



DINCON 2017

CONFERÊNCIA BRASILEIRA DE DINÂMICA, CONTROLE E APLICAÇÕES
30 de outubro a 01 de novembro de 2017 – São José do Rio Preto/SP

Análise de uma Dinâmica Populacional não Linear Simplificada do *Aedes Aegypti* via Dinâmica Zero

Célia Aparecida dos Reis¹

Faculdade de Ciências, Departamento de Matemática, UNESP, Bauru, SP.

Helenice De Oliveira Florentino Silva²

Instituto de Biociências, Departamento de Bioestatística, UNESP, Botucatu, SP.

Suélia de Siqueira Rodrigues Fleury Rosa³

Faculdade de Engenharia, UnB, Gama, DF

Marina Pinheiro Marques⁴

Faculdade de Engenharia, UnB, Gama, DF

Guilherme dos Anjos Guimarães⁵

Faculdade de Engenharia, UnB, Gama, DF

Resumo. Dengue, Febre Amarela, Chikungunya e Zika são doenças transmitidas pelo mosquito *Aedes aegypti*. O número de pessoas infectadas em países tropicais e subtropicais é imenso, e nos casos mais severos destas doenças, podem ocorrer sequelas musculares, cerebrais, respiratórias e óbito. Há forte evidência de que casos de hidrocefalia sejam devido à infecção pelo vírus causador da Zika. Como não existem vacinas totalmente desenvolvidas contra a maioria destas doenças, agentes sanitários e pesquisadores estão focando seus estudos aos tratamento e controle do vetor transmissor. Neste trabalho, propõe-se uma metodologia para estudo da dinâmica populacional do *Aedes aegypti* na presença de um controle na fase aquática, baseada no uso um sistema de equações diferenciais para descrever a dinâmica populacional e na análise do plano de fase do sistema, via técnica de linearização exata e dinâmica interna. Um controle não linear é proposto, visando a determinação de estratégias de controle populacional deste mosquito.

Palavras-chave. *Aedes Aegypti*, Dinâmica Populacional, Linearização Exata, Dinâmica Interna, Estabilidade.

1 Introdução

A febre amarela, a dengue, a chikungunya e a zika são doenças infecciosas causadas por um vírus da família *Flaviridae* e transmitidas na maioria das vezes pelo mosquito *Aedes aegypti*. Em 45 dias de vida, um único mosquito pode contaminar até 300 pessoas. Estimativas da Organização Mundial da Saúde (OMS) mostram que anualmente, de 50 a 100 milhões de pessoas

¹ celia@fc.unesp.br

² helenice@ibb.unesp.br

³ suelia@unb.br

⁴ marina.pin.mar@gmail.com

⁵ dosanjos_guilherme@hotmail.com

se infectam com dengue em mais de 100 países de quase todos os continentes, cerca de 550 mil doentes são hospitalizados e 20 mil morrem em consequência desta doença ([1 - 3, 5, 10, 12 - 14]).

Atualmente, os controles dos vetores destas doenças mais utilizados são: controles biológico, químico, genético e físico ([4, 6, 7, 9 -13]). Dentre as medidas de controle biológico têm-se a utilização de predadores, como exemplo os peixes larvófagos são recomendados para eliminação de larvas de mosquitos especialmente para bebedouros de grandes animais, fossos de elevador de obras, espelhos d'água/fontes ornamentais, piscinas abandonadas e depósitos de água não potável.

O controle químico utiliza inseticidas para controle da população de mosquitos adultos e larvas, sendo muito utilizado no Brasil ([6]). O controle genético usa técnicas para mudanças genéticas nos mosquitos visando interferir de alguma forma no crescimento populacional destes, como a técnica de esterilização de machos (Sterile Insect Technique). Segundo [13], os mosquitos machos estéreis são liberados no ambiente para que os acasalamentos resultem na produção de ovos inviáveis, diminuindo a população do mosquito ([4]).

