



Análise do Plano de Fase de um Modelo Não Linear de um Sistema MAGLEV Simplificado.

Gustavo Zanatta Bulhões¹

Faculdade de Engenharia de Bauru, Unesp, Bauru, Sp

Célia Aparecida dos Reis²

Departamento de Matemática, Unesp, Bauru, SP

Suélia de Siqueira Rodrigues Fleury Rosa³

Faculdade de Engenharia, UnB, Gama, DF

Guilherme dos Anjos Guimarães⁴

Faculdade de Engenharia, UnB, Gama, DF

Marina Pinheiro Marques⁵

Faculdade de Engenharia, UnB, Gama, DF

Resumo. O magnetismo atualmente associado ao uso na engenharia de controle moderno é um dos campos de estudo de extrema relevância tendo em vista a possibilidade de construção de sistemas baseados em forças eletromagnéticas que permite a movimentação de sistemas os mais diversos como, por exemplo, os trens de alta velocidade (MAGLEV) e sistemas de colheita de energia. Neste trabalho efetuou-se um estudo do plano de fase de um sistema de levitação magnética já conhecido na literatura, mediante a técnica de Liapunov. Condições necessárias e suficientes para análise de estabilidade assintótica desta dinâmica não linear em função dos parâmetros são obtidas, além de um estudo inicial de aplicação de controle para a estabilização deste sistema, mediante a linearização desta por Taylor em torno de um ponto crítico. Simulações numéricas são apresentadas.

Palavras-chave. Sistema MAGLEV, Sistemas Autônomos, Plano de Fase, Estabilidade assintótica, Linearização.

1 Introdução

Nos dois últimos séculos o magnetismo se tornou parte de importantes estudos no campo da

¹ gustavo-tk@hotmail.com

² celia@fc.unesp.br

³ suelia@unb.br

⁴ dosanjos_guilherme@hotmail.com

⁵ marina.pin.mar@gmail.com

ciência e da tecnologia. Na década de 1840 Faraday e Henry descobriram o fenômeno da indução eletromagnética que mais tarde seria base para a invenção do gerador elétrico. A partir daí surgiram muitas outras descobertas e estudos em torno do magnetismo. Os fenômenos do magnetismo passaram a integrar os livros especializados e encontros e conferências a partir da década de 1950, firmando um importante ramo da física e da ciência [1].

Associado ao uso da engenharia de controle moderno é possível construir sistemas baseados em forças magnéticas que possam movimentar os mais diversos mecanismos, podendo citar como exemplo o projeto do trem MAGLEV, que se baseia no uso da levitação magnética para se movimentar, eliminando o atrito com os trilhos e permitindo uma viagem mais rápida e silenciosa [1].

Analisar e compreender as variáveis e suas implicações no sistema de levitação magnética (MAGLEV) é uma importante contribuição para soluções em tecnologias tais como: transporte – por exemplo, em trens; em saúde – por exemplo em abladores cardíacos e outras aplicações que envolvam algum tipo de vibração, podendo estas serem naturais ou aplicadas externamente.

O estudo de sistemas dinâmicos não lineares autônomos como, por exemplo, o sistema de levitação magnética, baseia-se na determinação de trajetórias no plano de fase. Neste trabalho efetua-se um estudo de um sistema autônomo não linear mediante a técnica de Lyapunov. A construção do plano de fase um sistema de levitação magnética (MAGLEV) não linear simplificado é apresentado, além do estudo da estabilidade assintótica local e estudos iniciais para aplicação de técnicas de controle. **Este trabalho está organizado da seguinte forma: A seção 2 apresenta o modelo do sistema MAGLEV estudado, na seção 3 determinam-se os pontos críticos e sua classificação e efetua-se a análise de estabilidade assintótica. Nas seções 4 e 5 apresentam-se simulações numéricas, a linearização desta dinâmica e um estudo preliminar visando a estabilização deste sistema. Por fim, na seção 6 as conclusões do trabalho.**

2 Modelagem matemática

Neste trabalho utilizou-se o sistema de levitação magnética ECP (Educational Control Product). Os sensores são utilizados para se obter a resposta do sistema com precisão, e que associa a posição do disco magnético. A entrada do sistema é dada por meio da aplicação de uma corrente elétrica nas bobinas [10]. O objetivo deste sistema é estabelecer uma relação de equilíbrio, mantendo o corpo suspenso no ar sem que haja contato direto (forças de campo), conforme Figura 1.



