



Identificação de modelo discreto linear de um servomecanismo usando mínimos quadrados estendido recursivo

Tarcisio Carlos F. Pinheiro¹, Bruno G. Dutra², Luís Augusto M. de Castro³, Maryson Da S. Araújo⁴, Mauro G. da Silva⁵, Antonio da S. Silveira⁶

Laboratório de Controle e Sistemas, Universidade Federal do Pará, Belém, Pará, Brasil

Resumo. Este artigo tem como objetivo demonstrar como obter o modelo ARMAX (*Auto-Regressive Moving Average with eXogenous Input*) de um servo mecanismo. Para isso, o estimador de Mínimos Quadrados Estendido Recursivo (MQER) é utilizado. Este tipo de identificação é de grande importância quando são utilizados os controladores preditivos baseados em modelo. Em especial para os controladores preditivos estocásticos que utilizam o polinômio $C(z^{-1})$ para obter representação da média móvel do ruído. Neste trabalho os testes experimentais são realizados em uma planta didática denominada RAJG (*Robot Arm Joint Gripper*), composta de um servo motor RC (*Radio Control*), uma garra robótica e um Arduino.

Palavras-chave. Identificação de sistemas, servo motor RC, modelo discreto, mínimos quadrados estendido recursivo.

1 Introdução

Existem inúmeros métodos para a estimação de modelos discretos de sistemas lineares, porém o método de estimação MQR (*Mínimos Quadrados Recursivo*) e suas variantes são os mais utilizados para a identificação de sistemas. O método MQR foi desenvolvido no final do século XVIII por Karl Friedrich Gauss para prever a trajetória de planetas e cometas e atualmente é utilizado na obtenção de modelos matemáticos nas mais diversas áreas do conhecimento [4, 5].

Com o aumento da complexidade dos processos industriais e a exigência de uma maior precisão e velocidade com o objetivo de aumentar a produção e a eficiência dos processos. Se faz necessário a aplicação de técnicas de controle avançadas, como por exemplo,

¹tpinheiro@ufpa.br

²brunodutra@ufpa.br

³luismesquita@ufpa.br

⁴maryson@ufpa.br

⁵maurogomes@ufpa.br

⁶asilveira@ufpa.br

os controladores preditivos baseados em modelo (MPC - *Model Predictive Control*). Os MPC são controladores que atuam na planta a partir de previsões baseadas no modelo do processo. Para essa classe de controladores a identificação do modelo discreto da planta é de suma importância para a sua implementação. Diferente do tradicional controle PID (*Proportional Integral Derivative*) que não é uma técnica baseada no modelo e sim em ganhos obtidos através de análises da dinâmica do processo.

O modelo ARMAX (*Auto-Regressive Moving Average with eXogenous Input*) é principalmente utilizado em controladores MPC, onde podemos destacar o GMVSS (Generalized Minimum Variance Control in State Space) [8] e UHPC (Unrestricted Horizon Predictive Control) [9], que utilizam o polinômio $C(z^{-1})$ como uma forma de representar a parcela estocástica do ruído no processo, assim podendo obter melhores índices de desempenho e variância na malha de controle.

Este trabalho tem como principal contribuição a identificação paramétrica de um servomecanismo. Para isso, utiliza-se um sinal PRBS (*Pseudo-Random Binary Signal*) sobreposto ao sinal de entrada para forçar o sistema a revelar suas características dinâmicas como é demonstrado em [5]. Então, por meio dos dados de entrada e saída do sistema é obtido um modelo discreto do processo via estimador de Mínimos Quadrados Estendido Recursivo (MQER). Este método serve para identificar um modelo ARMAX, o qual é possível obter os polinômios $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$ e $C(z^{-1})$. Sendo $C(z^{-1})$ a média móvel do ruído utilizado para o controle *estocástico*. Os teste práticos do algoritmo MQER foram realizados em uma planta denominada RAJG (*Robot Arm Joint Gripper*), a qual é composta de uma garra robótica, um servo motor, ponte-H e um Arduino.

