



DINCON 2017

CONFERÊNCIA BRASILEIRA DE DINÂMICA, CONTROLE E APLICAÇÕES
30 de outubro a 01 de novembro de 2017 – São José do Rio Preto/SP

Conjuntos Invariantes Caóticos no Sistema Terra-Lua

Sheila Crisley de Assis¹

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Catarinense – IFC, Concórdia, SC, Brasil.

Maísa de Oliveira Terra²

Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA, São José dos Campos, SP, Brasil.

Resumo. Este trabalho objetiva investigar conjuntos invariantes caóticos para o *Problema Restrito de Três-Corpos Circular Planar* PR3CCP sistema Terra-Lua, considerando como região de análise os arredores do primário menor, mais precisamente entre os pontos Lagrangianos colineares L_1 e L_2 . A análise foi aplicada explorando distintos níveis de energia que revelam diferentes situações de saída da região de espalhamento. Observou-se que os limites de fronteiras fractais estão associados à variedade estável da sela caótica, computada nesse trabalho pelo algoritmo Sprinkler. Os longos tempos de escape da região de espalhamento estão vinculados à sela caótica e suas variedades invariantes. A principal aplicação dessa investigação é no processo de transporte entre regiões no contexto de missões espaciais e no estudo de sistemas naturais do sistema solar.

Palavras-chave. Terra-Lua, Bacias de escape, Sela caótica e suas variedades invariantes.

1 Introdução

O processo de escape em um sistema hamiltoniano é uma importante ferramenta de análise da dinâmica não linear e tem sido explorada por diversos estudiosos com diferentes abordagens, dentre eles citamos os trabalhos de [5], [6], [8], [9], [12] e [13]. Em um sistema hamiltoniano com valores de energia acima da energia de escape, as trajetórias podem escapar da região de espalhamento por uma das saídas existentes. A análise de espalhamento caótico no PR3CCP tem sido abordada por diferentes autores [3-6] e [15].

O conjunto invariante caótico não atrativo também conhecido por *sela caótica* ou *sela estranha* está associado a uma estrutura dinâmica fractal, formada por trajetórias que nunca escaparão da região de espalhamento, independente do valor da energia. Em

¹ sheila.assis@ifc-concordia.edu.br

² maisa@ita.br

particular, em um sistema não-hiperbólico com dois graus de liberdade, as trajetórias que não escapam da região de espalhamento também envolvem as soluções periódicas e quase-periódicas que estão sobre toros KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser).

Segundo [2], a sela caótica é composta por trajetórias de medidas de Lebesgue zero que nunca escaparão da região de espalhamento quando $t \rightarrow +\infty$ ou $t \rightarrow -\infty$. Esse conjunto é caracterizado como um conjunto fechado, invariante e limitado contendo uma órbita densa [10] e [11]. Cada trajetória pertencente à sela caótica possui duas direções, uma estável e outra instável. Portanto, a variedade estável possui órbitas que nunca escaparão da região de espalhamento quando, $t \rightarrow +\infty$ enquanto que a variedade instável possui trajetórias que nunca abandonarão a região de espalhamento se $t \rightarrow -\infty$. A sela caótica é formada pela intersecção de suas variedades estável e instável.

De acordo com [1] e [3], a fronteira fractal de uma bacia de escape, coincide com a variedade estável da sela caótica. As trajetórias que nascem próximas de uma fronteira são as que apresentam os mais longos tempos de escape [2].

O objetivo desse artigo é investigar no PR3CCP sistema Terra-Lua, o conjunto invariante caótico e suas variedades invariantes considerando alguns valores de energia. A região de espalhamento situa-se nos arredores do primário menor (Lua), mais precisamente entre os pontos Lagrangianos colineares L_1 e L_2 . Nesse modelo, diferentes níveis de energia correspondem a diferentes saídas da região de espalhamento. O primário menor nesse trabalho é considerado um corpo finito. Sendo assim, analisamos quatro comportamentos distintos para as trajetórias pertencentes à região de espalhamento: (i) trajetórias que colidem com o primário menor, (ii) trajetórias que escapam por L_1 , (iii) por L_2 (ii) e trajetórias que após o encerramento do tempo máximo de integração t_{max} adotado, não apresentaram nenhum dos comportamentos acima.

O artigo está organizado da seguinte maneira: na seção 2 encontra-se a descrição do modelo matemático do PR3CCP, os resultados encontrados estão descritos na seção 3, enquanto que as considerações finais do trabalho estão na seção 4.

