



DINCON 2017

CONFERÊNCIA BRASILEIRA DE DINÂMICA, CONTROLE E APLICAÇÕES
30 de outubro a 01 de novembro de 2017 – São José do Rio Preto/SP

Controle do Sistema Caótico de Lorenz Utilizando Soma de Quadrados

Igor T. M. Ramos¹, Marcelo C. M. Teixeira², Edvaldo Assunção³, Rodrigo Cardim⁴

UNESP - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia, Ilha Solteira, Laboratório de Pesquisa em Controle - LPC, Av. José Carlos Rossi, nº 1370, 15385-000 - Ilha Solteira, SP, Brasil
Uiliam N. L. T. Alves⁵

IFPR - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná, Avenida Dr. Tito s/n, Jardim Panorama, 86.400-000 - Jacarezinho, PR, Brasil

Erica R. M. D. Machado⁶

UNESP - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia, Ilha Solteira, Departamento de Matemática - DMAT, Alameda Rio de Janeiro, nº 266, 15385-000 - Ilha Solteira, SP, Brasil

Resumo. Neste artigo propõe-se um controlador baseado em soma de quadrados (do inglês *Sum of Square* - SOS) para o sistema caótico de Lorenz, com a especificação da taxa de decaimento. A utilização da técnica de SOS no sistema caótico de Lorenz traz uma série de vantagens à outras técnicas disponíveis na literatura, como a diminuição do conservadorismo no projeto de controladores e a não exigência de se considerar uma região de operação na obtenção do modelo matemático da planta para o projeto do controlador. Portanto, o controlador projetado torna a origem do sistema globalmente assintoticamente estável.

Palavras-chave. Soma de Quadrados, Sistemas não Lineares, Sistema Caótico de Lorenz.

1 Introdução

Considerando uma Função de Lyapunov Quadrática (FLQ) foi possível formular vários problemas na teoria de controle em desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* - LMI). Recentemente, com o objetivo de se reduzir o conservadorismo das FLQ, foram propostas as técnicas de controle baseadas em SOS e programação semidefinida para a construção de funções de Lyapunov polinomiais, que em muitos casos,

¹igorminari@gmail.com

²marcelo@dee.feis.unesp.br

³edvaldo@dee.feis.unesp.br

⁴rcardim@dee.feis.unesp.br

⁵uiliam.alves@ifpr.edu.br

⁶daruichi@mat.feis.unesp.br

não exigem a especificação de uma região de operação para a modelagem matemática da planta [3, 5, 7].

O sistema caótico de Lorenz é descrito apenas por funções polinomiais. Desta forma, é possível projetar um controlador utilizando as técnicas baseadas em SOS com taxa de decaimento para este sistema, não havendo a necessidade de se considerar um ponto ou região de operação, como em outras técnicas disponíveis na literatura. Portanto, a origem do sistema será globalmente assintoticamente estável com a possibilidade de se controlar o tempo de estabelecimento, ou seja, o tempo necessário para que a resposta se encontre definitivamente dentro de determinada margem em torno do ponto de equilíbrio.

Em [8], segundo os autores, foi proposta a sincronização de um sistema caótico pela primeira vez, utilizando *fuzzy* polinomial baseado em SOS, considerando índices de desempenho. Neste artigo é proposto o controle do sistema caótico de Lorenz sem a utilização de modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno (TS) polinomiais.

Neste artigo adotou-se a seguinte notação: $A^k(x(t))$ denota a k -ésima linha de $A(x(t))$ e $\hat{x}(x(t))$ é um vetor em que cada um dos seus elementos é um monômio dependente de $x(t)$. Um monômio em $x(t)$ é uma função da forma $x_1^{\alpha_1}(t)x_2^{\alpha_2}(t), \dots, x_n^{\alpha_n}(t)$, sendo que $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ são inteiros não negativos. Neste caso, o grau do monômio é dado por $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$. O argumento “ t ” foi omitido em alguns casos, por simplicidade.

2 Soma de Quadrados

O método computacional usado neste trabalho depende da decomposição em SOS de polinômios multivariados. Um polinômio multivariado $f(x(t))$ (sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$) é SOS se existirem polinômios $f_1(x(t)), \dots, f_m(x(t))$ tais que $f(x(t)) = \sum_{i=1}^m f_i^2(x(t))$. Sendo $f(x(t))$ um SOS, naturalmente implica que $f(x(t)) \geq 0$ para todo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ e isso é equivalente à existência de uma forma quadrática especial declarada na seguinte proposição.

