



DINCON 2017

CONFERÊNCIA BRASILEIRA DE DINÂMICA, CONTROLE E APLICAÇÕES
30 de outubro a 01 de novembro de 2017 – São José do Rio Preto/SP

Estimativa da Região de Estabilidade usando Funções Energia Generalizadas

Yuri C. S. Ribeiro ¹

Departamento de Pesquisa e Desenvolvimento, Tecumseh do Brasil Ltda., São Carlos, SP
Escola de Engenharia de São Carlos, USP, São Carlos, SP

Luís F. C. Alberto ²

Escola de Engenharia de São Carlos, USP, São Carlos, SP

Resumo. Neste trabalho, serão apresentadas as bases teóricas e um método computacional para estimar a região de estabilidade de conjuntos atrativos de sistemas dinâmicos não lineares usando funções energia generalizadas. O método proposto garante que a estimativa obtida é conservadora, i.e., a estimativa é sempre um subconjunto da região de estabilidade verdadeira. O resultado obtido pelo método é ilustrado através de um exemplo numérico.

Palavras-chave. Região de Estabilidade, Região de Atração, Função Energia Generalizada.

1 Introdução

Considere o sistema de equações diferenciais

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad (1)$$

onde $\dot{x}(t)$ denota a derivada de $x(t)$ com respeito a variável t e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação de classe C^1 . Denotaremos por $t \mapsto \Phi(t, x_0)$, a única solução de (1) satisfazendo $\Phi(0, x_0) = x_0$.

Um *conjunto atrativo* σ é um conjunto fechado e invariante que possui uma vizinhança aberta U tal que, para todo $x_0 \in U$, tem-se que $\Phi(t, x_0) \in U$ para todo $t > 0$ e $\Phi(t, x_0) \rightarrow \sigma$ quando $t \rightarrow \infty$, ou seja, a distância entre $\Phi(t, x_0)$ e σ tende para zero à medida que $t \rightarrow \infty$.

O conjunto ω -*limite* de x , denotado por $\omega(x)$, é o conjunto de todos os pontos p para os quais existe uma sequência de tempos $\{t_n\}$ com $t_n \rightarrow \infty$ e $|\Phi(t_n, x) - p| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Se σ é um conjunto atrativo, definimos a *região de estabilidade* de σ por

$$A(\sigma) = \{x \in \mathbb{R}^n : \omega(x) \neq \emptyset, \omega(x) \subset \sigma\}.$$

¹yribeiro@usp.br

²lfcaberto@usp.br

A região de estabilidade de conjuntos atrativos desempenha papel fundamental no estudo do comportamento assintótico de sistemas dinâmicos. Por exemplo, no estudo da imunização de uma população com respeito a uma dada doença [11], em controle automático de voo [3] ou no estudo de estabilidade transitória de sistemas elétricos de potência [9].

Determinar com precisão a região de estabilidade de um conjunto atrativo de um sistema dinâmico não linear é, em geral, um problema difícil. Por essa razão, diversos métodos computacionais foram desenvolvidos para obter estimativas da região de estabilidade.

Estes métodos podem ser divididos em dois grandes grupos: os que se baseiam em Funções de Lyapunov (FL) ou Funções Energia (FE) e os que usam outro tipo de técnica. A maioria dos métodos no primeiro grupo obtêm estimativas para a região de estabilidade (ou parte dela) através de conjuntos de nível de uma FL ou de uma FE para o sistema. No grupo dos métodos que não estão baseados em FL ou FE, existem, por exemplo, os métodos que fazem uso de integração reversa (ver [10, 13]), os que utilizam “*tracking functions*” (ver [12]) e aqueles que realizam aproximações locais da fronteira de estabilidade através de hiperplanos (ver [16]) ou superfícies (ver [4, 14, 15]).

Motivados pelo problema da análise de estabilidade transitória em sistemas elétricos de potência, técnicas que utilizam FE para obter estimativas para a região de estabilidade foram desenvolvidas (ver [6]). Estas técnicas se baseiam na relação entre a FE e o comportamento dinâmico das soluções na fronteira da região de estabilidade. Então, foram desenvolvidos métodos computacionais para obter estimativas conservadoras para a região de estabilidade (ou de parte relevante dela) que podem ser aplicados na solução de problemas práticos.

Embora estes métodos sejam simples e conduzam a resultados precisos (porém conservadores), eles se aplicam apenas a sistemas que admitem FE. Infelizmente, muitos sistemas não admitem FE. A existência de uma FE implica em sérias restrições à dinâmica das soluções, de fato, toda solução limitada converge para um ponto de equilíbrio quando o tempo tende a infinito (ver [9]). Consequentemente, sistemas com dinâmica mais complicada, como órbitas periódicas ou soluções caóticas, não admitem FE. Por exemplo, em [5] foi provado que os modelos de sistemas elétricos de potência considerando perdas não admitem FE.

