



DINCON 2017

CONFERÊNCIA BRASILEIRA DE DINÂMICA, CONTROLE E APLICAÇÕES

30 de outubro a 01 de novembro de 2017 – São José do Rio Preto/SP

SÍNTESE DE CONTROLADOR ESTRUTURADO PARA ALOCAÇÃO ROBUSTA DE POLOS

João Fábio Soares dos Santos¹

Paulo César Pellanda²

Alberto Mota Simões³

Programa de Pós Graduação em Engenharia de Defesa, IME, Rio de Janeiro, RJ

Resumo. Uma nova técnica de síntese de controladores é apresentada a qual permite o projeto de sistemas de controle com agrupamento regional e robusto de polos, na presença de incertezas paramétricas e satisfazendo restrições estruturais predeterminadas. Tais características estão raramente conjuntamente presentes nos métodos de síntese de controladores disponíveis atualmente. A ideia central da abordagem proposta consiste em reformular o problema original de alocação robusta de polos em um problema de estabilização robusta equivalente envolvendo controladores altamente estruturados e incertezas. Uma aplicação numérica corroborando a aplicabilidade da técnica de síntese proposta é também apresentada.

Palavras-chave. Sistemas de controle, Incertezas paramétricas, Alocação robusta de polos.

1 Introdução

A alocação regional de polos é uma técnica clássica de síntese de controladores para sistemas lineares e invariantes no tempo. Por meio do agrupamento dos polos de malha fechada em regiões apropriadas do plano complexo, o projetista pode estabelecer limites para a taxa de amortecimento ou para a frequência natural não amortecida dos modos de oscilação em malha fechada e, então, moldar os parâmetros no domínio do tempo da resposta do sistema. Conforme [10], de um ponto de vista de aplicação, agrupar polos dentro de uma região é mais importante que a sua alocação exata.

Em [6], condições suficientes são obtidas para alocação de polos em uma classe geral de regiões convexas do plano complexo definidas por restrições do tipo desigualdades matriciais lineares (LMI). O problema de síntese de controle pode ser resolvido de forma muito eficiente por ferramentas de otimização LMI. Além disso, na estrutura LMI, restrições de

¹jfabioss@ime.eb.br

²pcpellanda@ieee.org

³simoess@ime.eb.br

alocação de polos podem ser consideradas simultaneamente com outros critérios de projeto como, por exemplo, restrições H_∞ . Esta técnica foi estendida em [7] para resolver o problema de alocação robusta de polos.

Uma limitação das técnicas de síntese de controladores baseadas em LMI é a dificuldade em lidar com restrições estruturais na lei de controle. Os problemas de síntese de controlador estruturado são conhecidos por serem, em geral, NP-difícil [5]. Portanto, a técnica de alocação robusta de polos baseada em LMI em [7] pode somente produzir controladores de ordem completa. A dificuldade das técnicas LMI em projetar controladores estruturados é um dos principais motivos para a volta do interesse nas técnicas de síntese de controlador baseadas na otimização não diferenciável observada na última década; ver, por exemplo, [1–4, 9, 11].

Restrições de alocação de polos que apareceram nas técnicas já mencionadas, de síntese baseadas em otimização não diferenciável, envolveram restrições de semiplano por intermédio da função abscissa espectral [3]. Mais recentemente, uma região mais geral do plano complexo foi considerada em [11], especificamente para alocação de polos. A técnica de síntese em [11] permite o projeto de controladores estruturados com alocação regional de polos, porém de forma similar aos resultados publicados em [6], a robustez do agrupamento de polos não é explicitamente formulada, mas buscada indiretamente via uma restrição H_∞ adicional. Restrições H_∞ não ponderadas não são a forma mais adequada para lidar com incertezas estruturadas como, por exemplo, incertezas paramétricas [12].

2 Método

Neste trabalho, a recente técnica de síntese de controle, introduzida em [14], a qual permite o projeto de controladores que satisfazem restrições estruturais predeterminadas, bem como garantem a alocação robusta de polos na presença de incertezas paramétricas, é revisitada e aplicada em um sistema mecânico oscilatório de translação (massa-mola-amortecedor de oito estados). A ideia central na abordagem proposta é reformular o problema original de alocação robusta de polos em um problema equivalente de estabilização robusta que pode ser interpretado como um problema particular de síntese μ [8] envolvendo controlador e incerteza altamente estruturados. O problema de síntese resultante pode então ser resolvido eficientemente por meio de uma técnica de projeto de controle estruturado e parametricamente robusto, recentemente introduzida [2].