Proposição 2.1. [5] *Seja $f(x(t))$ um polinômio em $x(t) \in \mathbb{R}^n$ de grau $2d$. Além disso, considere que $\hat{x}(x(t))$ é um vetor coluna com todos os seus elementos sendo monômios em $x(t)$ com grau não maior que d . Então, $f(x(t))$ é um SOS se, e somente se, existe uma matriz semidefinida positiva P tal que*

$$f(x(t)) = \hat{x}^T(x(t))P\hat{x}(x(t)). \quad (1)$$

Expressar um polinômio em SOS usando uma forma quadrática como em (1) é também referido como método da matriz de Gram [5].

3 Projeto de Controladores via SOS

A seguir será apresentada uma proposição importante com relação ao relaxamento de condições polinomiais necessária para o projeto dos controladores polinomiais.

Proposição 3.1. [5] *Seja $F(x(t))$ uma matriz $\mathbb{R}^{n \times n}$ polinomial simétrica de grau $2d$ em $x(t) \in \mathbb{R}^n$. Além disso, $\hat{x}(x(t))$ sendo um vetor coluna $N \times 1$ cujos elementos são todos monômios em $x(t)$ com grau não maior que d . Considere as seguintes condições:*

1. $F(x(t)) \geq 0$ para todo $x(t) \in \mathbb{R}^n$;
 2. $v^T(t)F(x(t))v(t)$ é um SOS, sendo que $v(t) \in \mathbb{R}^N$;
 3. Sendo que $\otimes$ denota o produto de Kronecker, existe uma matriz positiva semidefinida Q tal que $v^T(t)F(x(t))v(t) = (v(t) \otimes \hat{x}(x(t)))^T Q (v(t) \otimes \hat{x}(x(t)))$.
- Então, (1) $\Leftarrow$ (2) e (2) $\Leftrightarrow$ (3).

O Lema a seguir será útil na formulação dos controladores polinomiais.

Lema 3.1. [5] Para uma matriz polinomial simétrica $P(x)$ que é não singular para todo x , tem-se que

$$\frac{\partial P}{\partial x_i}(x) = -P(x) \left(\frac{\partial P^{-1}}{\partial x_i}(x) \right) P(x). \quad (2)$$

Considere o sistema a seguir

$$\dot{x}(t) = A(x(t))\hat{x}(x(t)) + B(x(t))u(t). \quad (3)$$

Suponha que o sistema dado em (3) possa ser representado apenas por funções polinomiais. Considere que $A^k(x)$ denota a linha k de $A(x)$, $\kappa = \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ são os índices das linhas de $B(x)$ com todos elementos iguais a zero e define-se $\tilde{x} = (x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_m})$.

O Teorema 3.1 é uma extensão de um resultado apresentado em [5], com a especificação da taxa de decaimento $\alpha \geq 0$, considerando a lei de controle dada a seguir:

$$u(t) = K(x(t))\hat{x}(x(t)). \quad (4)$$

Teorema 3.1. Para o sistema (3), suponha que exista uma matriz simétrica polinomial $X(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$, uma matriz polinomial $M(x) \in \mathbb{R}^{n \times N}$ e uma constante $\alpha \geq 0$, tais que (5) e (6) são satisfeitas para todo $v \in \mathbb{R}^N$, em que $\epsilon_1(x) > 0$ e $\epsilon_2(x) \geq 0$ para todo $x \neq 0$ são polinômios não negativos:

$$v^T (X(\tilde{x}) - \epsilon_1(x)I) v \quad \text{é SOS}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & -v^T \left(X(\tilde{x})A^T(x)T^T(x) + T(x)A(x)X(\tilde{x}) + M^T(x)B^T(x)T^T(x) + T(x)B(x)M(x) \right. \\ & \quad \left. - \sum_{k \in \kappa} \frac{\partial X}{\partial x_j}(\tilde{x}) \left(A^k(x)\hat{x}(x) \right) + 2\alpha X(\tilde{x}) + \epsilon_2(x)I \right) v \quad \text{é SOS}, \end{aligned} \quad (6)$$

sendo $v \in \mathbb{R}^N$ um vetor que independe de x , $T(x) \in \mathbb{R}^{N \times n}$ é uma matriz polinomial cujos elementos (i, j) são dados por $T^{ij}(x) = \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial x_j}(x)$.