2 O Modelo Matemático

O PR3CCP [14] descreve o movimento de um terceiro corpo P_3 movendo-se no campo gravitacional de dois corpos P_1 e P_2 , conhecidos como primários. A massa do terceiro corpo é muito menor que as massas de P_1 e P_2 . O movimento dos primários não é perturbado por P_3 . O movimento de P_3 está restrito ao plano de movimento dos primários. O parâmetro de massa do modelo matemático é dado por $\mu = m_2/(m_1 + m_2)$, onde $m_1 > m_2$, enquanto que as massas de P_1 e P_2 , são dadas respectivamente, por $1 - \mu$ e μ . A equação de movimento do terceiro corpo é dada por:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \Omega_x \quad \text{e} \quad \ddot{y} + 2\dot{x} = \Omega_y \quad (1)$$

com

$$\Omega(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{\mu(1-\mu)}{2}, \quad (2)$$

$$r_1 = [(x + \mu)^2 + y^2]^{1/2} \quad \text{e} \quad (3)$$

$$r_2 = [(x - 1 + \mu)^2 + y^2]^{1/2}.$$

O modelo tem uma integral de movimento J , conhecida como constante de Jacobi, dada por:

$$J(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = 2\Omega(x, y) - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = C. \quad (4)$$

A conservação associada a J definida por uma variedade invariante tridimensional em um espaço de fase de quatro dimensões, é dada por:

$$\mathcal{M}(\mu, C) = \{(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \in \mathbb{R}^4 \mid J(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = C\}. \quad (5)$$

A constante de Jacobi C está relacionada com a energia E do terceiro corpo, dada por $C = -2E$.

O modelo dinâmico analisado tem cinco pontos de equilíbrio, chamados de pontos Lagrangianos [14]. Três desses pontos de equilíbrio L_1 , L_2 e L_3 , conhecidos como pontos colineares, são instáveis e estão localizados no eixo x como mostra a Figura 1. Os outros dois pontos, nomeados de L_4 e L_5 , são chamados de pontos triangulares e estão localizados no vértice de um triângulo equilátero formado com os primários.

A região acessível às trajetórias para um determinado valor de C é obtida pela projeção da superfície M em um espaço de posições (x, y) , considerando $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2\Omega(x, y) - C \geq 0$. Assim, a conhecida região de Hill é definida por:

$$\mathcal{M}(\mu, C) = \{(x, y) \mid \Omega(x, y) \geq C/2\}. \quad (6)$$

Os limites dessa região são chamados de curvas de velocidade zero (ZVC).

Na Figura 1, observam-se os quatro possíveis casos da região de Hill para o sistema Terra-Lua do PR3CCP com $\mu=0,0121506683$ e (a) $C=3,2005$; (b) $C=3,198675$; (c) $C=3,1822$ e (d) $C=3,019$. A região em branco representa a região de Hill (região acessível às trajetórias); em cinza representamos as regiões proibidas às trajetórias e as curvas de velocidade zero estão representadas pela linha preta. No caso (a), $C > C_1$, não existem saídas da região de espalhamento. No caso (b), $C_1 > C > C_2$, somente o gargalo em torno do ponto Lagrangiano L_1 encontra-se aberto, já nos casos (c) e (d) com respectivamente, $C_2 > C > C_3$ e $C_3 > C$, são possíveis conexões internas e externas porque os gargalos em torno de L_1 e L_2 estão abertos. Para $C < C_4 = C_5$, não existem regiões proibidas.

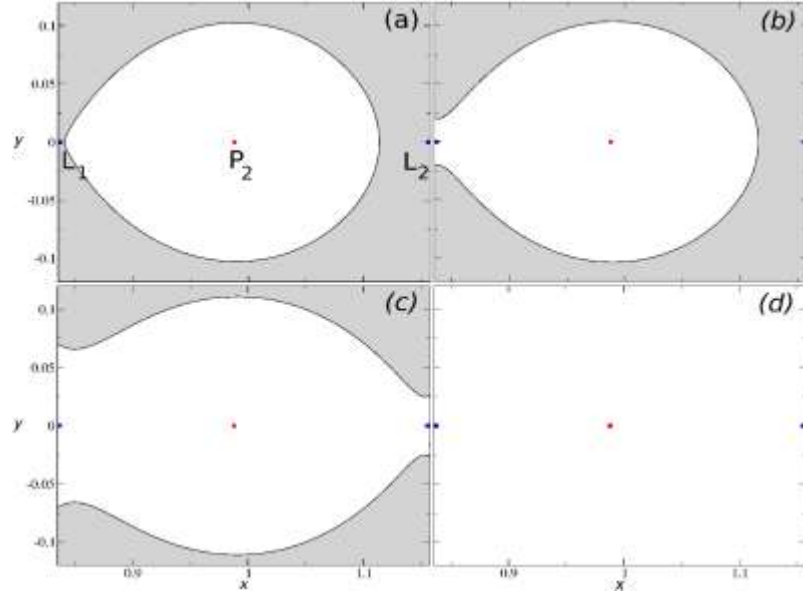


Figura 1: Quarto possíveis casos da região de Hill para o sistema Terra-Lua PR3CCP.