O trabalho está dividido da seguinte forma: inicialmente na seção 2 trata-se da teoria e procedimentos para a identificação de um modelo adequado do sistema; na seção 3 é apresentado a planta didática RAJG projetada para os testes experimentais; o projeto de um sinal do tipo PRBS adequado para a identificação do sistema é feito na seção 4; os resultados são expostos na seção 5 e as conclusões são apresentadas na seção 6.

2 Identificação da Planta

O MQR é indicado para a estimação de sistemas lineares discretos SISO (*Single-Input Single-Output*) com parâmetros desconhecidos invariantes ou variantes no tempo [4,5]. O algoritmo de MQR é dado pelo seguinte conjunto de equações:

$$\varphi(k) = \begin{bmatrix} -y(k-1) & \cdots & -y(k-na) & u(k-1) & \cdots & u(k-nb) \end{bmatrix}^T \quad (1)$$

$$e(k) = y(k) - \theta(k)^T \varphi(k); \quad K(k) = \frac{P(k) \varphi(k)}{\lambda + \varphi(k)^T P(k) \varphi(k)}; \quad (2)$$

$$\theta(k) = \theta(k-1) + K(k) e(k); \quad P(k) = \frac{(I - K(k) \varphi(k)^T) P(k-1)}{\lambda} \quad (3)$$

onde $y(k)$, $u(k)$, $\varphi(k)$, $e(k)$ e $K(k)$ são a saída do sistema, o sinal de entrada, o vetor de regressores, o erro de estimação e o ganho do estimador, respectivamente. $P(k)$ é a matriz

de covariância de ordem $(na + nb) \times (na + nb)$, $\theta(k)$ é o vetor de parâmetros estimados de ordem $(na + nb) \times 1$ e λ é o fator de esquecimento. A influência de tais variáveis iniciais na taxa de convergência dos parâmetros estimados e a parametrização de $P(k)$, $\theta(k)$ e λ do estimador são detalhados em [4] e [5]. Segundo [6] pode-se dividir um modelo em quatro tipos de estrutura envolvendo a planta mais perturbações. Para o caso particular do trabalho, somente duas dessas estruturas são apresentadas:

$$A(z^{-1})y(k) = z^{-d}B(z^{-1})u(k) + w(k); \quad A(z^{-1})y(k) = z^{-d}B(z^{-1})u(k) + C(z^{-1})w(k) \quad (4)$$

sendo $w(k)$ um sinal do tipo ruído branco (sequência aleatória, não correlacionada e de média zero), respectivamente; z^{-1} é o operador de atraso de tempo discreto e d é o atraso de transporte da planta (*delay*). A segunda estrutura é do tipo ARMAX. Para o caso em que o polinômio $C(z^{-1}) = 1$, recai-se na primeira estrutura, que é do tipo ARX (*Auto-Regressive with eXogenous Input*) [4, 7].

Os polinômios $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$ e $C(z^{-1})$ são definidos como:

$$\begin{aligned} A(z^{-1}) &= 1 + a_1z^{-1} + \dots + a_{na}z^{-na}; \quad B(z^{-1}) = b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_{nb}z^{-nb}; \\ C(z^{-1}) &= 1 + c_1z^{-1} + \dots + c_{nc}z^{-nc} \end{aligned} \quad (5)$$

Para a primeira estrutura utiliza-se o MQR, enquanto que para a segunda utiliza-se o MQER. Caso se deseje estimar os parâmetros de uma estrutura na forma da Equação 5, deve-se fazer a seguinte alteração no algoritmo do estimador MQR:

$$\varphi(k) = \begin{bmatrix} -y(k-1) & \dots & -y(k-na) & u(k-1) & \dots & u(k-nb) & w(k-1) & \dots & w(k-nc) \end{bmatrix}^T \quad (6)$$

Agora a matriz de covariância $P(k)$ é de ordem $(na + nb + nc) \times (na + nb + nc)$ e o vetor de parâmetros estimados $\theta(k)$ é de ordem $(na + nb + nc) \times 1$. Feita essa alteração, deve-se seguir os mesmos passos descritos no algoritmo do MQR para obter uma correta estimação dos parâmetros da planta.