Se (6) for factível com $\epsilon_2(x) > 0$ para todo $x \neq 0$, então o ponto de equilíbrio em $x = 0$ é assintoticamente estável em malha fechada considerando a lei de controle (4), e se $X(\tilde{x})$ for uma matriz constante, então é garantida a estabilidade global, com uma taxa de decaimento maior ou igual a α . O ganho de realimentação $K(x(t))$ da lei de controle (4) é obtido da seguinte forma

$$K(x) = M(x)X^{-1}(\tilde{x}). \quad (7)$$

Demonstração. Considere uma candidata à função de Lyapunov $V(x) = \hat{x}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})\hat{x}(x)$, sendo $X^{-1}(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ uma matriz polinomial simétrica. A condição (5) implica que ambos $X(\tilde{x})$ e $X^{-1}(\tilde{x})$ são definidas positivas para todos os valores de x . Portanto $V(x)$ é uma função definida positiva para todo x .

Desde que a linha k de $B(x)$ é igual a $B^k(x) = 0$ para $k \in \kappa$, tem-se que

$$\dot{x}_k = A^k(x)\hat{x}(x), \quad (8)$$

para $k \in \kappa$. Por outro lado, sendo x_i em que $i \notin \kappa$, tem-se

$$\frac{\partial X^{-1}}{\partial x_i}(\tilde{x}) = 0. \quad (9)$$

Das condições (2), (8) e (9), tem-se que a derivada ao longo do tempo de $V(x)$ para o sistema (3) e (4) em malha fechada se torna

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) = \hat{x}^T(x) & \left[\sum_{k \in \kappa} \frac{\partial X^{-1}}{\partial x_k}(\tilde{x}) \left(A^k(x)\hat{x}(x) \right) + X^{-1}(\tilde{x})T(x)B(x)K(x) + A^T(x)T^T(x)X^{-1}(\tilde{x}) \right. \\ & \left. + K^T(x)B^T(x)T^T(x)X^{-1}(\tilde{x}) + X^{-1}(\tilde{x})T(x)A(x) \right] \hat{x}(x). \end{aligned} \quad (10)$$

Das condições (5), (6) e (7) tem-se que:

$$\begin{aligned} & \left(X(\tilde{x})A^T(x)T^T(x) + T(x)A(x)X(\tilde{x}) + M^T(x)B^T(x)T^T(x) \right. \\ & \left. + T(x)B(x)M(x) - \sum_{k \in \kappa} \frac{\partial X}{\partial x_k}(\tilde{x}) \left(A^k(x)\hat{x}(x) \right) \right) \end{aligned} \quad (11)$$

é semidefinida negativa para todo x .

Portanto, multiplicando (11) por -1 tem-se que $-\dot{V}(x) \geq 0$. Além disso, considerando-se $\epsilon_2(x) > 0$ para $x \neq 0$, então de (6), $-\dot{V}(x) > 0$ para todo $x \neq 0$. Então, o ponto de equilíbrio $x = 0$ é assintoticamente estável. Finalmente, se $X(\tilde{x})$ é uma matriz constante, então $V(x)$ é radialmente ilimitada e a estabilidade global é garantida. Por fim, considerando $\dot{V}(x) \leq -2\alpha V(x)$ para todas as trajetórias, se obtém (6) e a taxa de decaimento é maior ou igual a α .

□

Observação 3.1. [5] Note que $v \in \mathbb{R}^N$ é um vetor que independe de x , pois se $L(x)$ é uma matriz polinomial simétrica em x , então $L(x)$ não é sempre uma matriz semidefinida positiva para todo x , mesmo se $\hat{x}^T(x)L(x)\hat{x}(x)$ é um SOS. Contudo, é garantido por meio da Proposição 3.1 que se $v^T L(x)v$ é um SOS, então $L(x) \geq 0$ para todo x .

Para a resolução das restrições de SOS foi utilizado o software MatLab[®], juntamente com o solver “SeDuMi” [6] e a interface SOOSTOOLS [4].

4 Controle do Sistema Caótico de Lorenz

Os sistemas caóticos possuem dinâmica aperiódica complexa, sensível ao vetor de estado inicial, além de serem sistemas não lineares. O objetivo deste trabalho é projetar uma lei de controle (4) tal que a origem seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável com taxa de decaimento maior ou igual a α para o sistema caótico de Lorenz [2] em malha fechada. Será considerado que a entrada possa ser escolhida de forma arbitrária, como em [1]. O sistema pode ser representado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(x(t))\hat{x}(x(t)) + B(x(t))u(t), \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & -x_1 \\ 0 & x_1 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t).\end{aligned}\quad (12)$$

sendo $u(t)$ a entrada de controle e as constantes $\sigma = 10$, $r = 28$ e $b = 8/3$. Na Figura 1 é apresentada a trajetória de estado do sistema em malha aberta, o vetor de estado inicial é $x(0) = [-10 \ -10 \ -10]^T$ representado por uma círculo em azul e o vetor de estado final depois de 20 segundos é representado por um quadrado em azul.