3 Resultados Obtidos

Os diagramas de bacias de escape apresentadas nesse trabalho foram construídos fixando o valor da constante de Jacobi. Utilizou-se uma grade com aproximadamente 1500×1300 condições iniciais na seção de Poincaré Ω definida no plano (x, y) com $\dot{x} = 0$ e $\dot{y} > 0$, para $x_{L_1} \leq x \leq x_{L_2}$, onde x_{L_k} denota a coordenada x de L_k , $k = 1, 2$, e $-0,2 \leq y \leq 0,2$.

Nesse trabalho, analisamos quatro distintos comportamentos para as trajetórias, gerando quatro diferentes bacias de escape:

- *Bacia Limitada*: formada por trajetórias que no término do tempo máximo de integração t_{max} , não escapou da região de espalhamento e nem colidiu com P_2 ;
- *Bacia por L_1 e por L_2* : formada por trajetórias que escapam pelo gargalo aberto em torno dos pontos Lagrangianos L_1 e L_2 , respectivamente, e
- *Bacia Colisional*: constituída por trajetórias que colidem com P_2 .

Nos diagramas de bacias de escape as cores verde, azul, vermelho e preto representam, respectivamente, as bacias definidas acima.

Diagramas de bacias de escape com condições iniciais situadas à direita do primário menor e variedade estável da sela caótica para $C=3,200$ são apresentados na Figura 2 (a) e (b). A bacia de escape foi construída com $t_{max} = 5000$ dtu. Para a construção da variedade estável da sela caótica, admitimos $t_{min} = 500$ e $t_{max} = 4000$. A variedade estável da sela caótica coincide com a fronteira fractal presente entre as bacias por L_1 e colisional, além de estar associada aos longos tempos de escape. Quanto mais próxima uma trajetória estiver da variedade estável da sela caótica, maior será o tempo que ela levará para escapar da região de espalhamento ou colidir com o primário menor.

Devido à presença do efeito de stickiness nos arredores da pequena ilha de estabilidade que aparece no diagrama, se considerássemos um t_{max} maior, consequentemente, encontraríamos outras trajetórias pertencentes à variedade estável da sela caótica. Segundo [7], o efeito de stickiness deve ser compreendido como um confinamento temporal de órbitas em uma região particular do espaço de fase antes de escaparem da região de espalhamento.

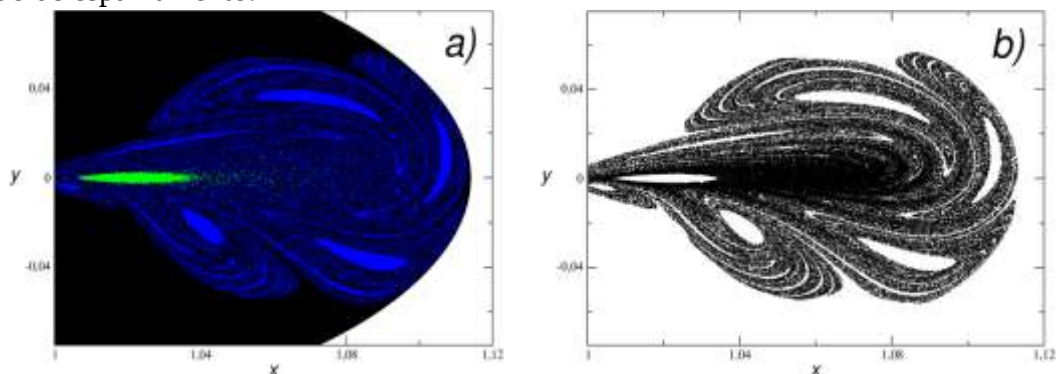


Figura 2: Bacias de escape e variedade estável da sela caótica para $C=3,200$.

