estável originado da bifurcação de Hopf supercrítica do tipo-zero x_{μ}^H . Em $\mu = \mu_0$, o ponto de equilíbrio x_{μ}^H perde a hiperbolicidade em U , ocasionando o surgimento do ponto de equilíbrio Hopf supercrítico do tipo-0 x_{μ_0} . Para valores de $\mu > \mu_0$, o ponto de equilíbrio hiperbólico do tipo-zero x_{μ}^H em U perde estabilidade e surge uma órbita fechada hiperbólica Ω_{μ}^H de tipo-zero em U tal que os elementos críticos perturbados pertencem à fronteira da região de estabilidade de Ω_{μ}^H e x_{μ}^H pertence a interseção da fronteira $\partial A_{\mu}(\Omega_{\mu}^H)$ e da região de quase-estabilidade do ciclo limite estável $A_{\mu}^Q(\Omega_{\mu}^H)$. O Teorema 3.1 estabelece que tanto a região de estabilidade quanto a fronteira da região de estabilidade sofrem mudanças quando o parâmetro varia no intervalo $(\mu_0 - \epsilon, \mu_0 + \epsilon)$. O próximo resultado estabelece a caracterização da fronteira da região de estabilidade fraca numa vizinhança pequena do valor de parâmetro de bifurcação Hopf supercrítico do tipo-0.

Teorema 3.2. (*Caracterização da fronteira da região de estabilidade de um ponto de bifurcação Hopf Supercrítico do tipo-zero numa vizinhança desse equilíbrio*) Seja (μ_0, x_{μ_0}) um ponto de bifurcação Hopf supercrítico do tipo-zero de (1) para $\mu = \mu_0$. Seja $A_{\mu_0}(x_{\mu_0})$ a região de estabilidade fraca do ponto bifurcação Hopf supercrítico do tipo-zero de (1) para $\mu = \mu_0$. Admita que as suposições **(B1)**, **(B2)** e **(B3)** sejam satisfeitas para todo μ pertencente a um intervalo aberto I contendo $\mu = \mu_0$, exceto em μ_0 onde as condições **(S1)**, **(S2)** e **(S3)** são satisfeitas. Suponha também, que para todo

$\mu \in I$, todos os pontos de equilíbrios do sistema perturbado $\dot{x} = f(x, \mu)$ são pontos de equilíbrios perturbados originados do sistema $\dot{x} = f(x, \mu_0)$. Se $r_{\mu_0}^i$ são os elementos críticos hiperbólicos na fronteira da região de estabilidade fraca $\partial A_{\mu_0}(x_{\mu_0})$. Então: **(i)** Para $\mu = \mu_0$ temos $\partial A_{\mu_0}(x_{\mu_0}) = \bigcup_i W_{\mu_0}^s(r_{\mu_0}^i)$; **(ii)** Existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $\mu \in (\mu_0 - \epsilon, \mu_0)$, $\partial A_{\mu}(x_{\mu}^H) = \bigcup_i W_{\mu}^s(r_{\mu}^i)$ onde r_{μ}^i , $i = 1, 2, \dots, k$ são os elementos críticos hiperbólicos perturbados em $\partial A_{\mu}(x_{\mu}^H)$ e x_{μ}^H é o ponto de equilíbrio hiperbólico assintoticamente estável originado da bifurcação Hopf supercrítica do tipo-zero; **(iii)** Existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $\mu \in (\mu_0, \mu_0 + \epsilon)$, $\partial A_{\mu}(\Omega_{\mu}^H) = \bigcup_i W_{\mu}^s(r_{\mu}^i) \bigcup_i W_{\mu}^s(x_{\mu}^H)$ e $\partial A_{\mu}^Q(\Omega_{\mu}^H) = \bigcup_i W_{\mu}^s(r_{\mu}^i)$ onde r_{μ}^i , $i = 1, 2, \dots, k$ são os elementos críticos hiperbólicos perturbados em $\partial A_{\mu}(x_{\mu}^H)$ e Ω_{μ}^H e x_{μ}^H são o ciclo limite estável e o ponto de equilíbrio hiperbólico do tipo- $(k+2)$, com $0 \leq k \leq n-2$, originados da bifurcação Hopf supercrítica do tipo-zero e $\partial A_{\mu}^Q(\Omega_{\mu}^H)$ é a fronteira da região de quase-estabilidade de Ω_{μ}^H .

