



Condições em LMIs para Estabilidade Mittag-Leffler e Taxa de Decaimento de Sistemas de Ordem Fracionária com Realimentação de Estados α - Derivativa

Hadamez Kuzminskas¹, Marcelo C. M. Teixeira², Adriana A. de Lima³
Edvaldo Assunção⁴, Rodrigo Cardim⁵

UNESP - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Laboratório de Pesquisa em Controle - LPC, Av. José C. Rossi, nº 1370, 15385-000 - Ilha Solteira, SP, Brasil

Luiz Antonio Jacyntho⁶

UNEMAT - Universidade do Estado de Mato Grosso, Departamento de Matemática, Rua A, São Raimundo, 78390-000, Barra do Bugres, MT, Brasil

Resumo Este artigo contém uma proposta em controle de sistemas lineares de ordem fracionária modelados com a derivada fracionária segundo a definição de Caputo. O controle é realizado no domínio do tempo através da realimentação de estados α -derivativa, a qual utiliza a derivada de ordem α do vetor de estado. Condições em desigualdades matriciais lineares - LMIs (do inglês, *Linear Matrix Inequalities*) são propostas para a estabilização do sistema realimentado e para a incorporação de taxa de decaimento Mittag-Leffler, como índice de desempenho da resposta do sistema.

Palavras-chave. Sistemas de Ordem Fracionária, Desigualdades Matriciais Lineares, Realimentação α -Derivativa, Estabilidade Mittag-Leffler, Taxa de Decaimento Mittag-Leffler.

1 Introdução e Conceitos Preliminares

Desde as últimas décadas, o cálculo fracionário torna-se um tópico atrativo em diversos campos das ciências e engenharias. Em 2017 surgem aprimoramentos em engenharia elétrica, por exemplo, em [4] um controlador fracionário é implementado no controle de um motor DC. No ínterim, a necessidade de consolidar uma teoria de estabilidade para sistemas dinâmicos fracionários culmina em produções relevantes. Em [8], por exemplo,

¹hadamez.unesp@gmail.com

²marcelo@dee.feis.unesp.br

³drikadelima@yahoo.com.br

⁴edvaldo@dee.feis.unesp.br

⁵rcardim@dee.feis.unesp.br

⁶luizantonioj@unemat.br

estão reunidos alguns dos principais teoremas de estabilidade relacionados aos autovalores e pólos de sistemas fracionários lineares, envolvendo equações no espaço de estados e função de transferência. A análise da estabilidade de sistemas fracionários tem o seu maior êxito com a extensão fracionária do método direto de Lyapunov, que se encontra estabelecida em [5]. À princípio, a utilização deste método é onerosa para determinados sistemas, dadas as dificuldades associadas à derivada de ordem fracionária do produto e composição de funções. Entretanto, novos lemas relacionados à derivada de Caputo trouxeram fluidez ao método direto de Lyapunov fracionário [3], [7]. Motivado por estes resultados, em específica alusão ao que é citado ainda em [5] acerca da não necessidade de a taxa de decaimento da energia generalizada de um sistema dinâmico ser exponencial para o sistema ser estável, este artigo propõe condições LMIs para a estabilidade da realimentação α -derivativa e para a incorporação de taxa de decaimento Mittag-Leffler, proposta esta que surge naturalmente como extensão do caso de ordem inteira, estabelecido em [1].

A seguir apresentamos os operadores integral e derivada de ordem fracionária segundo Riemann-Liouville e Caputo, respectivamente, os quais são fundamentados na expressão fechada devida a Cauchy para a n -ésima integral iterada de uma função $f(t)$.