Figura 1: Foto do sistema físico de levitação magnética da ECP [10].

O modelo matemático do sistema dado pela Figura 1, obtido por meio de balanço de forças, é dada por:

$$x''(t) + \frac{c}{m}x'(t) = \frac{F_m}{m} - g \quad (1)$$

sendo $x(t)$ a posição do disco magnético a bobina, $x'(t)$ a velocidade do disco magnético, $x''(t)$ a aceleração do disco magnético, g a aceleração da gravidade, c o coeficiente de atrito do disco com o ar, m a massa do disco magnético e F_m a força magnética aplicada ao disco magnético.

De acordo com [7] a força magnética F_m pode ser escrita na forma:

$$F_m = \frac{i}{a(x+b)^4} \quad (2)$$

sendo que i é a corrente aplicada a bobina, a e b são constantes relacionadas as propriedades magnéticas das bobinas. Assim a Eq. (1) pode ser escrita como:

$$x''(t) = -g - \frac{c}{m}x'(t) + \frac{i}{ma(x+b)^4} \quad (3)$$

definindo os estados x , $\frac{dx}{dt} = y$, a Eq. (3) pode ser escrita no espaço de estados na forma:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{i}{ma(x+b)^4} - g - \frac{c}{m}y \end{aligned} \quad (4)$$

Prova-se que este sistema tem dois pontos críticos, a saber:

$$P_1 = \left(\sqrt[4]{\frac{i}{mag}} - b, 0 \right) \text{ e } P_2 = \left(\sqrt[4]{\frac{i}{mag}} - b, 0 \right). \quad (4-a)$$

Nota-se que os pontos P_1 e P_2 estão fora da origem. Assim, para aplicação da técnica de Lyapunov é necessário que estes sejam transladados para a origem de um novo sistema de coordenadas, no espaço de estado. Neste trabalho, esta análise será efetuada para o ponto P_1 .

3 Análise de Estabilidade Assintótica de P_1

Sejam $u = x - \sqrt[4]{k} + b$ e $v = y$, a translação que transformará o ponto crítico P_1 na origem do plano de variáveis de estado u v. Dos pontos críticos P_1 e P_2 seja:

$$k = \frac{i}{mag}. \quad (5)$$

Reescrevendo a dinâmica de Eq. (4) nas coordenadas (u, v) e considerando a expansão em série de Taylor da parte não linear desta dinâmica translada em torno da origem, obtém-se a dinâmica não linear dada por:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{4g}{\sqrt[4]{k}}u - \frac{c}{m}v + \frac{10g}{\sqrt{k}}u^2 - \frac{20g}{(k)^{\frac{3}{4}}}u^3 + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

A equação característica da matriz Jacobiana do sistema não linear de Eq. (6) e seus autovalores são respectivamente:

$$\lambda^2 - \frac{c}{m}\lambda + \frac{4g}{\sqrt[4]{k}} = 0 \text{ e } \lambda = \frac{c}{2m} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}. \quad (7)$$

Seja Δ o discriminante da Eq. (7). Quando $\Delta = 0$, a equação característica possui um autovalor real de multiplicidade dois, a saber: $\lambda = \frac{c}{2m}$. Além disso:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow c = \pm \frac{4m\sqrt{g}}{8\sqrt{k}} \quad (8)$$

Assim, o ponto de equilíbrio P_1 é classificado como nó instável [9, 7, 4].