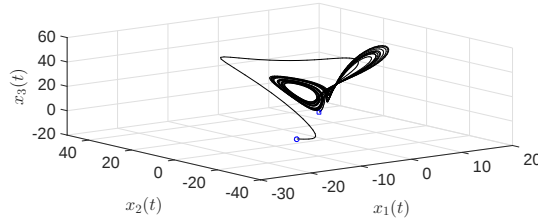


Figura 1: Trajetória de estado do sistema de Lorenz em malha aberta.

Utilizando-se o Teorema 3.1, considere um $X(\tilde{x})$ constante e $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-9}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$. Os resultados obtidos são mostrados a seguir, inicialmente adotando-se $\alpha = 0$:

$$X(\tilde{x}(t)) = 10^6 \times \begin{bmatrix} 0,9369 & -0,2448 & 0,0000 \\ -0,2448 & 3,7386 & -0,0000 \\ 0,0000 & -0,0000 & 3,7386 \end{bmatrix},$$

$$K(x(t)) = \begin{bmatrix} 5,5464 - 4,9279 \times 10^{-17}x_1 - 4,4132 \times 10^{-17}x_2 - 2,1346 \times 10^{-17}x_3 \\ -18,2979 + 1,1815 \times 10^{-09}x_1 - 2,903 \times 10^{-17}x_2 - 1,5498 \times 10^{-17}x_3 \\ -8,0133 \times 10^{-09} + 0,065469x_1 - 5,3379 \times 10^{-16}x_2 + 1,0626 \times 10^{-15}x_3 \end{bmatrix}^T.$$

Agora, para $\alpha = 2$:

$$X(\tilde{x}(t)) = \begin{bmatrix} 0,0465 & -0,0409 & -0,0000 \\ -0,0409 & 0,5297 & -0,0000 \\ -0,0000 & -0,0000 & 0,5297 \end{bmatrix},$$

$$K(x(t)) = \begin{bmatrix} -2,2459 \times 10^{-12}x_1 + 9,6962 \times 10^{-13}x_2 + 7,8381 \times 10^{-13}x_3 - 3,0291 \\ -3,8933 \times 10^{-11}x_1 + 6,209 \times 10^{-14}x_2 + 6,094 \times 10^{-14}x_3 - 13,8096 \\ 0,077331x_1 + 5,1935 \times 10^{-15}x_2 - 4,0902 \times 10^{-14}x_3 + 5,5604 \times 10^{-11} \end{bmatrix}^T.$$

Na Figura 2 são apresentadas as trajetórias de estado do sistema de Lorenz em malha fechada e na Figura 3 as variáveis de estado do sistema e os sinais de controle.

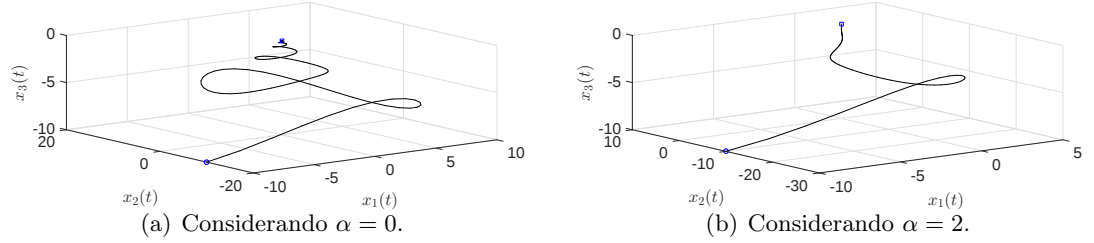


Figura 2: Trajetórias de estado do sistema de Lorenz em malha fechada.

