



Uma avaliação rigorosa da intermitência no mapa logístico por meio do limite inferior do erro

Marcella Nathália Resende de Oliveira¹

Erivelton Geraldo Nepomuceno²

Departamento Engenharia Elétrica, UFSJ, São João del-Rei, MG,

Grupo de Controle e Modelagem, GCOM

Resumo. Este artigo investiga o tempo máximo de simulação em que o fenômeno da intermitência pode ser observado com confiança numérica em mapas discretos. Foram empregados conceitos de análise intervalar e o limite inferior do erro. Como resultado, foi observado que a confiabilidade da intermitência é dependente da condição inicial. Quatro exemplos numéricos mostram a eficiência da proposta.

Palavras-chave. Mapa logístico, Intermitência, Aritmética Intervalar, Limite inferior do erro.

1 Introdução

Sistemas dinâmicos são modelos matemáticos para muitos problemas na física, biologia, economia e engenharia. Dentre os inúmeros tipos de sistemas, os sistemas caóticos evoluem no domínio do tempo com um comportamento aperiódico, em que seu estado futuro é extremamente dependente do estado atual [9].

Uma parcela significativa da investigação sobre sistemas dinâmicos é realizada por meio de simulações computacionais. Hoje, existe a percepção de que se vive uma era cuja capacidade computacional é ilimitada, podendo atingir precisões arbitrárias. A realidade, porém, não é bem assim. A limitação de memória se torna um empecilho para o cálculo com precisão infinita, mesmo com o uso de simulação simbólica. Conforme indicado em [7], existem muitos trabalhos publicados em que a confiabilidade dos resultados numéricos não é cuidadosamente verificada. Na investigação de alguns destes problemas, Lorenz [6] cunhou o termo “caos computacional” enquanto estudava o comportamento caótico de equações diferenciais usadas para aproximar um sistema contínuo representado por um conjunto de equações diferenciais quando o tamanho do passo é aumentado. Nepomuceno [10] apresentou um estudo em um dos softwares mais utilizados na área de pesquisa de

¹marcella.oliveira@hotmail.com

²nepomuceno@ufs.br

Identificação de Sistemas, o Matlab, utilizando precisão dupla, no qual uma sequência simples de iterações convergiu para a resposta errada. Em continuidade aos trabalhos dessa linha, Rodrigues Júnior e Nepomuceno [14] utilizam análise intervalar para reproduzir os mesmos resultados obtidos em [10], mostrando mais uma vez que o cálculo dos pontos fixos pode exigir cuidadosa atenção no que se refere à computação numérica.

O propósito deste estudo é trabalhar com sistemas que apresentam comportamento intermitente - ora regular, ora caótico [4, 13]. Boa parte da pesquisa que envolve intermitência faz uso de simulação computacional para reproduzir resultados numéricos relevantes. Entretanto, pouca atenção tem sido dada para o tempo máximo de simulação em que o fenômeno da intermitência pode ser observado. Neste trabalho, a busca pela indicação desse tempo será guiada pelo limite inferior do erro [11]. Também será feita uma análise da influência da condição inicial na observação deste fenômeno.

O artigo está organizado da seguinte forma. Na Seção 2, apresenta-se os conceitos preliminares a respeito de função recursiva e mapa logístico, o limite inferior do erro (lower bound error) e ponto fixo. Em seguida, na Seção 3, a metodologia é apresentada. Os resultados são apresentados na Seção 4, enquanto as considerações finais são indicadas na Seção 5.

2 Conceitos Preliminares

2.1 Mapa Logístico

Inicialmente, as funções recursivas podem ser definidas da seguinte forma, de acordo com [10]: seja $\mathbf{I} \subseteq \mathbf{R}$ um espaço métrico com $f : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{R}$ tem-se que:

$$x_n = f(x_{n-1}). \quad (1)$$

O mapa logístico foi descrito pelo biólogo May [8]. É uma equação que ao ter seus parâmetros variados, apresenta um comportamento diferenciado. O Mapa Logístico foi descrito como:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n). \quad (2)$$

A Equação (2) foi desenvolvida como um modelo populacional, com x_n sendo um número entre 0 e 1 que representa a razão entre a população existente na n -ésima geração e o maior número possível de indivíduos e r como sendo uma taxa de crescimento da população. Escolhendo um valor para o parâmetro r e iterando recursivamente o mapa a partir de uma condição inicial x_0 , obtém-se uma série temporal da equação do mapa logístico.