[7] propõe um modelo não linear que descreve a dinâmica populacional do *Aedes aegypti*, considerando o ciclo de vida dos mosquitos dividido nas fases aquática e alada. Em [10, 12, 13] estudos deste modelo foram efetuados com entrada de controle na fase aquática. Nesta os insetos estão nos estágios de ovos, larvas e pupas e na fase alada os mosquitos são adultos. Visando a modelagem matemática, [7] dividiu os mosquitos adultos em machos, fêmeas imaturas e fêmeas fertilizadas. No presente trabalho propõe-se uma dinâmica não linear da população do mosquito *Aedes aegypti*, na qual se considera a fase de mosquitos adultos divididos apenas em machos e fêmeas, sem levar em conta a divisão de fêmeas imaturas e fertilizadas. Este procedimento visa uma simplificação no modelo proposto por [7] e a verificação da eficácia da dinâmica proposta. A técnica da linearização exata será a técnica de análise do modelo populacional proposto ([8, 11, 13, 14]).

O estudo do plano de fase desta dinâmica será efetuado objetivando um conhecimento mais detalhado deste modelo não linear, além da utilização da dinâmica interna desse sistema para análise de estabilidade assintótica. Exemplos numéricos são apresentados, visando a comparação dos resultados obtidos com os do modelo matemático analisado em [10, 13, 14].

Este trabalho encontra-se organizado da seguinte forma: na Seção 1 apresenta-se o modelo matemático proposto, na Seção 2 efetua-se a linearização entrada-saída desta dinâmica não linear. Na Seção 3 efetua-se a análise da dinâmica interna, da dinâmica zero e da estabilidade assintótica local, na 4 as simulações numéricas e na 5 as conclusões do trabalho.

2 O Modelo Populacional Proposto Para o *Aedes Aegypti*

O modelo baseado em [7], para descrever a dinâmica populacional do mosquito *Aedes aegypti*, é apresentado a seguir:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -(\gamma + \mu_1)x_1 + \phi x_2 + \left(-\frac{\phi}{C}\right)x_1x_2 - x_1u(t) \\ \dot{x}_2 = r\gamma x_1 - \mu_2x_2 \\ \dot{x}_3 = (1-r)\gamma x_1 - \mu_3x_3 \end{cases} \quad (1)$$

sendo $x_1(t)$ a densidade de indivíduos da população na fase aquática (ovos, larvas e pupas), $x_2(t)$ a densidade de indivíduos da população de mosquitos fêmeas, $x_3(t)$ a densidade de indivíduos da população de mosquitos machos (macho natural). As taxas de mortalidade associadas com cada segmento da população (aquática, fêmeas e machos), são denotadas respectivamente por μ_1 , μ_2 e μ_3 . $u(t)$ é a variável associada ao controle na fase aquática. A taxa de oviposição de fêmeas fertilizadas $x_3(t)$ é proporcional a sua densidade, mas também dependerá do número de criadouros e disponibilidade de alimento e no modelo é dada por $\left(1 - \frac{\phi}{C}\right)$ sendo ϕ a taxa de oviposição

intrínseca e C a capacidade do meio, relacionada com o número de nutrientes, espaço, etc. A variável γ é a taxa per capita com que os mosquitos na fase aquática passam para a fase alada, sendo que uma proporção r são de fêmeas e $(1 - r)$ são de machos.

Pode-se escrever (1) na forma :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 x_1 + \phi x_2 + A_2 x_1 x_2 \\ A_3 x_1 - \mu_2 x_2 \\ A_4 x_1 - \mu_3 x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (2)$$

sendo:

$$A_1 = -(\gamma + \mu_1), \quad A_2 = -\frac{\phi}{C}, \quad A_3 = r\gamma, \quad A_4 = (1 - r)\gamma \quad (3)$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} A_1 x_1 + \phi x_2 + A_2 x_1 x_2 \\ A_3 x_1 - \mu_2 x_2 \\ A_4 x_1 - \mu_3 x_3 \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} -x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } y = ax_1 + bx_2, \quad a, b \text{ reais.} \quad (4)$$