Conforme [14], considere o sistema incerto linear invariante no tempo

$$\dot{x}(t) = (\Delta \star M)x(t), \quad (1)$$

em que $M \in \mathbb{R}^{(r+n) \times (r+n)}$ representa a matriz de estado nominal e $\Delta \in \mathbf{\Delta} \subset \mathbb{R}^{r \times r}$ representa uma matriz bloco diagonal de incertezas cuja estrutura é dada por

$$\mathbf{\Delta} \triangleq \{ \Delta = \text{diag}(\delta_1^r I_{k_1}, \dots, \delta_{m_r}^r I_{k_{m_r}} : \delta_i^r \in \mathbb{R} \}. \quad (2)$$

A bola unitária em $\mathbf{\Delta}$ é denotada por

$$\mathbf{B}\mathbf{\Delta} \triangleq \{ \Delta \in \mathbf{\Delta} : \bar{\sigma}(\Delta) \leq 1 \}. \quad (3)$$

Seja $\mathcal{D}$ a região não vazia do semiplano esquerdo complexo, constituída como a interseção de um disco, o semiplano esquerdo e uma cunha, como segue:

$$\mathcal{D}(q, r, \alpha, \theta, \gamma) \triangleq \Omega_c(q, r) \cap \Omega_{hp}(\alpha) \cap \Omega_w(\theta, \gamma). \quad (4)$$

O sistema incerto (1) é dito ser *robustamente estável* se ele for estável para toda incerteza permitida $\Delta \in \mathbf{B}\Delta$. Se, entretanto, os polos do sistema incerto (1) encontrarem-se em $\mathcal{D}$ para toda incerteza permitida, isto é, $\lambda_i[\Delta \star M] \in \mathcal{D}$ para todo $\Delta \in \mathbf{B}\Delta$, então o sistema incerto é dito ser *robustamente $\mathcal{D}$ -estável*.

Então, o sistema incerto (1) é robustamente $\mathcal{D}$ -estável se e somente se o sistema

$$\dot{x}(t) = A_\Delta x(t), \quad (5)$$

com

$$A_\Delta \triangleq \text{diag} \left(\Gamma \star (\Delta \star M), (\Delta \star M) + \alpha I_n, \begin{bmatrix} \sin(\theta) & -\cos(\theta) \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) \end{bmatrix} \otimes ((\Delta \star M) + \gamma I_n) \right), \quad (6)$$

for robustamente estável.

Em resumo, o problema original de projeto que envolve a $\mathcal{D}$ -estabilização robusta do sistema em malha fechada incerto $(\mathcal{G}(s, \Delta), K(s))$ pode ser resolvido equivalentemente via o seguinte problema de estabilização robusta:

Problema de síntese P1: *encontre um ganho estático $\mathcal{K}$ tal que o sistema incerto (5)-(6), com $M(\mathcal{K})$, seja robustamente estável.*

É altamente instrutivo rearranjar o sistema em malha fechada incerto considerado no problema **P1** na forma clássica padrão para síntese μ [8]. Este sistema incerto auxiliar considerado em **P1** pode ser reorganizado em uma interconexão LFT padrão e, então, uma realização para a correspondente planta de síntese aumentada $P(s)$ pode ser encontrada.

Depois, conforme [14], o problema **P1** é resolvido via técnica de projeto de controlador estruturado robusto em [2]. Finalmente, o controlador estruturado robusto $K(s)$ procurado pode ser obtido diretamente da matriz do controlador $\mathcal{K}$ resultante.

3 Resultados

Seja o exemplo de um sistema massa-mola-amortecedor apresentado na Fig. 1, cujo modelo incerto é utilizado para projetar um controlador de ordem reduzida considerando a $\mathcal{D}$ -estabilização robusta na técnica de síntese de controlador estruturado apresentada neste trabalho.

A dinâmica incerta do sistema considerado é dada por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (7)$$

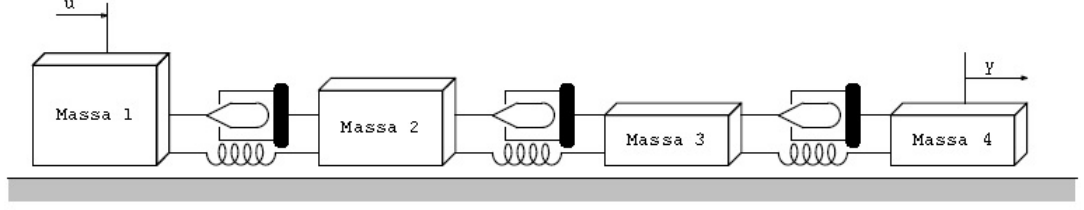


Figura 1: Diagrama físico do sistema massa-mola-amortecedor de 8 estados.