4 Exemplos

Considere o sistema Predador-Presa em $\mathbb{R}^2$ extraído de [3], dado por $\dot{x} = x - \frac{xy}{1 + 0.5x} - \mu x^2$, $\dot{y} = -y \left(1 - \frac{x}{1 + 0.5x} \right)$, onde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $\mu \in \mathbb{R}$. Para $\mu_0 = \frac{1}{6}$, o sistema possui três pontos de equilíbrio, são eles: dois pontos de equilíbrio hiperbólicos do tipo-1, $x_1 = (0, 0)$ e $x_2 = (6, 0)$, e um ponto de equilíbrio Hopf supercrítico do tipo-zero, $x_{\mu_0} = \left(2, \frac{4}{3} \right)$. A fronteira da região de estabilidade fraca $\partial A_{\mu_0}(x_{\mu_0})$ do ponto de equilíbrio Hopf supercrítico do tipo-0 $x_{\mu_0} = \left(2, \frac{4}{3} \right)$ está contida na união da variedade estável $W_{\mu_0}^s(x_1)$ do ponto de equilíbrio hiperbólico do tipo-1 $x_1 = (0, 0)$ com a variedade estável $W_{\mu_0}^s(x_2)$ do ponto de equilíbrio hiperbólico do tipo-1 $x_2 = (6, 0)$, ver Figura 2(b). Para $\mu = \frac{8}{100}$, o sistema possui quatro elementos críticos, são eles: dois pontos de equilíbrio hiperbólicos do tipo-1, $x_1 = (0, 0)$ e $x_2 = \left(\frac{25}{2}, 0 \right)$, um ponto de equilíbrio hiperbólico do tipo-2, $x_{\mu}^H = \left(2, \frac{42}{25} \right)$ e uma órbita periódica assintoticamente estável ϕ_{μ}^H . Os elementos críticos x_{μ}^H e ϕ_{μ}^H foram originados do ponto de equilíbrio Hopf supercrítico do tipo-zero em uma bifurcação Hopf supercrítica do tipo-zero. Os pontos de equilíbrio hiperbólicos x_1 , x_2 e x_{μ}^H pertencem à fronteira da região de estabilidade $\partial A_{\mu}(\phi_{\mu}^H)$, de acordo com o Teorema 3.1, ver Figura 2(a). Para $\mu = \frac{4}{10}$, o sistema possui três pontos de equilíbrio, são eles: dois pontos de equilíbrio hiperbólicos do tipo-1, $x_1 = (0, 0)$ e $x_2 = \left(\frac{5}{2}, 0 \right)$, e um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, $x_{\mu}^H = \left(2, \frac{2}{5} \right)$. O ponto de equilíbrio x_{μ}^H é originado do ponto de equilíbrio Hopf supercrítico do tipo-zero em uma bifurcação Hopf supercrítica do tipo-zero. Os pontos de equilíbrio hiperbólicos $x_1 = (0, 0)$ e $x_2 = \left(\frac{5}{2}, 0 \right)$ pertencem à fronteira da região de estabilidade $\partial A_{\mu}(x_{\mu}^H)$, de acordo com o Teorema 3.1, ver Figura 2(c).

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio e fundos fornecidos pelo IFBA - Campus Eunápolis, Universidade de São Paulo e FAPESP sob o subsídio 2014/50851-0.

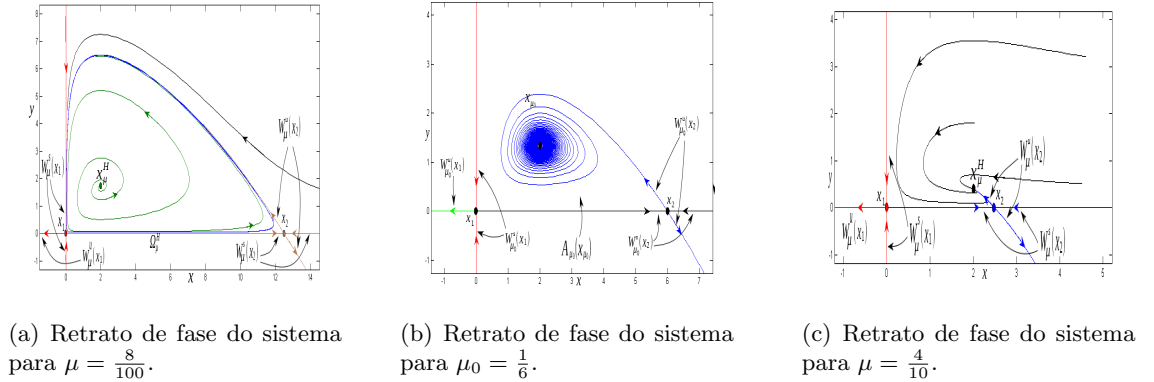


Figura 2: 2(a) A fronteira da região de estabilidade $\partial A_\mu(\Omega_\mu^H)$ está contida na união de $W_\mu^s(x_1)$ com $W_\mu^s(x_2)$. 2(b) A fronteira da região de estabilidade $\partial A_{\mu_0}(x_{\mu_0})$ está contida na união de $W_{\mu_0}^s(x_1)$ com $W_{\mu_0}^s(x_2)$. 2(c) A fronteira da região de estabilidade $\partial A_\mu(x_\mu^s)$ está contida na união de $W_\mu^s(x_1)$ com $W_\mu^s(x_2)$.

Referências

- [1] F. M. Amaral and L. F. C. Alberto, Stability Region Bifurcations of Nonlinear Autonomous Dynamical Systems: Type-Zero Saddle-Node Bifurcations, IJRNC, vol. 21, 591-612, (2011).
- [2] F. M. Amaral e L. F. C. Alberto, Bifurcações Sela-Nó da Região de Estabilidade de Sistemas Dinâmicos Autônomos não Lineares. TEMA, vol. 17, 71-80, (2016).
- [3] J. A. Véri, Estabilidade global e bifurcação de Hopf em um modelo de HIV baseado em sistemas do tipo Lotka-Volterra, Dissertação de Mestrado, UNESP, (2013).
- [4] J. R. R. Gouveia Jr., F. M. Amaral and L. F. C. Alberto, Stability boundary characterization of nonlinear autonomous dynamical systems in the presence of a supercritical Hopf equilibrium point, IJBC, vol. 23, 1350196-1-13, (2014), DOI: 10.1142/S0218127413501964.
- [5] J. R. R. Gouveia Jr., Bifurcações da Região de Estabilidade Induzidas por Bifurcações Locais do Tipo Hopf, Tese de Doutorado, USP, (2015).
- [6] J. R. R. Gouveia Jr., F. M. Amaral e L. F. C. Alberto, Fronteira e Região de Estabilidade Fraca de um Ponto de Equilíbrio Hopf Supercrítico do tipo zero, DINCON, (2015).
- [7] J. Sotomayor, Generic bifurcations of dynamical systems, Dynamical Systems, New York: Academic Press, 549-560, (1973).
- [8] Y. A. Kuznetsov, Elements of Applied Bifurcation Theory, New York: Springer-Verlag, (1995).