3 Análise da Estabilidade Assintótica Via a Linearização Exata

Prova-se inicialmente que o sistema de Eq. (4), (4-a) tem dois pontos críticos, a saber:

$$P_1 = (0, 0, 0) \text{ e } P_2 = \left(\frac{\mu_2}{A_3} x_2, x_2, \frac{\mu_2 \mu_3}{A_3 A_4} x_2 \right) \quad (5)$$

sendo $x_2 = -\left(\frac{\phi A_3 + \mu_2 A_1}{\mu_2 A_2} \right)$ e $A_i, i = 1, \dots, 4$ como em (4).

Neste trabalho a análise será efetuada em torno do ponto P_1 . Para tal, inicialmente prova-se que esta dinâmica tem grau relativo $r = 1$. Além disso, um difeomorfismo que transforma esta dinâmica na forma normal é da forma ([8], [11]):

$$\Psi(x) = [z_1, \psi_1, \psi_2] \quad (6)$$

sendo $z_1 = ax_1 + bx_2$ e $\psi_j, j = 1, 2$ são soluções da EDP $\nabla \psi_j g = 0, j = 1, 2$, que podem ser:

$$\psi_1 = x_2, \quad \psi_2 = x_3 \quad (7)$$

Portanto,

$$\Psi(x) = [ax_1 + bx_2, x_2, x_3] \quad (7-a)$$

é um difeomorfismo global se e somente se $a \neq 0, \forall x_1, x_2, x_3$, e o difeomorfismo inverso é:

$$x_2 = \psi_1, \quad x_3 = \psi_2, \quad x_1 = \frac{1}{a} z_1 - \frac{b}{a} \psi_1. \quad (8)$$

Das Eq. (7) e (8), a dinâmica não linear de Eq. (4) e (4-a) tem a forma normal:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(A_1 + \frac{bA_3}{a} \right) z_1 - b \left(A_1 - \frac{a\varphi}{b} + \frac{bA_3}{a} + \mu_2 \right) \psi_1 + A_2 z_1 \psi_1 - bA_2 \psi_1^2 - \\ (z_1 - b\psi_1)u(t) \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_3}{a} z_1 - \left(\frac{bA_3}{a} + \mu_2 \right) \psi_1 \\ \frac{A_4}{a} z_1 - \frac{bA_4}{a} \psi_1 - \mu_3 \psi_2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$y = z_1$$

sendo A_i , $i = 1, \dots, 4$ como nas Eq. (4). A dinâmica não linear de Eq. (9) representa a parte observável da dinâmica de Eq. (3), e o sistema linear de Eq. (10) representa a dinâmica interna, isto é a parte não observável desta dinâmica sendo não dependente da entrada $u(t)$.

A análise de estabilidade assintótica da dinâmica (4) pode ser feita a partir da *dinâmica zero*, obtida da dinâmica de Eq. (10) sob a hipótese de que $y(t) = 0 \forall t > 0$, o que implica $z_1 = z_2 = 0 \forall t$. Assim, existe uma subvariedade M_o no espaço de estados na qual a saída e suas derivadas são nulas e os estados que se iniciam em M_o permanecem em M_o , daí, $\dot{z} = 0$ e $\dot{\psi} = W(0, \psi)$, gerando a dinâmica dada pela Eq. (11), a saber ([11]):

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \left(\frac{bA_3}{a} + \mu_2 \right) \psi_1 \\ - \frac{bA_4}{a} \psi_1 - \mu_3 \psi_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$y = 0$