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m_{1p}} & -\frac{b}{m_{1p}} & \frac{k}{m_{1p}} & \frac{b}{m_{1p}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{m_2} & \frac{b}{m_2} & -\frac{2k}{m_2} & -\frac{2b}{m_2} & \frac{k}{m_2} & \frac{b}{m_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k}{m_3} & \frac{b}{m_3} & -\frac{2k}{m_3} & -\frac{2b}{m_3} & \frac{k}{m_3} & \frac{b}{m_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k}{m_{4p}} & \frac{b}{m_{4p}} & -\frac{k}{m_{4p}} & -\frac{b}{m_{4p}} \end{bmatrix},$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m_{1p}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

com

$$\begin{aligned} m_{1p} &= m_1(1 + \delta_1), \\ m_{4p} &= m_4(1 + \delta_4), \end{aligned} \quad (8)$$

onde $\delta_1, \delta_4 \in [-0.05, 0.05]$ representam as incertezas paramétricas e com os seguintes dados

$$\begin{aligned} m_1 &= 1 \\ m_2 &= 0.25 \\ m_3 &= 0.1 \\ m_4 &= 1 \\ k &= 0.145 \\ b &= 0.04875. \end{aligned} \quad (9)$$

A Fig. 2 mostra a localização dos polos da planta para 500 amostras aleatórias do vetor de parâmetros incertos (δ_1, δ_4) na região permitida definida por $\delta_1, \delta_4 \in [-0.05, 0.05]$.

Inicialmente, o objetivo do projeto é sintetizar um controlador estático que garanta a $\mathcal{D}$ -estabilização robusta em malha fechada para a dinâmica do sistema com relação à região $\mathcal{D}_1$ indicada na Tab. 1. A presença concomitante de restrições estruturais e de agrupamento de polos torna inoperantes as técnicas clássicas de síntese de controlador robusto neste caso. A popular iteração $D, G-K$ [13], por exemplo, não pode lidar com nenhuma das restrições.

Para começar, a dinâmica incerta do sistema considerado (7) deve ser rearranjada em uma forma LFT padrão, por exemplo seguindo as linhas em [12].

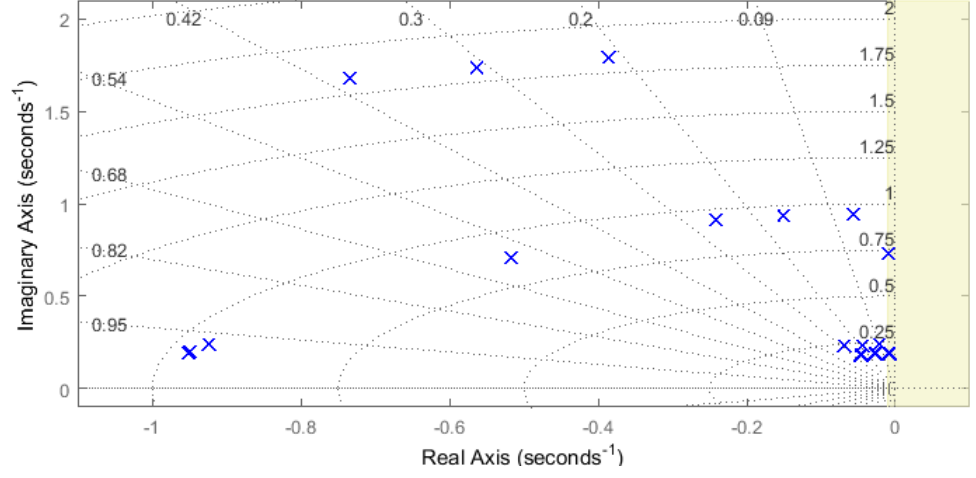


Figura 2: Diagrama de polos da planta.

Tabela 1: Especificações de projeto.

	$\mathcal{D}_1$
ζ	0.1
r	1.85
α	0
γ	0
q	0

O problema de síntese auxiliar **P1** é então construído e resolvido via técnica não diferenciável em [2], que consegue encontrar uma solução viável. Assim, o controlador estático resultante

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.09709 & -0.8188 & 0.2811 \\ 0.04433 & -0.05152 & -0.01489 \\ -0.001349 & 0.01146 & -0.04636 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$\mathcal{D}$ -estabiliza robustamente o sistema em malha fechada em relação à região $\mathcal{D}_1$. A Fig. 3 mostra o diagrama de polos e zeros do sistema em malha fechada com o ganho estático K_1 , novamente para 500 amostras aleatórias do vetor de parâmetros incertos (δ_1, δ_4) na região permitida $\delta_1, \delta_4 \in [-0.05, 0.05]$. Como esperado, as restrições impostas de localização regional são de fato respeitadas.