Trata-se, então, de um exemplo de função recursiva, capaz de reproduzir o comportamento de fenômenos não-lineares. A Equação (2) chama atenção por ser um modelo bastante simples, mas capaz de se comportar de maneira complexa. É extremamente sensível mesmo com pequenas variações das condições iniciais ou do número de iterações tomadas. Dessa forma, os erros são inerentes ao processo quando procura-se conhecer o comportamento para infinitas iterações.

2.2 Ponto Fixo

A partir da iteração subsequente de (1), é possível gerar séries de tempo discreto. A escolha de f define o comportamento da série gerada: ponto fixo de período 1 ou maior ou comportamento caótico. Segundo [1], se $f(x^*) = x^*$, então considera-se que x^* é um ponto fixo de $f(x)$. O princípio de mapeamento da contração é um meio simples para encontrar o ponto fixo a partir de uma condição inicial com um número x_0 arbitrário e da definição da sequência x_n por $x_n = f(x_{n-1})$ [2, 15]. Se essa sequência for convergente, então $x_n \rightarrow x^*$ à medida em que $n \rightarrow \infty$.

2.3 Limite Inferior do Erro

O limite inferior do erro (lower bound error) será utilizado para observação do erro inerente à simulação. Isso será um indicativo de que a simulação pode gerar intermitência de modo equivocado. Será indicado na metodologia que uma forma de ter certeza disso é quando utiliza-se $x_0 = 1/r$. O resultado final deveria ser o ponto fixo, mas por fim gera intermitência.

Definição 1. *Sejam duas pseudo-órbitas $\hat{x}_{a,n}$ e $\hat{x}_{b,n}$ derivadas de duas extensões intervalares.*

$$\delta_{\alpha,n} = \frac{|\hat{x}_{a,n} - \hat{x}_{b,n}|}{2} \quad (3)$$

é o limite inferior do erro do mapa $f(x)$ quando $\delta_{a,n} \geq \delta_{\alpha,n}$ ou $\delta_{b,n} \geq \delta_{\alpha,n}$,

em que $\delta_{a,n}$ e $\delta_{b,n}$ são os erros referentes a cada pseudo-órbita.

Considerando a equação do mapa logístico, foram obtidas duas pseudo-órbitas derivadas da Equação (2) - apresentadas a seguir. Elas são equações matematicamente equivalentes, mas diferentes do ponto de vista da representação em ponto flutuante. Isso significa que duas sequências matematicamente equivalentes de operações aritméticas podem levar a dois resultados diferentes, devido às propriedades da aritmética real que não são totalmente válidas na aritmética de ponto flutuante [5, 12].

$$x_a(k+1) = r \cdot x_a(k) - r \cdot (x_a(k))^2; \quad (4)$$

$$x_b(k+1) = r \cdot x_b(k) \cdot (1 - x_b(k)). \quad (5)$$

3 Metodologia

Dada a equação $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$, que descreve o mapa logístico, é possível observar o crescimento do erro na sua simulação e avaliar rigorosamente se é possível ou não garantir a existência de intermitência com a precisão computacional utilizada. Os passos para isso são:

1. Determinação das extensões intervalares - Equações (4) e (5);

2. Determinação do conjunto de parâmetros r e condições iniciais a serem avaliados. Neste caso será utilizado o parâmetro $r = 3,8283$ e quatro condições iniciais diferentes $x_0 = 0,3$ [9], $x_0 = 1/r$, $x_0 = 300/341$ e $x_0 = 1904/6365$. Foi feita uma busca heurística por condições iniciais que pudessem comprovar a existência de regimes caóticos e regulares em uma mesma janela de tempo;

3. Cálculo do limite inferior do erro:

$$\delta_{\alpha,n} = \frac{|\hat{x}_{a,n} - \hat{x}_{b,n}|}{2};$$

4. Análise qualitativa das duas pseudo-órbitas;
5. Cálculo do tempo máximo de simulação.

A partir deste procedimento espera-se determinar até que ponto existe ou não intermitência e até quantas iterações isso ocorre.

4 Resultados

Os resultados obtidos com a simulação do mapa logístico para o parâmetro $r = 3,8283$ e a condição inicial $x_0 = 0,3$ são apresentados nas Figuras 1 e 2.