Definição 1.1. [9] *Seja $f(t)$ uma função diferenciável em $t \in [t_0, b]$. A integral e derivada de ordem $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ de $f(t)$, ${}_t I_t^\alpha f(t)$ e ${}^C D_t^\alpha f(t)$, são definidas, respectivamente:*

$${}_t I_t^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \text{ com } {}_t I_t^0 f(t) = f(t) \text{ e} \quad (1)$$

$${}^C D_t^\alpha f(t) := {}_t I_t^{n-\alpha} \left\{ \frac{d^n}{dt^n} f(t) \right\}, \quad (2)$$

sendo n o menor inteiro maior do que α , denotado por $n = \lceil \alpha \rceil$. Se $\alpha \in \mathbb{N}^*$, então $n = \alpha$ e a derivação fracionária se reduz à derivação inteira, à saber, ${}_t I_t^0 \left\{ \frac{d^n}{dt^n} f(t) \right\} = \frac{d^n}{dt^n} f(t)$.

A função Mittag-Leffler é a generalização da função exponencial e aparece na solução de equações diferenciais fracionárias correspondentes ao modelo de sistemas de natureza fracionária. A seguir apresentamos a definição da função Mittag-Leffler nos parâmetros α e β e o seu comportamento assintótico para uma faixa de valores desses parâmetros.

Definição 1.2. [9] *Para $\alpha, \beta > 0$ e $z \in \mathbb{C}$, a função Mittag-Leffler de dois parâmetros, a qual tende a zero para $|\arg(z)| > \alpha \frac{\pi}{2}$, $0 < \alpha < 2$ e $\beta > 0$, é definida como:*

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}. \quad (3)$$

Conforme apresentado nas definições e teorema subsequentes, em [5] é desenvolvida a extensão do método direto de Lyapunov para sistemas de ordem fracionária Caputo utilizando o conceito de estabilidade Mittag-Leffler, a qual pode ser investigada através de uma candidata à função de Lyapunov $V(x)$ e de sua derivada de Caputo ${}^C D_t^\alpha V(x)$.

Definição 1.3. [5] *Seja ${}^C D_t^\alpha x = f(t, x)$ o sistema fracionário não autônomo Caputo, com $\alpha \in (0, 1]$, $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $f : [0, \infty] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua por partes em t e localmente Lipschitz em x , com $\Omega \in \mathbb{R}^n$ um domínio que contém a origem $x = 0$.*

Definição 1.4. [5] Seja a função $m(x) \geq 0$ localmente Lipschitz em $x \in \mathbb{B} \subset \mathbb{R}^n$, com constante Lipschitz m_0 e $m(0) = 0$. Para $\alpha \in (0, 1]$, t_0 o instante inicial, $\lambda > 0$ e $b > 0$, a solução do sistema fracionário na Definição 1.3 é dita M. L. estável (Mittag-Leffler estável) se $\|x\| \leq \{m[x(t_0)]E_\alpha[-\lambda(t - t_0)^\alpha]\}^b$. Por simplicidade, $E_{\alpha,1}(z) = E_\alpha(z)$, $z \in \mathbb{C}$.

Teorema 1.1. [5] Seja $x = 0$ um ponto de equilíbrio do sistema fracionário na Definição 1.3 e $\mathbb{D} \in \mathbb{R}^n$ um domínio que contém a origem. Seja $V(t, x) : [0, \infty) \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciável e localmente Lipschitz em x tal que $\beta_1 \|x\|^a \leq V(t, x) \leq \beta_2 \|x\|^{ab}$ e ${}^C D_t^\alpha V(t, x) \leq -\beta_3 \|x\|^{ab}$, com $t \geq 0$, $x \in \mathbb{D}$, $\alpha \in (0, 1]$ e $\beta_1, \beta_2, \beta_3, a, b$ constantes positivas arbitrárias. Então $x = 0$ é M. L. estável.

Observação 1.1. Para $\alpha \in (0, 1]$, da Definição 1.2, notamos que a estabilidade M. L. implica em estabilidade assintótica, isto é, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$.

As condições do Teorema 1.1 são apresentadas em outro formato em [6]:

Lema 1.1. [6] Seja $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ um vetor de funções diferenciáveis. Se uma função contínua $V(t, x) : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz ${}^C D_t^\alpha V(t, x) \leq -\lambda V(t, x)$, com $\alpha \in (0, 1]$ e $\lambda > 0$, então $V(t, x) \leq V(0, x(0))E_\alpha(-\lambda t^\alpha)$.