O controlador dinâmico resultante é dado por

$$K_1(s) = \left[\begin{bmatrix} -0.09709 & -0.8188 \\ 0.04433 & -0.05152 \\ -0.001349 & 0.01146 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 0.2811 \\ -0.01489 \\ -0.04636 \end{bmatrix} \right]. \quad (11)$$

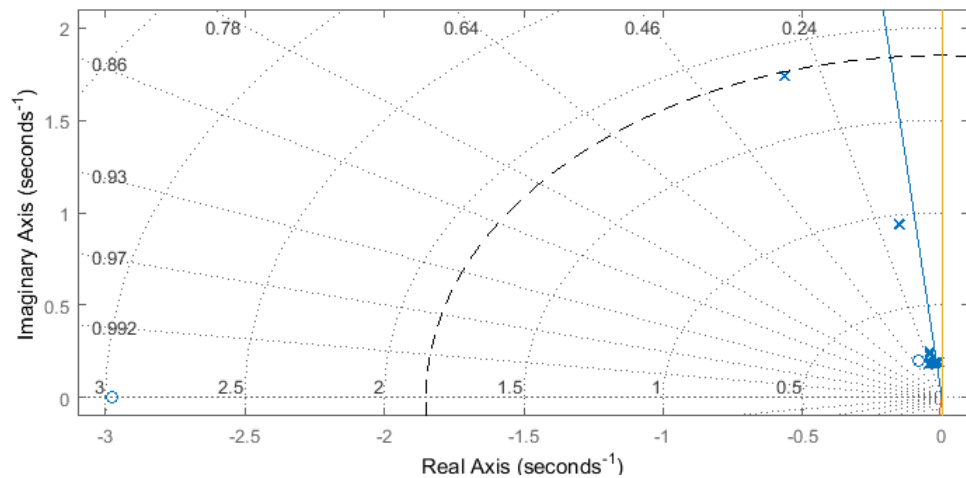


Figura 3: Diagrama de polos e zeros de malha fechada com controlador estático K_1 .

4 Conclusão

Uma técnica recente de alocação robusta de polos é apresentada, que permite a síntese de controladores capazes de fazer uma alocação regionalmente robusta de polos na presença de incertezas paramétricas, mas que também atende restrições estruturais prescritas. Como notado antes, tais características estão raramente conjuntamente presentes nos métodos de síntese de controladores atualmente disponíveis. Além disso, o critério de alocação de polos proposto pode ser facilmente incorporado em formulações multiobjetivas existentes baseadas em otimização não diferenciável. A aplicabilidade e validade da técnica de síntese proposta foi ilustrada por um exemplo numérico desafiador envolvendo restrição de ordem reduzida e incertezas paramétricas repetidas.

Referências

- [1] P. Apkarian, Nonsmooth μ synthesis, International Journal of Robust and Nonlinear Control, (2011), 21(13): 1493-1508.
- [2] P. Apkarian, M. N. Dao and D. Noll, Parametric robust structured control design, IEEE Transactions on Automatic Control, (2015), 60(7): 1857-1869.
- [3] P. Apkarian and D. Noll, Nonsmooth H_∞ synthesis, IEEE Transactions on Automatic Control, (2006), 51(1): 71-86.
- [4] P. Apkarian and D. Noll, Nonsmooth optimization for multiband frequency domain control design, Automatica, (2007), 43(4): 724-731.

- [5] V. D. Blondel and J. N. Tsitsiklis, A survey of computational complexity results in systems and control, *Automatica*, (2000), 36(9): 1249-1274.
- [6] M. Chilali and P. Gahinet, H_∞ design with pole placement constraints: an LMI approach, *IEEE Transactions on Automatic Control*, (1996), 41(3): 358-367.
- [7] M. Chilali, P. Gahinet and P. Apkarian, Robust pole placement in LMI regions, *IEEE Transactions on Automatic Control*, (1999), 44(12): 2257-2270.
- [8] J. Doyle, Analysis of feedback systems with structured uncertainties, *IEE Proceedings D - Control Theory and Applications*, (1982), 129(6): 242-250.
- [9] A. M. Simões, P. Apkarian and D. Noll, Nonsmooth multi-objective synthesis with applications, *Control Engineering Practice*, (2009), 17(11): 1338-1348.
- [10] N. Sivashankar, I. Kaminer and P. P. Khargonekar, Optimal controller synthesis with regional stability constraints, *Proceedings of the 32nd IEEE Conference on Decision and Control*, 1993, (1993), pp. 110-115 vol.1.
- [11] I. Yaesh and U. Shaked, H_∞ Optimization With Pole Constraints of Static Output-Feedback Controllers - A Non-Smooth Optimization Approach, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, (2012), 20(4): 1066-1072.
- [12] K. Zhou, J. C. Doyle and K. Glover, *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632, (1996).
- [13] P. M. Young, Controller design with real parametric uncertainty, *International Journal of Control*, (1996), 65(3): 469-509.
- [14] J. F. S. Santos, P. C. Pellanda and A. M. Simões, Robust pole placement under structural constraints, submitted to a journal.