A identificação da planta é feita utilizando o estimador MQER. Selecionou-se um modelo linear discreto de segunda ordem para representar a dinâmica da planta. O modelo linear da equação de diferença é:

$$\begin{aligned} y(k) &= -a_1y(k-1) - a_2y(k-2) + b_0u(k-1) + b_1u(k-2) + \\ &\quad c_1w(k-1) - c_2w(k-2) + w(k) \end{aligned} \quad (7)$$

Normalmente são levantados modelos de diferentes ordens para se representar a relação de causa e efeito entre entrada e saída da planta, todavia sabe-se *a priori* que um modelo de segunda ordem é adequado para a tarefa de identificação do servomecanismo utilizado neste trabalho.

A identificação em questão é do tipo CC (*Caixa Cinza*), onde já sabemos que a planta é do tipo-1, ou seja, uma planta com um integrador natural (um pólo localizado em 1 no círculo unitário) a principal característica de servomecanismos. Então, altera-se o polinômio $A(z^{-1})$ para,

$$A(z^{-1}) = 1 + (a_1 - 1)z^{-1} - a_1z^{-2} \quad (8)$$

Consequentemente também sendo necessário fazer uma pequena modificação no vetor $\theta(k)$ para,

$$\theta(k) = \begin{bmatrix} (a_1 - 1) & -a_1 & b_0 & b_1 & c_1 & c_2 \end{bmatrix}^T \quad (9)$$

3 Robot Arm Joint Gripper

O RAJG é uma planta didática portátil baseado em um servo motor RC que controla uma garra robótica. Para desenvolver uma planta didática RAJG é necessário fazer uma modificação no servo motor RC. O qual consiste em retirar o circuito de controle que já vem de fábrica, soldar um fio no pino de saída da tensão do potenciômetro do servo motor para conectá-lo ao conversor analógico-digital do Arduino e assim fechar a malha de controle. Para finalizar, também deve-se conectar os terminais do motor em uma ponte-H. O RAJG usa um Arduino para fazer o envio e aquisição de dados para o servo motor. Essa planta didática é uma opção simples e barata que permite aos usuários obter rapidamente uma planta física real, a fim de testar a modelagem, controle e algoritmos de estimação. Na Figura 1 é apresentado a planta didática RAJG.

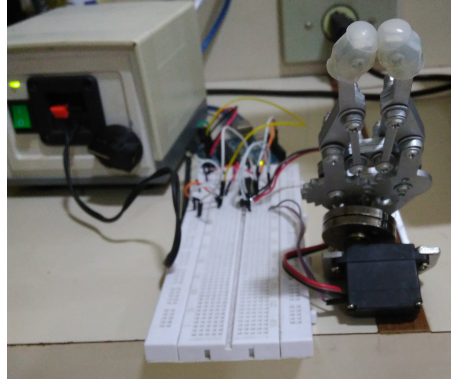


Figura 1: Robot Arm Joint Gripper

4 Projeto do Sinal do Tipo PRBS

A qualidade da estimação depende diretamente se o sinal de entrada consegue excitar adequadamente as frequências naturais do sistema, isso para forçar o sistema a revelar as suas características dinâmicas. Para excitar adequadamente os modos de oscilação da planta dentro de uma faixa de frequência, projetou-se um sinal do tipo PRBS em ambiente computacional com N células compondo o registrador de deslocamento e utilizando um intervalo de amostragem T_{ws} (*tempo de chaveamento*), a partir das recomendações feitas por [6].

Um sinal PRBS assume somente dois valores: $+V$ e $-V$; esses valores mudam a cada T_{ws} intervalos discretos de tempo e essas mudanças acontecem de forma determinística pseudoaleatória. A sequência gerada pelo registrador de deslocamento é periódica, com

período NT_{ws} (onde N é o número de células do registrador de deslocamento), porém o período pode ser feito suficientemente extenso de tal modo que possa ser considerado aleatório para aplicação. A sequência de máximo comprimento é a mais comumente usada, onde $n = 2^{N-1}$. Então, o PRBS gerado é sobreposto ao sinal de entrada podendo assim excitar as frequências de interesse do ponto de operação.