Não existe um procedimento sistemático para encontrar FE e, mesmo nos casos em que podemos provar a sua existência, a impossibilidade de exibir sua expressão analítica em termos de funções elementares proíbe a aplicação de métodos baseados em FE. É neste contexto que o conceito de Função Energia Generalizada (FEG) foi introduzido em [1, 2]. Embora FEGs sejam mais fáceis de serem encontradas e possam ser admitidas por uma classe bastante geral de sistemas, é necessário encontrar resultados que deem suporte a métodos para o estudo da região de estabilidade para os sistemas que as admitem.

2 Funções Energia Generalizadas

Considere o sistema (1) e seja $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$. Defina o conjunto

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : \nabla V(x) \cdot f(x) \geq 0\}. \quad (2)$$

Em [1] foi introduzida a seguinte classe de funções auxiliares.

Definição 2.1. *Uma função $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma Função de Energia Generalizada (FEG) para o sistema (1), quando as seguintes afirmações são verdadeiras,*

G1. *O conjunto C é limitado;*

G2. *O conjunto C possui um número finito de componentes conexas;*

G3. *Para uma dada solução $t \mapsto \Phi(t, x_0)$ do sistema (1), se a função $t \mapsto V(\Phi(t, x_0))$ é limitado para $t > 0$, então a solução $\Phi(t, x_0)$ também é limitada para $t > 0$.*

A simples existência de uma FEG tem implicações importantes sobre o comportamento das trajetórias do sistema (ver [1]). Por exemplo, toda trajetória sobre a fronteira da região de estabilidade é limitada e converge para um conjunto que intersecta a fronteira do conjunto C (ver Teorema 4.3 de [1]).

3 Estimativa da Região de Estabilidade

Nesta seção, apresentaremos alguns resultados que vinculam a existência de uma FEG a propriedades dinâmicas das soluções contidas na fronteira da região de estabilidade de um conjunto atrativo. As propriedades dinâmicas asseguradas pelos resultados, têm como objetivo permitir a construção de um algoritmo para estimativa da região de estabilidade do conjunto atrativo.

Dado $L \in \mathbb{R}$, considere os conjuntos de nível,

$$S_L = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq L\} \text{ e } R_L = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < L\}$$

e denote por $S_L(\sigma)$ e por $R_L(\sigma)$ suas componentes conexas que contém o conjunto σ .

Proposição 3.1. *Seja σ um conjunto atrativo para o sistema (1) e V uma FEG. Suponha que, para algum $L \in \mathbb{R}$, a componente conexa $S_L(\sigma)$ de S_L é tal que $\sigma \subset S_L(\sigma) \subset A(\sigma)$ e que $\partial S_L(\sigma) \cap C = \emptyset$. Então, para todo $K > L$ tal que $(S_K(\sigma) \setminus S_L(\sigma)) \cap C = \emptyset$, tem-se que $S_K(\sigma) \subset A(\sigma)$.*

Demonstração. Como $(S_K(\sigma) \setminus S_L(\sigma)) \cap C = \emptyset$, do Teorema 11.3 de [7], temos que $S_K(\sigma)$ é um conjunto positivamente invariante, assim como $S_L(\sigma)$.

Assuma, por absurdo, que $S_K(\sigma) \not\subset A(\sigma)$. Como $S_L(\sigma) \subset S_K(\sigma)$ e $S_K(\sigma)$ é um conjunto conexo, existe $p \in \partial A(\sigma) \cap (S_K(\sigma) \setminus S_L(\sigma))$.

Como $S_L(\sigma) \subset A(\sigma)$, $\partial A(\sigma)$ é um conjunto invariante (ver [8]) e $\Phi(t, p)$ é limitada (ver Teorema 4.2 de [1]), $\Phi(t, p) \subset S_K(\sigma) \setminus S_L(\sigma)$ para todo $t > 0$ e, portanto, $\omega(p) \subset \overline{S_K(\sigma) \setminus S_L(\sigma)}$.

Uma vez que $\overline{S_K(\sigma) \setminus S_L(\sigma)} = (S_K(\sigma) \setminus S_L(\sigma)) \cup \partial S_L(\sigma)$ e, por hipótese, $S_L(\sigma) \subset A(\sigma)$, tem-se que $\omega(p) \cap \partial S_L(\sigma) = \emptyset$. Assim, $\omega(p) \subset S_K(\sigma) \setminus S_L(\sigma)$.