Se $\Delta > 0$, a Eq. (7) apresenta dois autovalores reais e distintos, a saber:

$$\lambda_1 = \frac{c}{2m} + \frac{\sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2 - \frac{16g}{4\sqrt{k}}}}{2} \text{ e } \lambda_2 = \frac{c}{2m} - \frac{\sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2 - \frac{16g}{4\sqrt{k}}}}{2}. \quad (9)$$

Além disso:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow -\infty < c < -\frac{4m\sqrt{g}}{8\sqrt{k}} \cup \frac{4m\sqrt{g}}{8\sqrt{k}} < c < \infty. \quad (10)$$

Assim, P_1 é classificado como nó ou sela instável [9, 7, 4] pelo fato do coeficiente de atrito c ser positivo.

Se $\Delta < 0$, a Eq. (7) apresenta dois autovalores complexos conjugados, a saber:

$$\lambda_1 = \frac{c}{2m} + \frac{\sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2 - \frac{16g}{4\sqrt{k}}}}{2} \text{ e } \lambda_2 = \frac{c}{2m} - \frac{\sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2 - \frac{16g}{4\sqrt{k}}}}{2}. \quad (11)$$

Além disso:

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow -\frac{4m\sqrt{g}}{8\sqrt{k}} < c < \frac{4m\sqrt{g}}{8\sqrt{k}}. \quad (12)$$

Assim, se $c \neq 0$, P_1 é espiral instável e se $c = 0$ este ponto crítico pode ser um centro ou um ponto em espiral. Quanto a estabilidade assintótica, nada se pode afirmar, o mesmo pode ser assintoticamente estável, estável mas não assintoticamente estável ou [9, 7, 4].

A análise e classificação do ponto P_2 e o estudo da estabilidade assintótica serão objetos de estudos futuros.

4 Simulação Numéricas

A Figuras 2 e 3 mostram o plano de fase da dinâmica não linear de Eq. (3) em torno de P_1 para os valores de parâmetros adotados na Tabela 1 [7], sendo $\Delta < 0$ e P_1 nas condições de espiral instável de acordo com a Eq. (12).

Neste trabalho o coeficiente c será sempre tomado positivo, mas nas condições obtidas pelas Eq. (8), (10) e (12).

Tabela 1: Valores de Parâmetros [7].

$g[m/s^2]$	$m[kg]$	$c[Ns/m]$	a	b	$i[A]$
9,8	0,12	0,5	0,95	6,28	1,08

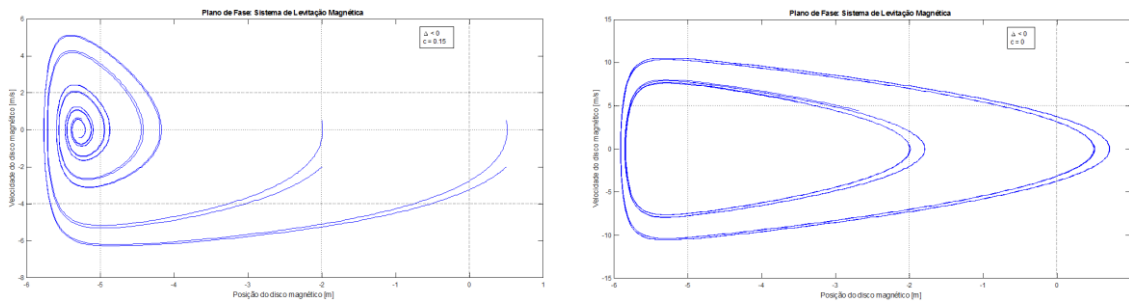


Figura 2: Plano de fase da dinâmica não linear (3) em torno de P_1 .

Nota-se a instabilidade do sistema não linear conforme estudo efetuado na Seção 3. Tendo em vista tais resultados, a próxima Seção objetiva um estudo inicial para uma aplicação futura de um controle para estabilização deste sistema em torno deste ponto.