Note que $(0, 0)$ é o único ponto crítico desta dinâmica. No sistema de Eq. (11) fazendo:

$$C_1 = - \left(\frac{bA_3}{a} + \mu_2 \right) \text{ e } C_2 = - \frac{bA_4}{a} \quad (11-a)$$

a dinâmica zero pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \psi_1 \\ C_2 \psi_1 - \mu_3 \psi_2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$y = 0$

cuja equação característica e suas raízes são da forma:

$$p(\lambda) = (-\mu_3 - \lambda)(C_1 - \lambda), \quad \lambda_1 = -\mu_3 \text{ e } \lambda_2 = - \left(\frac{b}{a} r\gamma + \mu_2 \right). \quad (12-a)$$

Agora, como $\lambda_1 < 0$, tem-se que:

$$\lambda_2 < 0 \Leftrightarrow \frac{b}{a} > - \frac{\mu_2}{r\gamma}, \text{ } a, b > 0 \text{ ou } a, b < 0. \quad (13)$$

Assim, a dinâmica de Eq. (12) é assintoticamente estável em $(0, 0) \Leftrightarrow \lambda_2 < 0 \Leftrightarrow \frac{b}{a} > - \frac{\mu_2}{r\gamma}$, sendo $a, b > 0$ ou $a, b < 0$, sendo um nó assintoticamente estável. Portanto, o sistema (4) é assintoticamente estável em $(0, 0, 0) \Leftrightarrow \lambda_2 < 0 \Leftrightarrow \frac{b}{a} > - \frac{\mu_2}{r\gamma}$ e $a, b > 0$ ou $a, b < 0$.

Nota-se que esta condição equivalente para estabilidade assintótica do ponto crítico P_1 da dinâmica (3) – (4-a) é similar à que foi encontrada em [13 -14] para a origem da dinâmica proposta por [7].

A estabilização local, em malha fechada do sistema não linear de Eq. (3) - (4-a) ou de Eq. (9) – (10), em torno de P_1 pode ser obtida mediante a utilização do controle não linear:

$$u(x) = -\frac{1}{ax_1} \left[-(aA_1 + bA_3)x_1 - (a\phi - b\mu_2)x_2 - aA_2x_1x_2 + v \right] \quad (14)$$

para $v(x) = -k_o ax_1 - k_o bx_2$ e k_o escolhido de forma conveniente tal que $p(\lambda) = \lambda + k_o$ tenha raízes negativas ([11]). Nota-se que $p(\lambda) = \lambda + k_o$ tem raízes negativas se e somente se $k_o > 0$.

4 Simulações Numéricas e Discussões

A Figura 1 mostra o plano de fase da dinâmica zero de Eq. (11) ou (12), nas condições de estabilidade estabelecidas na Eq. (13), de acordo com os valores dos parâmetros adotados na Tabela 1 e condições iniciais especificadas na legenda desta Figura.

Tabela 1. Valores de parâmetros conforme [12].

Parâmetro	μ_1	μ_2	μ_3	a	b	r	C	ϕ	γ	k_o
Valor	0.0583	0.0521	0.06	1	1	0.5	3	6.353	0.0941	1