Para projetar um sinal PRBS adequado para a dinâmica do sistema, calcula-se a frequência natural (ω_n) da planta, que pode ser obtido através de uma análise da resposta ao impulso. Foi utilizado uma entrada do tipo impulso isso porque a planta abordada neste trabalho já possui um integrador natural em malha aberta. Na Figura 3 é possível verificar a resposta da planta para uma entrada do tipo impulso.

Usando as equações em 10 podemos calcular ω_n aproximada. Onde t_1 é o tempo para a saída alcançar 45% da mudança total final; t_2 é o tempo para a saída alcançar 15% da mudança total final; t_3 é o tempo para alcançar 75% da mudança final. Este procedimento gráfico apresentado por MollenKamp [6] pode ser usado para sistemas que apresentam coeficiente de amortecimento $\zeta \geq 1$ que é caso do sistema utilizado neste trabalho.

$$X = \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1}; \zeta = \frac{0.0805 - 5.547(0.475 - X)^2}{(X - 0.356)}; \omega_n = \frac{f_2(\zeta)}{t_3 - t_1} \quad (10)$$

Fazendo os cálculos das equações acima vemos que a frequência natural do sistema é aproximadamente $\omega_n = 8.8$ rad/s. Então devemos encontrar as frequências mínimas e máximas do sistema para poder projetar o sinal *PRBS*. Para isso é estipulado um valor 20 vezes menor que a frequência do sistema para $f_{\min}$ e 5 vezes maior para $f_{\max}$. A frequência em Hertz pode ser calculada por meio de $\omega_n = 2\pi f$. Através das equações abaixo, podemos calcular as frequências máximas e mínimas desejadas.

$$f_{\min} = \frac{\omega_n}{20 \times 2\pi}; f_{\max} = \frac{5\omega_n}{2\pi} \quad (11)$$

Agora para finalizar o sinal PRBS é preciso calcular N que é o número de células do registrador de deslocamento. Como N é um número inteiro, então:

$$N = \text{int}\left(\frac{1}{f_{\min} \times T_{ws}} + 1\right) + 1; T_{ws} = \frac{1}{3 \times f_{\max}} \quad (12)$$

O sinal PRBS projetado possui as seguintes características: $f_{\min} = 0.069$ Hz, $f_{\max} = 6.94$ Hz; $N=9$; $T_{ws} = 0.04$ s e Amplitude de 0.08 volts.

5 Resultados

Após calcular os parâmetros do sinal PRBS e aplicá-lo na entrada da planta para obter os dados da saída, utiliza-se o estimador MQR para levantar um modelo ARMAX da planta. Neste experimento foram analisada 10000 amostras obtidas com uma amostragem de $T_s = 0.01$ s, com um sinal de entrada do tipo degrau unitário sobrepostos ao sinal PRBS projetado com os parâmetros calculados, como demonstra a Figura 2. O modelo obtido através do estimador MQR com PRBS é dado por:

$$\begin{aligned} A(z^{-1}) &= 1 - 1.466z^{-1} + 0.4662z^{-2}; B(z^{-1}) = 0.006341 + 0.01433z^{-1}; \\ C(z^{-1}) &= 1 - 0.2407z^{-1} + 0.0151z^{-2} \end{aligned} \quad (13)$$

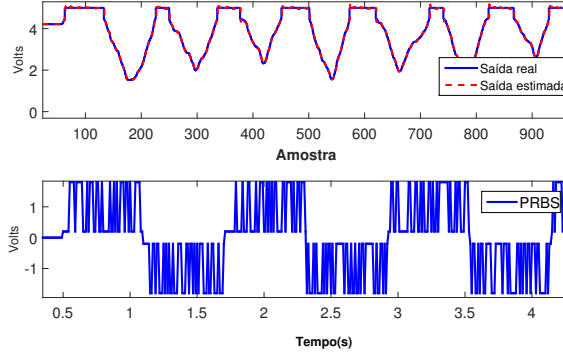


Figura 2: Identificação MQER com sinal PRBS

A Figura 3 mostra a resposta ao impulso do sistema identificado, onde é possível comparar o resultado do modelo obtido na equação 13 com a resposta do sistema real.