Recentemente são realizados esforços para ampliar a investigação da estabilidade de sistemas Caputo através da extensão fracionária do método direto de Lyapunov. O Lema apresentado a seguir permite o desenvolvimento da proposta deste artigo.

Lema 1.2. [7] Seja $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ um vetor de funções diferenciáveis. Para $t \geq 0$, $P = P^T \succ 0$, $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\alpha \in (0, 1]$, a inequação ${}^C D_t^\alpha \{x^T P x\} \leq 2x^T P [{}^C D_t^\alpha x]$ é válida.

2 Declaração do Problema

Problema 1: Considere o sistema Caputo de ordem $\alpha \in (0, 1]$, comensurável, controlável [8], linear, invariante no tempo, com múltiplas entradas, descrito por:

$${}^C D_t^\alpha x = Ax + Bu, \quad (4)$$

em que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tem posto completo, isto é, $\det(A) \neq 0$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado e $u = u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entrada. A proposta é encontrar uma matriz constante $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$, tal que: **1)** $(I + BK) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tem posto completo; **2)** O sistema em (4) é M. L. estável quando realimentado com a lei de controle α -derivativa:

$$u = -K \{ {}^C D_t^\alpha x \}. \quad (5)$$

3 Condições em LMIs para a estabilidade Mittag-Leffler de sistemas de ordem fracionária com realimentação α -derivativa

Se $(I + BK)$ tem posto completo, então o sistema Caputo em (4), realimentado com a lei de controle em (5), é definido por ${}^C D_t^\alpha x = Ax - BK \{ {}^C D_t^\alpha x \}$, $(I + BK) \{ {}^C D_t^\alpha x \} = Ax$,

$${}^C D_t^\alpha x = (I + BK)^{-1} Ax. \quad (6)$$

O Teorema proposto a seguir é uma extensão em sistemas de ordem fracionária do Teorema 1, aplicado à sistemas de ordem inteira, estabelecido em [1].

Teorema 3.1. *Uma condição suficiente para a solução do Problema 1 é a existência de matrizes $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$, tais que:*

$$Q \succ 0, \quad QA^T + AQ + BYA^T + AY^TB^T \prec 0. \quad (7)$$

A factibilidade de (7) permite obter a matriz de realimentação de estados α -derivativa:

$$K = YQ^{-1}. \quad (8)$$

Demonstração. A candidata à função de Lyapunov do tipo quadrática, sobre os estados do sistema em (6), usada na busca de afirmar a estabilidade M. L. do mesmo, é $V(x) = x^TPx$, com $P = P^T \succ 0$. Utilizando o Lema 1.2 e, as equações em (6), substituindo-as, obtemos ${}^CD_t^\alpha V(x) \leq 2x^TP[{}^CD_t^\alpha x] = [(I+BK)^{-1}Ax]^TPx + x^TP[(I+BK)^{-1}Ax]$,

$${}^CD_t^\alpha V(x) \leq x^T \left\{ A^T [(I+BK)^{-1}]^T P + P(I+BK)^{-1}A \right\} x.$$

Obtemos $V(x) > 0$ e ${}^CD_t^\alpha V(x) < 0$ para todo $x \neq 0$, com $V(0) = 0$ e ${}^CD_t^\alpha V(0) = 0$, se $P \succ 0$ e $A^T [(I+BK)^{-1}]^T P + P(I+BK)^{-1}A \prec 0$. Desta última, pré-multiplicando-a pela matriz não singular $C = (I+BK)P^{-1}$ e pós multiplicando-a por $C^T = P^{-1}(I+BK)^T$:

$$P \succ 0, \quad (I+BK)P^{-1}A^T + AP^{-1}(I+BK)^T \prec 0. \quad (9)$$

Conforme o Teorema 1.1, o ponto de equilíbrio do sistema é M. L. estável. Definimos $Q = P^{-1}$ e $Y = KQ$. Se $P = P^T \succ 0$, então $P^{-1} = Q = Q^T \succ 0$. Disto seguem as LMIs em (7). Lembremo-nos de que, para uma matriz não simétrica $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M + M^T \prec 0$ se e somente se $M \prec 0$. Diante disso, do desenvolvimento anterior, $P(I+BK)^{-1}A \prec 0$. A matriz $P(I+BK)^{-1}A$ tem posto completo. Dado que A tem posto completo, então $(I+BK)$ tem posto completo, o que é requerido no Problema 1. $\square$