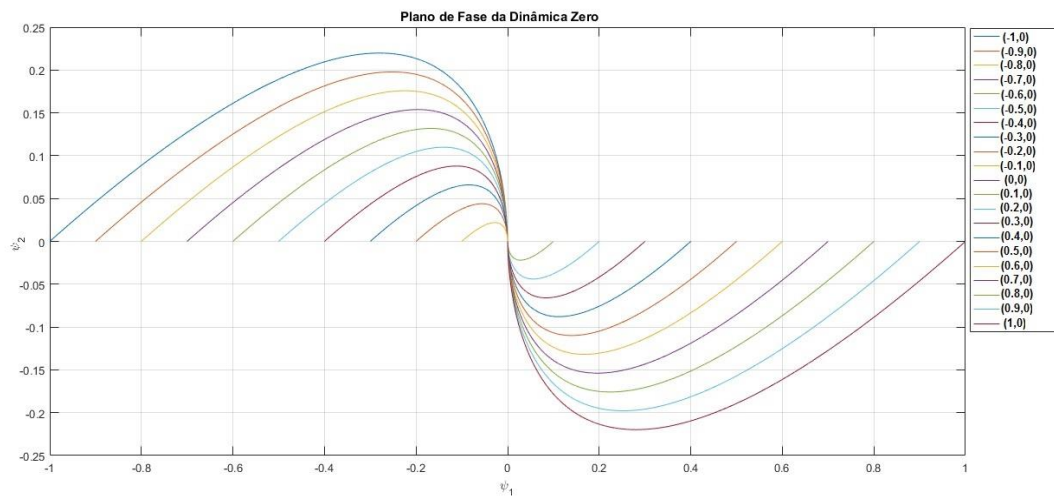


Figura 1: Plano de fase da dinâmica zero para as condições iniciais adotadas na legenda.

A Figura 2 mostra o efeito da lei de controle não linear de Eq. (14) no histórico do deslocamento do tempo das densidades populacionais na fase aquática (x_1), das fêmeas (x_2) e dos machos (x_3) da dinâmica populacional de Eq. (4). Nota-se a influência do parâmetro k_o na lei de controle (14) para estabilização de cada população, influenciando de forma intensa na diminuição do valor de estabilização.

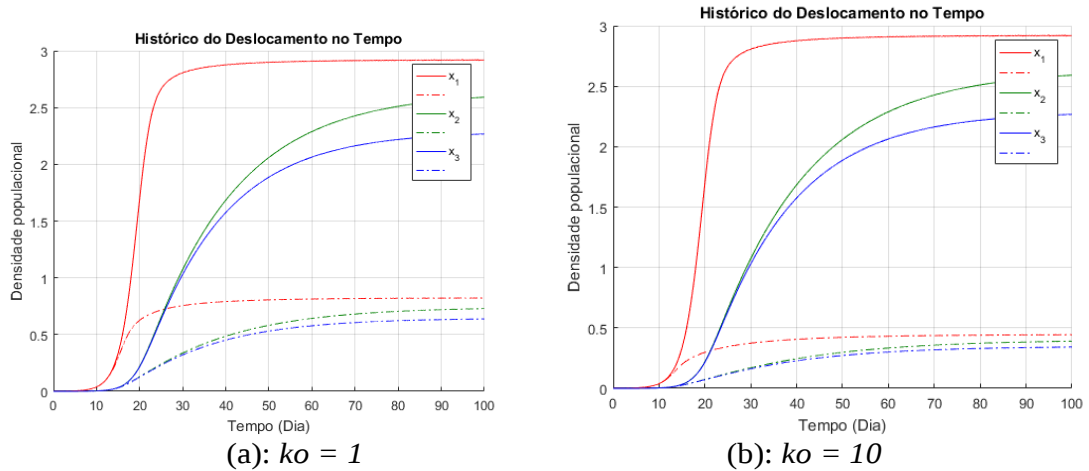


Figura 2: simulação para malha aberta nas fases aquática e mosquitos adultos.

5 Conclusões

No presente trabalho propõe-se uma dinâmica não linear da população do mosquito *Aedes aegypti*, na qual se considera a fase de mosquitos adultos divididos apenas em machos e fêmeas, sem levar em conta a divisão de fêmeas imaturas e fertilizadas. Tal procedimento visa uma simplificação no modelo proposto por [7] e a verificação da eficácia da dinâmica proposta. A técnica da linearização exata entrada-saída foi a técnica de análise do modelo populacional proposto. Efetuou-se a análise da estabilidade assintótica desta dinâmica não linear em torno da origem, mediante a análise da dinâmica zero. Foram obtidas condições necessárias e suficientes análogas à que foi encontrada em [13 - 14] para a origem da dinâmica proposta por [7]. Introduziu-se um controle não linear (linearização por realimentação) que possibilitou a estabilização deste sistema em um intervalo de tempo bastante pequeno (realimentação de estados externa). Simulações foram efetuadas, com e sem o controle via linearização por realimentação, com o objetivo de um melhor entendimento do comportamento dinâmico deste sistema. A influência do parâmetro ko na lei de controle (14) para estabilização de cada população foi observada, sendo que o mesmo influencia de forma intensa na diminuição do valor de estabilização das curvas de densidade populacional.