5 Estabilização do sistema MAGLEV simplificado em torno de P1

Para um estudo visando a estabilização do sistema MAGLEV de equação (6) em torno de P_1 esta dinâmica na forma matricial linearizada pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \text{ e } y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

sendo:

$$u \text{ a entrada de controle, } \alpha = \frac{-4g}{\sqrt[4]{k}}, \beta = -\frac{c}{m}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } C = B^T. \quad (14)$$

Portanto:

$$X(S) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ -\alpha & s - \beta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U \quad (15)$$

$$X(S) = \frac{1}{\alpha + s(\beta - s)} \begin{bmatrix} \beta - s & -1 \\ -\alpha & -s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U \quad (15.a)$$

sendo α e β como em (14). Portanto a função de transferência de (13) é dada por:

$$G(S) = \frac{s}{s^2 - \beta s - \alpha} \quad (16)$$

Fazendo $\alpha = -\omega_n^2$ e $\beta = -2\zeta\omega_n$ na Eq. (16), obtem-se:

$$G(S) = \frac{s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (17)$$

A Figura 3 representa a resposta a uma entrada degrau unitário e a um impulso unitário. Depreende-se destas a estabilidade do sistema após a linearização em torno do ponto de equilíbrio P_1 .

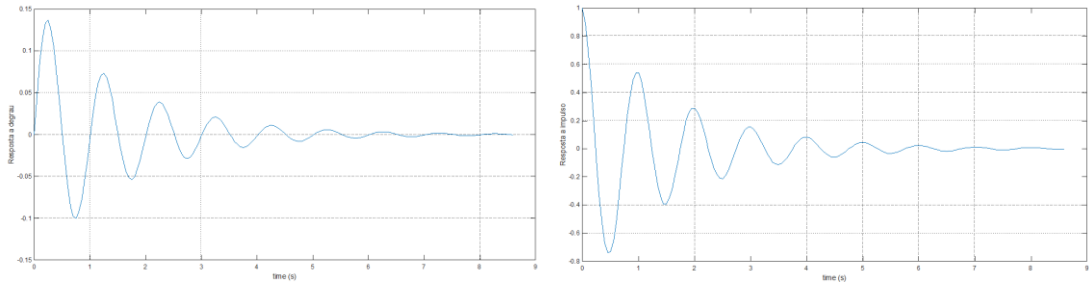


Figura 3: Resposta a uma entrada degrau unitário e a um impulso unitário.

Para determinar as grandezas ζ e ω_n , são válidas as relações [2, 5, 6]:

$$\zeta = \frac{-\ln(\%MP/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\%MP/100)}} \text{ e } \omega_n = \frac{\pi}{t_p \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (18)$$

sendo, MP é o overshoot, dado em porcentagem e t_p é o tempo de pico.

Fazendo: $MP = 10\%$ e $t_p = 0,5$ segundos, tem-se $\zeta = 0,591$ e $\omega_n = 7,789$, portanto

$\alpha = -60,669$ e $\beta = -9,2$. Para esses valores de α e β o novo valor da corrente passa a ser $i = 0,194719A$ e do coeficiente de atrito $c = 1,104Ns/m$.

A Figura 4 representa a resposta a uma entrada degrau unitário para os novos valores de parâmetros.