4 Taxa de decaimento Mittag-Leffler para a realimentação α -derivativa

A taxa de decaimento para sistemas de ordem inteira é definida como a maior constante real $\gamma > 0$, tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\gamma t} \|x\| = 0$, $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$, [2]. Definimos a seguir a taxa de decaimento Mittag-Leffler, para sistemas de ordem fracionária $\alpha \in (0, 1]$.

Definição 4.1. *A taxa de decaimento Mittag-Leffler é a maior constante real $\gamma > 0$, tal que:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{E_\alpha(2\gamma t^\alpha)} \|x\| = 0. \quad (10)$$

Observação 4.1. *Seja $x = x(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ o vetor de estado do sistema fracionário em (4), dado comumente pela composição de funções Mittag-Leffler, correspondente à idêntica natureza de máximo crescimento ou decrescimento em diferentes graus internos do sistema dinâmico. O escalar γ corresponde ao máximo decaimento da função Mittag-Leffler capaz de configurar o limite em (10), para todo estado do sistema fracionário concentrado.*

Mediante a definição anterior, o Lema seguinte é proposto.

Lema 4.1. *Seja $V(x) = x^T P x$, com $P = P^T$, a candidata à função de Lyapunov sobre os estados do sistema em (4) e $\gamma \in \mathbb{R}$ um escalar positivo. Então a condição ${}^C D_t^\alpha V(x) < -2\gamma V(x)$, se satisfeita para todo $x \neq 0$, garante que $V(x) < V(x(0))E_\alpha(-2\gamma t^\alpha)$, $\forall t > 0$. Assim, o sistema realimentado em (6) considera taxa de decaimento maior ou igual a γ .*

Demonstração. Para $P \succ 0$, sabemos que $\lambda_{\min}(P) \|x\|^2 \leq V(x) \leq \lambda_{\max}(P) \|x\|^2$, com $\lambda_{\min}(P)$ e $\lambda_{\max}(P)$ o menor e o maior autovalor de P , respectivamente. Para $\alpha \in (0, 1]$ e $t > 0$ temos que $E_\alpha(-2\gamma t^\alpha) > 0$ e conforme o Lema 1.1 a inequação ${}^C D_t^\alpha V(x) < -2\gamma V(x)$ fornece $V(x) < V(x(0))E_\alpha(-2\gamma t^\alpha)$, portanto:

$$\lambda_{\min}(P) \|x\|^2 \leq V(x) < V(x(0))E_\alpha(-2\gamma t^\alpha) \leq \lambda_{\max}(P) \|x(0)\|^2 E_\alpha(-2\gamma t^\alpha),$$

$$\|x\| < \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \|x(0)\| \sqrt{E_\alpha(-2\gamma t^\alpha)}. \quad (11)$$

De fato, pela Definição 1.4, dado que $V(x) > 0$ e ${}^C D_t^\alpha V(x) < 0$, para todo $x \neq 0$, o sistema fracionário com vetor de estado x é M. L. estável, como vemos em (11), com taxa de decaimento γ , conforme a Definição 4.1. Note que, para $\alpha = 1$ a dinâmica é expressa em derivada inteira e a envoltória Mittag-Leffler se reduz à exponencial com taxa de decaimento γ . $\square$