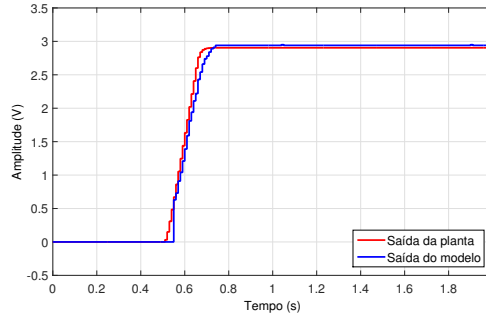


Figura 3: Resposta ao impulso do sistema identificado vs. planta real

Após a identificação do modelo discreto da planta, é necessário qualificar o modelo estimado através de técnicas de validação de modelo [5]. Onde podemos destacar o coeficiente

de correlação múltipla - $R^2 = 1 - \frac{\sum_{k=1}^m [y(k) - \hat{y}(k)]^2}{\sum_{k=1}^m [y(k) - \bar{y}]^2}$. Onde $\hat{y}(k)$ é a saída estimada e $\bar{y}(k)$

é a média das m amostras obtidos no experimento. Quando o valor calculado é $R^2 = 1$, podemos afirmar uma exata identificação do modelo estimado em relação ao modelo real. Já para valores onde $0.9 \leq R^2 \leq 1$ podemos afirmar que o modelo estimado é suficiente confiável. Porém para valores menores que 0.9 o modelo estimado não é confiável [5]. O sistema estimado neste trabalho obteve um $R^2 = 0.9957$, onde podemos afirmar que o modelo estimado é suficiente confiável.

6 Conclusões

Os resultados obtidos mostraram-se adequados e satisfatórios para a dinâmica da planta. O estimador MQER em conjunto sinal PRBS sobreposto ao sinal de entrada apresentou-se bastante eficaz para a identificação de sistemas SISO. Além do mais, o uso do MQER para obtenção do polinômio $C(z^{-1})$ torna-se de muita importância quando a abordagem estocástica é necessária. Isso tendo em vista técnicas de controle como por exemplo, o GMVSS e UHPC que utilizam a parte estocástica descrita pelo polinômio $C(z^{-1})$.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao apoio financeiro do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEE) da Universidade Federal do Pará (UFPA), a Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e a Fundação Amazônica de Amparo a Estudos e Pesquisa (FAPESPA).

Referências

- [1] K. J. Åström and B. Wittenmark, Adaptive control, Dover Publications, Inc., New York (2008).
- [2] K. J. Åström and B. Wittenmark, A Computer-Controlled Systems: Theory and Design, Dover Publications, Inc., New York (2011).
- [3] D. G. Alciatore, and M. B. Histand, Introdução à Mecatrônica e aos Sistemas de Medições, Comp. AMGH Editora, (2014)
- [4] L. A. Aguirre, Introdução à Identificação de Sistemas: Técnicas Lineares e Não Lineares Aplicadas a Sistemas Reais, Editora UFMG, Belo Horizonte (2015).
- [5] A. A. R. Coelho and L. S. Coelho, Identificação de Sistemas Dinâmicos Lineares, Editora UFSC, Florianópolis (2016).
- [6] I. D. Landau, System Identification and Control Design using P.I.M + Software, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1990).
- [7] L. Ljung and Söderström, Theory and Practice of Recursive Identification, The MIT Press, (1983).
- [8] A. Silveira, R. Trentini, A. Coelho, R. Kutzner and L. Hofmann, Generalized minimum variance control under long-range prediction horizon setups, ISA transactions, Elsevier, vol. 62, 325–332, (2016).
- [9] R. Trentini, A. Silveira, A. Coelho, R. Kutzner and L. Hofmann, On the unrestricted horizon predictive control- A fully stochastic model-based predictive approach, Control Conference (ECC), 2016 European, IEEE 1322–132 (2016)