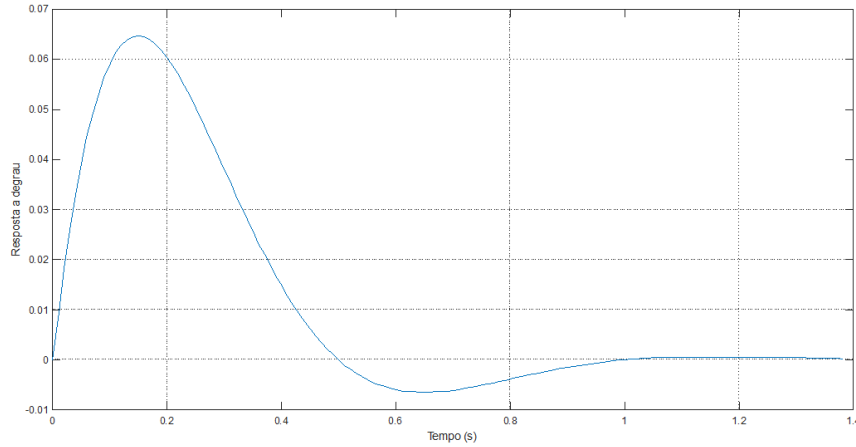


Figura 4: Resposta a uma entrada degrau unitário para $i = 0,194719A$ e $c = 1,104Ns/m$.

Nota-se que os valores de corrente e atrito não apresentam valores muito adequados – valor de corrente muito baixo - que será muito afetada pela fluxo de dispersão e o efeito de correntes parasitas. Além disso, o coeficiente de atrito para essas especificações forneceu um valor elevado foram do limiar adequado (entre 0 e 1), o que se confirma a necessidade de uma análise em parâmetros construtivos e estimados do sistema em uma futura abordagem.

6 Conclusão

Efetuuou-se neste trabalho o estudo do plano de fase de um sistema de levitação magnética não linear (MAGLEV) simplificado via a técnica de Lyapunov. Provou-se que o sistema possui dois pontos críticos. A análise efetuada em torno do ponto P_1 mostrou a instabilidade deste ponto. Desta forma torna-se necessário a aplicação de uma técnica de controle para estabilizar o sistema e estudos iniciais foram efetuados. Para tal considerou-se uma linearização em torno do ponto P_1 . A função de transferência desta linearização foi determinada e uma análise preliminar dos parâmetros de coeficiente de atrito c e da corrente elétrica i objetivando a melhoria do desempenho do sistema em termos de sobressinal e tempo de pico foi efetuada. Foram adotadas condições de desempenho ideais ao sistema e efetuada uma análise de parâmetros (coeficiente de atrito e corrente elétrica) que não responderam com valores adequados, já que esta corrente poderá ser muito afetada pela fluxo de dispersão e pelo efeito de correntes parasitas. Além disso, o coeficiente de atrito para essas especificações forneceu um valor elevado, considerado fora do limiar adequado (entre 0 e 1), o que sugere a necessidade de, em trabalhos futuros, da aplicação de um controle, visando a estabilização do sistema em torno deste ponto crítico.

Referências

- [1] C. P. Albuquerque, S. A. Lemos, Simulação de Controle de Sistema de Levitação Magnética, Trabalho de Conclusão de Curso, UNICEUB, Brasília/DF, (2004).
- [2] R. C. Dorf, R. H. Bishop, Sistemas de Controle Modernos, LTC, Rio de Janeiro, (1998).
- [3] C. H. Edwards, D. E. Penney, Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Contorno, Prentice-Hall do Brasil, Rio de Janeiro, (1995).
- [4] N. F. Ferrara, C. P. C. Prado, Caos Uma Introdução, Edgard Blucher Ltda, São Paulo, (2009).
- [5] N. S. Norman, Engenharia de Sistemas de Controle, LTC, Rio de Janeiro, (2009).
- [6] K. Ogata, Engenharia de Controle Moderno, Pearson, São Paulo, (2005).
- [7] T. R. Parks, Manual For Model 730: Magnetic Levitation System, Quebec, (1999).
- [8] S. S. Rao, Mechanical Vibrations, Pearson Prentice Hall, New Jersey, (2004).
- [9] S. L. Ross, Differential Equations, John Wiley & Sons, Inc., New York, (2007).
- [10] A. I. Vasconcellos, Implementação de Técnicas para o Controle de um Sistema de Levitação Magnética, XVIII Congresso Brasileiro de Automática, Bonito, MS, (2010).