Teorema 4.1. *O sistema de malha fechada em (6) possui taxa de decaimento Mittag-Leffler maior ou igual a γ se existem matrizes $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$, tais que:*

$$Q \succ 0, \begin{bmatrix} Q A^T + A Q + B Y A^T + A Y^T B^T & Q + B Y \\ Q + Y^T B^T & -\frac{1}{2\gamma} Q \end{bmatrix} \prec 0. \quad (12)$$

A factibilidade de (12) permite obter a matriz de realimentação de estados α -derivativa:

$$K = Y Q^{-1}. \quad (13)$$

Demonstração. Satisfazendo aos Lemas 1.2 e 4.1, para o sistema realimentado em (6):

$${}^C D_t^\alpha \{x^T P x\} \leq x^T \left\{ A^T [(I + BK)^{-1}]^T P + P(I + BK)^{-1} A \right\} x < -x^T 2\gamma P x,$$

$$A^T [(I + BK)^{-1}]^T P + P(I + BK)^{-1} A \prec -2\gamma P, \text{ para todo } x \neq 0. \quad (14)$$

Pré-multiplicando a desigualdade em (14) pela matriz não singular $C = (I + BK)P^{-1}$ e pós multiplicando-a por $C^T = P^{-1}(I + BK)^T$, obtemos:

$$-(I + BK)P^{-1}A^T - AP^{-1}(I + BK)^T - (-1) [(I + BK)P^{-1}] 2\gamma P(-1) [P^{-1}(I + BK)^T] \succ 0,$$

$$\begin{bmatrix} -(I + BK)P^{-1}A^T - AP^{-1}(I + BK)^T & -(I + BK)P^{-1} \\ -P^{-1}(I + BK)^T & \frac{1}{2\gamma}P^{-1} \end{bmatrix} \succ 0.$$

Na última etapa foi utilizado o complemento de Schur [2]. Definimos $Q = P^{-1}$ e $Y = KQ$. Se $P > 0$, então $P^{-1} = Q > 0$. Disto seguem as LMIs em (12). $\square$

Observação 4.2. *As LMIs em (7) e (12) são idênticas às estabelecidas em [1] nos teoremas 1 e 2, respectivamente.*

5 Exemplo Numérico

Considere o sistema linear de ordem $\alpha = 0,7$, controlável e invariante no tempo:

$$\begin{bmatrix} D_t^{0,7} x_1(t) \\ D_t^{0,7} x_2(t) \\ D_t^{0,7} x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 0,75 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u(t), \quad (15)$$

realimentado com a lei de controle α -derivativa em (5). Para a solução das restrições de taxa de decaimento em (12), as quais implicam nas restrições de estabilidade em (7), foi utilizado o solver SeDuMi [10] no ambiente do software MatLab[®]. Obtemos as seguintes matrizes de ganho, para as taxas de decaimento $\gamma = 0,1$ e $\gamma = 1$, respectivamente:

$$K_{0,1} = \begin{bmatrix} -0,7082 & -0,0808 & 0,0943 \\ 0,4011 & -0,7262 & -1,7480 \end{bmatrix}, \quad K_1 = \begin{bmatrix} -0,6951 & 0,2022 & -0,2406 \\ 0,4322 & -0,5787 & -0,6017 \end{bmatrix}.$$

Conforme a Figura 1, o sistema em malha aberta evolui de forma instável à partir de uma condição inicial e é estabilizado sob as referidas taxas de decaimento. Ademais, verificamos que quanto maior é a taxa de decaimento mais breve é o transitório do sistema. Estas simulações foram realizadas com o pacote computacional em [8].