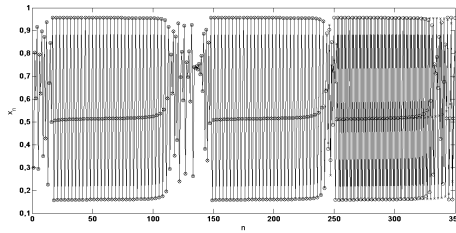


Figura 1: Simulação de (2), com parâmetro $r = 3,8283$ e $x_0 = 0,3$.

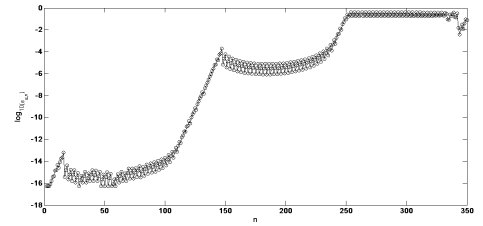


Figura 2: Evolução do erro da simulação de (2), com parâmetro $r = 3,8283$ e $x_0 = 0,3$.

Os resultados obtidos com a simulação do mapa logístico para o parâmetro $r = 3,8283$ e a condição inicial $x_0 = 1/r$ são apresentados nas Figuras 3 e 4.

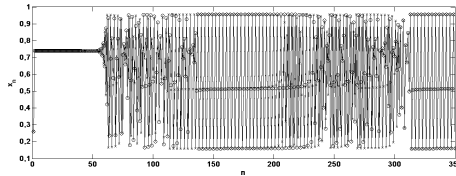


Figura 3: Simulação de (2), com parâmetro $r = 3,8283$ e $x_0 = 1/r$.

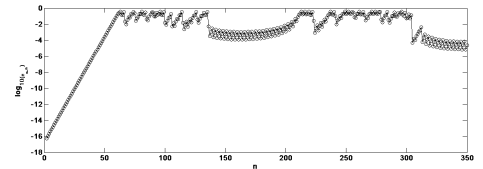


Figura 4: Evolução do erro da simulação de (2), com parâmetro $r = 3,8283$ e $x_0 = 1/r$.

Os resultados obtidos com a simulação do mapa logístico para o parâmetro $r = 3,8283$ e a condição inicial $x_0 = 300/341$ são apresentados nas Figuras 5 e 6. É observado que logo no primeiro regime laminar (regular) para uma das extensões intervalares, a outra ainda continua com comportamento caótico.

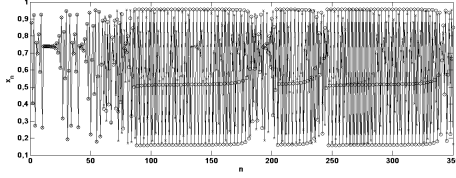


Figura 5: Simulação de (2), com parâmetro $r = 3,8283$ e $x_0 = 300/341$.

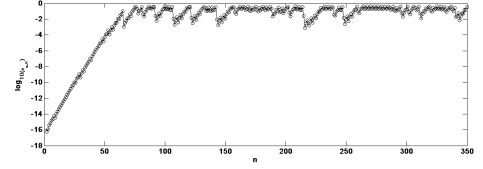


Figura 6: Evolução do erro da simulação de (2), com parâmetro $r = 3,8283$ e $x_0 = 300/341$.

Os resultados obtidos com a simulação do mapa logístico para o parâmetro $r = 3,8283$ e a condição inicial $x_0 = 1904/6365$ são apresentados nas Figuras 7 e 8. É observado que logo no primeiro regime laminar (regular) para uma das extensões intervalares, a outra ainda continua com comportamento caótico. O mesmo fato foi observado na Figura 5.

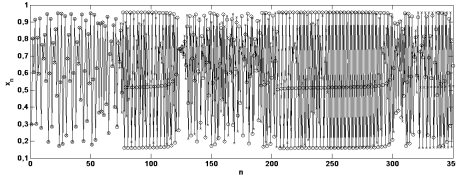


Figura 7: Simulação de (2), com parâmetro $r = 3,8283$ e $x_0 = 1904/6365$.

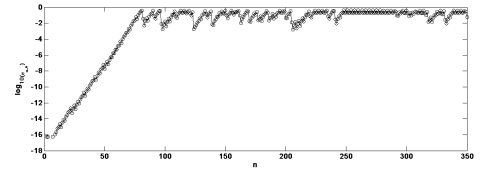


Figura 8: Evolução do erro da simulação de (2), com parâmetro $r = 3,8283$ e $x_0 = 1904/6365$.