Para trabalhos futuros, pretende-se efetuar uma análise global do sistema para diferentes variações dos demais parâmetros, para todos os pontos críticos. Em particular, pretende-se avaliar se esta dinâmica apresenta comportamento caótico e avaliação do sistema nas condições onde exista o ciclo limite além do custo de controle nesta situação.

Referências

- [1] Agência FAPESP, *Aedes Aegypti* infectado com vírus chikungunya é identificado em Aracaju, boletim online de 23 de junho de 2017.
- [2] Agência FAPESP, Em São José do Rio Preto, bebês expostos ao Zika não tiveram microcefalia, boletim online de 02 de junho de 2017.

- [3] Agência FAPESP, Estudo indica que Zika vírus está cada vez mais eficiente para infectar humanos, Boletim online de 3 de dezembro de 2015.
- [4] L. S. Barsante, T. N. Cardoso e J. L. Acebal. Otimização Multiobjetivo no Controle de Gastos com Inseticidas e Machos Estéreis no Combate da Dengue Anais do XLIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, p. 2340-2351, (2011).
- [5] B. P. Freitas et al., Ocular Findings in Infants With Microcephaly Associated With Presumed Zika Virus Congenital Infection in Salvador, Brazil, JAMA Ophthalmology. vol. 134, n. 5, 529-535, (2016), DOI:10.1001/jamaophthalmol.2016.0267.
- [6] M. R. Donalísio e C. M. Glasser. Vigilância entomológica e controle de vetores do dengue. Rev. Bras. Epidemiol. vol.5, no.3, São Paulo, Dec. (2002).
- [7] L. Esteva and H. M. Yang. Mathematical Model to Assess the Control of Aedes aegypti Mosquitoes by the Sterile Insect Technique. Mathematical Biosciences, v. 198, 132-147, (2005).
- [8] A. Isidori. Nonlinear Control Systems, 3ed., Springer-Verlag, Roma, (1995).
- [9] J. Koiller, M.O. Souza, C. Codeço, A. Iggridr e G. Sallet. Aedes, Wolbachia and Dengue. Tese de Doutorado, Inria Nancy-Grand Est, França, (2014).
- [10] C. A. Reis, D. Colón, H. O. F. Silva e D. Cantane. Análise do Plano de Fase de uma dinâmica Populacional não linear do *Aedes Aegypti*. In: ERMAC, Anais do ERMAC, (2016).
- [11] Slotine, J. and LI, W. *Applied Nonlinear Control*. New Jersey: Prentice Hall. (1991)
- [12] H. O. F. Silva, D. Cantane e C. A. Reis. Controle populacional do mosquito *Aedes Aegypti* na fase aquática. In: ERMAC 2016, Anais do ERMAC (2016).
- [13] C. A. Reis, D. Colón, H. O. F. Silva, D. Cantane, S. S. R. F. Rosa, J. M. Balthazar e F. J. Costa. Análise de um modelo populacional do mosquito transmissor da dengue via linearização exata. Pesquisas Aplicadas em Modelagem Matemática, vol. 4, Ed. Unijuí, ISBN 978-85-419-0184-0. (2015-a)
- [14] C. A. Reis, H. O. F. Silva, D. Cantane, S. S. R. F. Rosa, D. Colon e J. M. Balthazar. Feedback Linearization Population Dynamics of the Mosquito Dengue Transmitter. Anais do 23rd ABCM International Congress of Mechanical Engineering - COBEM2015. RJ, (2015-b)
- [15] R. C. A. Thomé, H. M. Yang e L. Esteva. Optimal control of Aedes aegypti mosquitoes by the sterile insect technique and insecticide, Mathematical Biosciences. vol. 223, 12-23. (2010).