Pelo Teorema 4.3 de [1], $C \cap (S_K(\sigma) \setminus S_L(\sigma)) \neq \emptyset$ chegando a um absurdo. $\square$

Teorema 3.1. *Considere as mesmas hipóteses da Proposição 3.1. Sejam $P_i = \{x \in \partial C_i : x \text{ é mínimo local de } V|_{\partial C_i}\}$ e $K_i = \{V(p) : p \in P_i, V(p) > L, \sigma \subset \overline{R_{V(p)}(p)}\}$. Então, o conjunto $R_K(\sigma)$, onde $K = \min \bigcup_i K_i$, é uma estimativa para $A(\sigma)$, ou seja, $R_K(\sigma) \subset A(\sigma)$.*

Demonstração. Considere $\delta = d(C, \partial S_L(\sigma))$. Como C é um conjunto compacto (ver definição 2.1), $\partial S_L(\sigma)$ é um conjunto fechado e, por hipótese $\partial S_L(\sigma) \cap C = \emptyset$, tem-se $\delta > 0$. Logo, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $(S_{L+\varepsilon_1}(\sigma) \setminus S_L(\sigma)) \cap C = \emptyset$ e, usando a Proposição 3.1, temos que $S_{L+\varepsilon_1}(\sigma) \subset A(\sigma)$.

Uma vez que $(S_{L+\varepsilon_1}(\sigma) \setminus S_L(\sigma)) \cap C = \emptyset$, temos que $d(C, \partial S_{L+\varepsilon_1}(\sigma)) > 0$ e, repetindo o argumento anterior, é possível escolher $\varepsilon_2 > 0$ tal que $S_{L+\varepsilon_1+\varepsilon_2}(\sigma) \subset A(\sigma)$.

Agora, suponha que a sequência monótona crescente definida por $B_n = L + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$ seja limitada, caso contrário, como $S_{B_n}(\sigma) \subset A(\sigma)$ temos que $A(\sigma) = \mathbb{R}^n$ e o conjunto $K_i = \emptyset$ para todo i . Então, $B_n \rightarrow B \in \mathbb{R}$, quando $n \rightarrow \infty$ e $\bigcup_i S_{B_n}(\sigma) = R_B(\sigma) \subset A(\sigma)$.

Podemos supor que $d(C, S_{B_n}(\sigma)) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, caso contrário, o processo anterior poderia ser continuado e uma nova sequência de números reais maiores que B poderia ser construída de forma a convergir para um novo valor. Logo, $d(C, R_B(\sigma)) = 0$ e existe $y \in \overline{R_B(\sigma)}$ tal que $y \in C$. Segue da construção que $V(y) = B$ e $B = K$. $\square$

4 Algoritmo Conceitual

O Teorema 3.1 estabelece os fundamentos teóricos para um algoritmo, cujos os passos estão descritos a seguir, que fornece uma estimativa da região de estabilidade.

1. Encontre todas as componentes conexas de C , denotadas por $\{C_i\}$;
2. Selecione as componentes C_i tais que $C_i \cap \sigma \neq \emptyset$, elas serão denotadas por $\{C_i\}_{i \in \Lambda}$;
3. Calcule $L = \min\{V(x) : \partial S_{V(x)}(\sigma) \cap C = \emptyset, C_i \subset S_{V(x)}, i \in \Lambda\}$;
4. Calcule o valor de K definido no Teorema 3.1;
5. Estime a região de estabilidade de σ pelo conjunto de nível $R_K(\sigma)$.

5 Exemplo de Aplicação

Considere o modelo de segunda ordem, dado pela equação,

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + 0,1(x-3)(x-2)(x-1)x(x+1) \\ \dot{y} = (x-2)(x-1)x + 0,1(y-2)(y+2)y. \end{cases} \quad (3)$$

Pode-se verificar que a função,

$$\begin{aligned} V(x, y) &= 27,542x^2 + 1,0804xy + 14,148y^2 - 13,543x^3 - 4,8039x^2y \\ &+ 11,3xy^2 + 0,92144y^3 + 3,4087x^4 - 10,915yx^3 + 12,574y^2x^2 \\ &+ 2,7285xy^3 + 4,1856y^4 - 5,2382x^6 + 8,1009yx^5 - 7,4264y^2x^4 \\ &+ 3,1785x^3y^3 - 4,4109y^4x^2 - 0,00446xy^5 - 0,46274y^6, \end{aligned} \quad (4)$$

é uma FEG para o sistema (3).

A Figura 1 mostra a estimativa da região de estabilidade do ponto $p_0 = (0, 0)$ obtida pelo conjunto $R_K(\sigma)$, via o algoritmo da seção 4, e a região de estabilidade verdadeira.