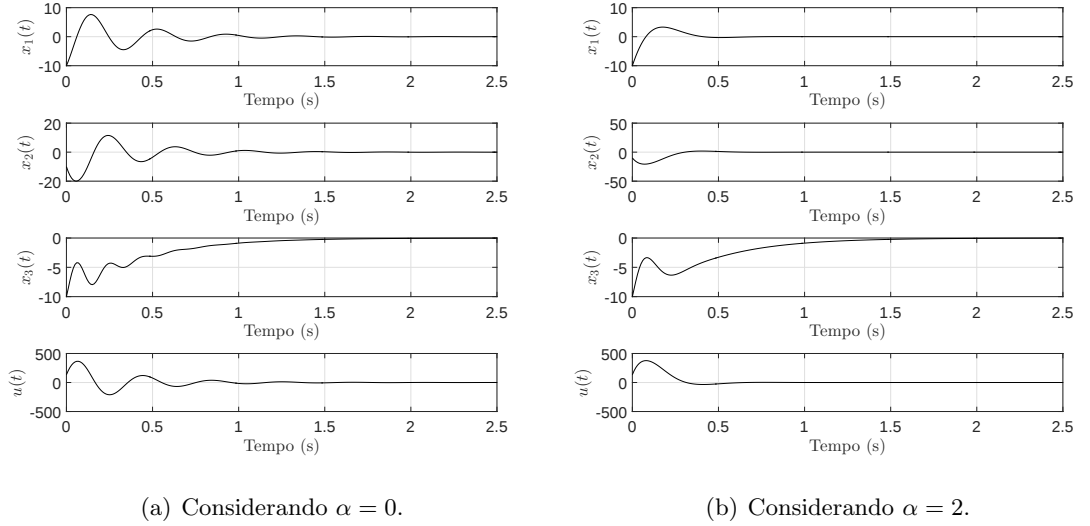


Figura 3: Variáveis de estado e sinais de controle do sistema em malha fechada.

Portanto, quanto maior for o valor de α mais rápido será o tempo de estabelecimento do sistema. Deve-se observar que o controlador projetado torna o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema controlado globalmente assintoticamente estável. Outras técnicas de controle poderiam ser utilizadas, como a linearização em torno de uma condição de operação, cuja a dinâmica do sistema seria representada e controlada apenas na condição de operação. Para a utilização de modelos *fuzzy* TS com a parte consequente linear seria necessário conhecer a região de operação do sistema. Deve-se notar que quanto maior for a região de operação do sistema, maior será o setor não linear do sistema *fuzzy* TS, o que interferirá na factibilidade do projeto de controladores.

5 Conclusões

Com a metodologia adotada neste artigo foi possível controlar o sistema caótico de Lorenz, especificando a taxa de decaimento, sem a necessidade de se utilizar técnicas de controle não linear comumente encontradas na literatura, como linearização ou modelos *fuzzy* TS. Utilizou-se uma metodologia sistemática para o controle de um sistema não linear. O controlador obtido pode ser utilizado para tornar a origem do sistema globalmente assintoticamente estável. Em trabalhos futuros, serão consideradas incertezas e outros índices de desempenho.

Agradecimentos

Os autores agradecem a CAPES, a FAPESP (Proc. n. 2011/17610-0) e o CNPq pelo apoio financeiro.

Referências

- [1] H. J. Lee, J. B. Park and G. Chen, Robust fuzzy control of nonlinear systems with parametric uncertainties, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 9, 369-379, (2001).
- [2] E. N. Lorenz, Deterministic nonperiodic flow, Journal of the atmospheric sciences, vol. 20, 130-141, (1963).
- [3] P. A. Parrilo, Structured semidefinite programs and semialgebraic geometry methods in robustness and optimization, PhD thesis, California Institute of Technology, (2000).
- [4] S. Prajna, A. Papachristodoulou and P. A. Parrilo. SOSTOOLS: Sum of Squares Optimization Toolbox for MATLAB, Versão 2.00, California Institute of Technology, (2004).
- [5] S. Prajna, A. Papachristodoulou, and F. Wu, Nonlinear control synthesis by sum of squares optimization: A Lyapunov-based approach, Proceedings of the Asian Control Conference, vol. 1, 157-165, (2004).
- [6] J. F. Sturm, Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones, Optimization Methods and Software, vol. 11, 625-653, (1999).
- [7] K. Tanaka, H. Yoshida, H. Ohtake, and H. O. Wang, A sum-of-squares approach to modeling and control of nonlinear dynamical systems with polynomial fuzzy systems, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 17, 911-922, (2009).
- [8] G. R. Yu and H. T. Huang, A sum-of-squares approach to synchronization of chaotic systems with polynomial fuzzy systems, Proceedings of the International Conference on Fuzzy Theory and it's Applications, 175-180, (2012), DOI: 10.1109/iFUZZY.2012.6409696.