Pela análise das simulações, é possível observar que o comportamento intermitente é dependente de x_0 , ou seja, ele se apresenta de diferentes formas quando a condição inicial é modificada. Além disso, percebe-se que ele se apresenta na forma de erro numérico ou inconsistência matemática quando a interseção entre os intervalos de iterações consecutivas é diferente de conjunto vazio e, dessa forma, não se pode afirmar que são resultados diferentes. O tempo máximo de simulação em que o fenômeno da intermitência pode ser observado está relacionado à ocorrência de perda de dígitos significativos ao longo das iterações e geração de resultados providos de erro [3, 12]. Assim, uma vez que a simulação de equações matemáticas equivalentes gera resultados alternadamente laminares e caóticos, a confiabilidade da simulação é afetada.

5 Conclusão

De fato, como foi visto, a condição inicial x_0 é um elemento que influencia consideravelmente a presença de intermitência no sistema. Além disso, o tempo máximo de simulação

em que o fenômeno da intermitência pode ser observado está relacionado à ocorrência de perda de dígitos significativos ao longo das iterações e geração de resultados providos de erro. Assim, uma vez que a simulação de equações matemáticas equivalentes gera resultados alternadamente laminares e caóticos, não se pode afirmar que são resultados diferentes e a confiabilidade da simulação é afetada.

Ao longo dos processos históricos da ciência e da engenharia, a computação numérica recebe grande atenção por ter se tornado uma poderosa ferramenta para resolução numérica de problemas matemáticos. Por outro lado, apesar de sua importância para a infraestrutura científica moderna e de apresentar resultados satisfatórios e muito próximos dos esperados, a computação numérica ainda está longe de ser uma ferramenta que disponibiliza resultados totalmente de acordo com a realidade. Isso acontece devido à limitação de memória da máquina, que se torna um empecilho para o cálculo com precisão infinita e, conseqüentemente, interfere na resposta do sistema. Dessa forma, a comprovação de resultados obtidos por meio da aritmética computacional, perpassa, antes de tudo, o entendimento sobre como o computador lida com as operações matemáticas e arredondamentos.

6 Agradecimentos

Agradecemos ao CNPq/INERGE, à Universidade Federal de São João del-Rei e aos membros do grupo de controle e modelagem (GCOM) pelo apoio.

Referências

- [1] Mitchell J. Feigenbaum. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *Journal of Statistical Physics*, 19(1):25–52, 1978.
- [2] William Leonard Ferrar. *A Text-book of Convergence*. The Clarendon Press, 1938.
- [3] D. Goldberg. What every computer scientist should know about floating-point arithmetic. *Computing Surveys*, 23(1):5–48, March 1991.
- [4] JE Hirsch, BA Huberman, and DJ Scalapino. Theory of intermittency. *Physical Review A*, 25(1):519, 1982.
- [5] Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE). *754-2008 – IEEE standard for floating-point arithmetic*. IEEE, 2008.
- [6] Edward N Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the atmospheric sciences*, 20(2):130–141, 1963.
- [7] René Lozi. Can we trust in numerical computations of chaotic solutions of dynamical systems. *Topology and dynamics of Chaos, World Scientific Series in Nonlinear Science Series A*, 84:63–98, 2013.

- [8] R M May. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 261(5560):459–467, 1976.
- [9] Luiz Henrique Alves Monteiro. *Sistemas dinâmicos*. Editora Livraria da Física, 2006.
- [10] E. G. Nepomuceno. Convergence of recursive functions on computers. *The Journal of Engineering*, 1(1), 2014.
- [11] Erivelton Geraldo Nepomuceno and Samir Angelo Milani Martins. A lower-bound error for free-run simulation of the polynomial NARMAX. *Systems Science & Control Engineering*, pages 1–14, mar 2016.
- [12] M. L. Overton. *Numerical Computing with IEEE floating point arithmetic*. SIAM, 2001.
- [13] Yves Pomeau and Paul Manneville. Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems. *Communications in Mathematical Physics*, 74(2):189–197, 1980.
- [14] H M Rodrigues Júnior and E G Nepomuceno. Uso da Computação Por Intervalos para Cálculo de Ponto Fixo de um Mapa Discreto. In *Anais do DINCON 2015 - Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações.*, pages 1–8, 2015.
- [15] Walter Rudin. *Principles of mathematical analysis*, volume 3. McGraw-Hill New York, 1964.