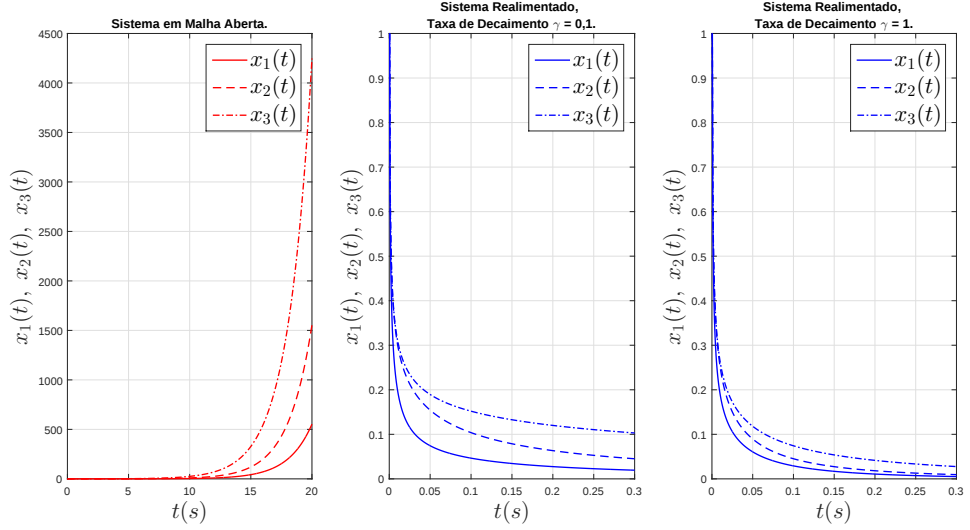


Figura 1: Controle de um sistema de ordem $\alpha = 0,7$, com condições iniciais $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1$.

6 Conclusões

Este artigo propõe uma metodologia de controle em sistemas de ordem $\alpha \in (0,1]$ através da realimentação α -derivativa, estabelecendo condições suficientes em LMIs que garantem a estabilidade Mittag-Leffler, com taxa de decaimento de projeto γ . A abordagem é avaliada em um exemplo numérico, no qual observamos a estabilização assintótica

de um sistema de ordem $\alpha = 0,7$, para taxas de decaimento $\gamma = 0,1$ e $\gamma = 1$. Em uma perspectiva futura, estudamos a adequação da proposta para sistemas fracionários com incertezas politópicas, bem como a sua aplicabilidade no controle de vibrações em sistemas mecânicos descritos com a derivada de Caputo.

7 Agradecimentos

Os autores agradecem a CAPES, a FAPESP (Proc. n. 2011/17610-0) e ao CNPq pelo apoio financeiro.

Referências

- [1] E. Assunção, M. C. M. Teixeira, F. A. Faria, N. A. P. Da Silva and R. Cardim, Robust state-derivative feedback LMI-based designs for multivariable linear systems. *International Journal of Control*, vol. 80, 1260-1270, (2007).
- [2] S. Boyd, L. El Ghaoui and E. Feron and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in Systems Control Theory*, SIAM, (1994).
- [3] N. A. Camacho, M. A. D. Mermoud, and J. A. Gallegos. Lyapunov functions for fractional order systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 9, 2951-2957, (2014).
- [4] I. Dimeas, I. Petras and C. Psychalinos. New analog implementation technique for fractional-order controller: A DC motor control. *AEU-International Journal of Electronics and Communications*, vol. 78, 192-200, (2017).
- [5] Y. Li, Y. Chen and I. Podlubny. Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems: Lyapunov direct method and generalized Mittag-Leffler stability. *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 59, 1810-1821, (2010).
- [6] S. Liu, W. Jiang, X. Li and X. F. Zhou. Lyapunov stability analysis of fractional nonlinear systems. *Applied Mathematics Letters*, vol. 51, 13-19, (2016).
- [7] M. A. D. Mermoud, N. A. Camacho, J. A. Gallegos and R. C. Linares. Using general quadratic Lyapunov functions to prove Lyapunov uniform stability for fractional order systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 22, 650-659, (2015).
- [8] I. Petras. *Fractional-order nonlinear systems: modeling, analysis and simulation*. Springer Science and Business Media, (2011).
- [9] G. H. O. Salgado. Métodos numéricos para solução de equações diferenciais segundo a derivada de caputo, Tese de Doutorado em Engenharia Elétrica, UFMG, (2015).
- [10] J. F. Sturm, Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones, *Optimization Methods and Software*, vol. 11, 625-653, (1999).