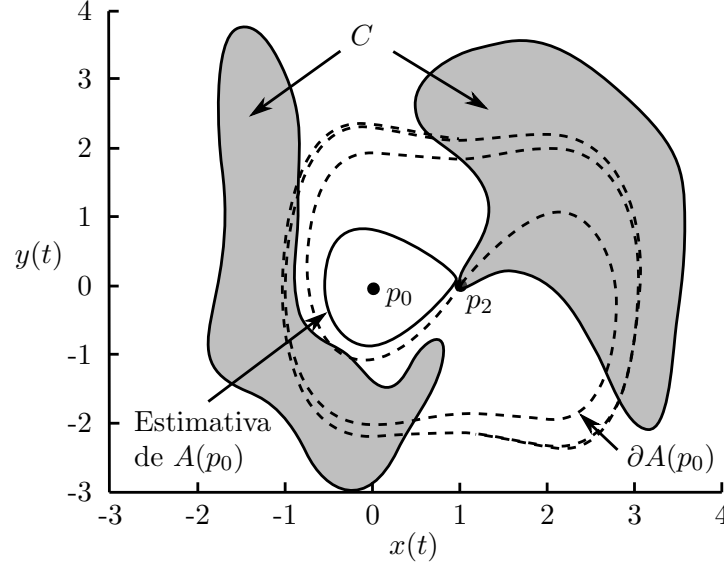


Figura 1: O conjunto C , a estimativa da região de estabilidade de p_0 e a região de estabilidade verdadeira considerando o sistema (3) e a FEG dada por (4).

6 Conclusões

Neste trabalho, foi apresentado um método para estimativa da região de estabilidade usando FEG. A teoria que suporta o método garante que a estimativa obtida é sempre conservadora permitindo seu uso para resolver problemas relacionados à estabilidade de sistemas dinâmicos não lineares. A teoria desenvolvida fornece as bases de um método direto para a avaliação da estabilidade que pode ser aplicado a uma classe bastante geral de sistemas dinâmicos: aqueles que admitem função energia generalizada.

Agradecimentos

Os autores agradecem à FAPESP (processo 2014/50851-0) e ao CNPq (processos 305486/2013-6 e 455299/2014-5) pelo suporte a este trabalho.

Referências

- [1] L. F. C. Alberto and H.-D. Chiang. Characterization of stability region for general autonomous nonlinear dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(6):1564–1569, 2012.
- [2] L. F. C. Alberto and H.-D. Chiang. Towards development of generalized energy functions for electric power systems. *IEEE Power and Energy Society General Meeting*, pages 1–6, 2012.

- [3] A. Chakraborty, P. Seiler, and G. J. Balas. Nonlinear region of attraction analysis for flight control verification and validation. *Control Engineering Practice*, 19(4):335–345, 2011.
- [4] D. Cheng and J. Ma. Calculation of stability region. *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 5615–5620, 2003.
- [5] H.-D. Chiang. Study of the existence of energy functions for power systems with losses. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 36(11):1423–1429, 1989.
- [6] H.-D. Chiang. *Direct Methods for Stability analysis of Electric Power Systems*. Wiley, 2011.
- [7] H.-D. Chiang and L. F. C. Alberto. *Stability Regions of Nonlinear Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 2015.
- [8] H.-D. Chiang, M. W. Hirsch, and F. F. Wu. Stability regions of nonlinear autonomous dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(1):16–27, 1988.
- [9] H.-D. Chiang, F. F. Wu, and P. P. Varaiya. Foundations of direct methods for power system transient stability analysis. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 34(2):160–173, 1987.
- [10] R. Genesio, M. Tartaglia, and A. Vicino. On the estimation of asymptotic stability regions: state of the art and new proposals. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 30(8):747–755, 1985.
- [11] H. Hethcote, M. Zhien, and L. Shengbing. Effects of quarantine in six endemic models for infectious diseases. *Mathematical Biosciences*, 180:141–160, 2002.
- [12] J. Hewit and C. Storey. Computer program for obtaining regions of practical stability for second-order autonomous systems. *Proceedings of IEE*, 114(9):1347–1350, 1967.
- [13] M. Loccufier and E. Noldus. A new trajectory reversing method for estimating stability regions of autonomous nonlinear systems. *Nonlinear Dynamics*, 21(3):265–288, 2000.
- [14] S. Saha, A. A. Fouad, W. H. Kliemann, and V. Vittal. Stability boundary approximation of a power system using the real normal form of vector fields. *IEEE Transactions on Power Systems*, 12(2):797–802, 1997.
- [15] V. Venkatasubramanian and W. Ji. Numerical approximation of (n-1)-dimensional stable manifolds in large systems such as the power system. *Automatica*, 33(10):1877–1883, 1997.
- [16] H. Yee and B. D. Spalding. Transient stability analysis of multimachine power systems by the method of hyperplanes. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, 1(96):276–284, 1977.