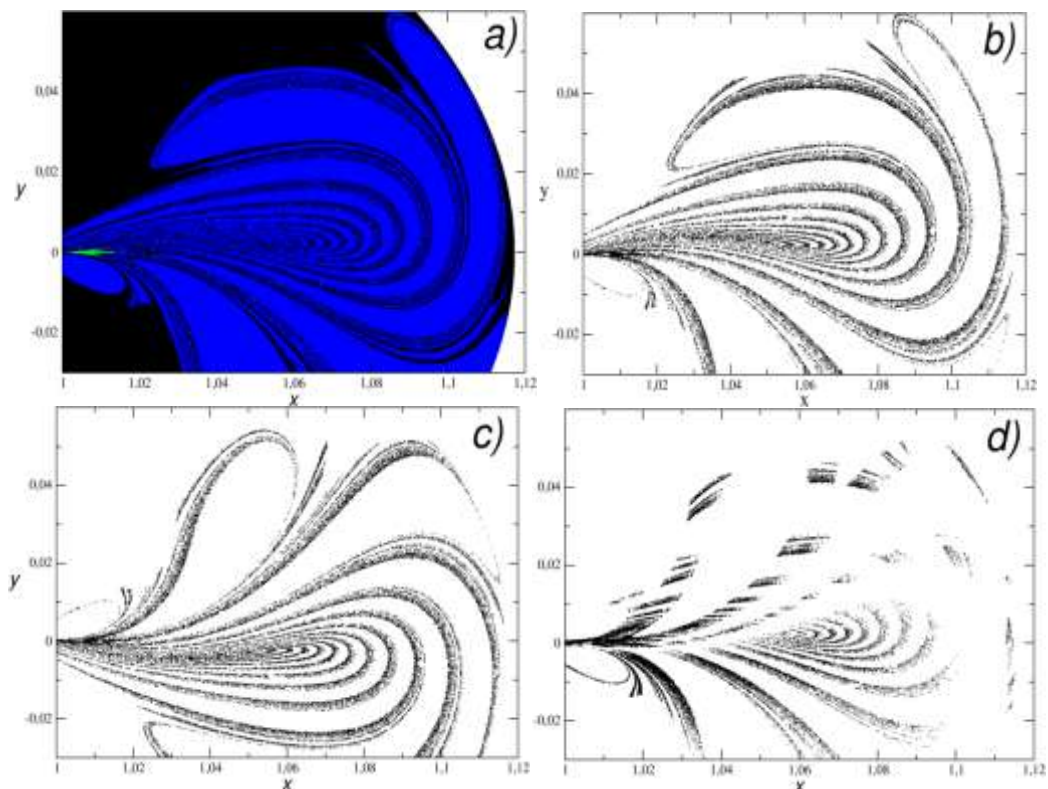


Figura 3: Bacias de escape (a) sela caótica (d) e suas variedades invariantes (b) estável e (c) instável para $C=3,197350$.

Para $C=3,197350$, apresentamos na Figura 3 os resultados obtidos de bacia de escape (Fig. 3a), sela caótica (Fig. 3d), variedade estável (Fig. 3b) e variedade instável da sela caótica (Fig. 3c). Comparando os dois diagramas de bacias de escape apresentados, nota-se a redução da ilha de estabilidade localizada à direita do primário menor e das fronteiras fractais presente entre as bacias envolvidas. Analisando os tempos de escape nos dois casos, para $C=3,197350$ a maioria das trajetórias tem tempo de escape inferior a 200 dtu. Para a construção da sela caótica e suas variedades invariantes, considerou-se $t_{min}= 100$ e $t_{max}= 2000$. À medida que reduzimos o valor da constante de Jacobi as fronteiras fractais tornam-se mais suaves. Observam-se semelhanças nos resultados obtidos nesse trabalho com os apresentados por [1] para o sistema de Henón-Heilles, ou seja, quanto mais próximo o valor de energia considerado estiver da energia de escape, maior será a fractalidade e mais densa será a sela caótica e suas variedades invariantes.

Considerações Finais

Nessa contribuição, investigamos conjuntos caóticos invariantes e a dinâmica de escape de um pequeno corpo na região de espalhamento, situada entre os pontos Lagrangianos L_1 e L_2 para o PR3CCP Sistema Terra-Lua. Foram analisadas quatro bacias definidas de acordo com o comportamento adotado pelas trajetórias. A sela caótica e suas variedades invariantes foram computadas utilizando o algoritmo Splinker. Notou-se que a variedade estável da sela caótica está associada às fronteiras fractais existente entre as bacias envolvidas e aos longos tempos de escape apresentados pelas trajetórias. Quando admitimos valores da constante de Jacobi próximos da energia de escape, a sela caótica e suas variedades invariantes apresentam maior dimensão fractal. Os resultados obtidos nesse trabalho podem ser aplicados no processo de transporte entre regiões no contexto de missões espaciais e no estudo de sistemas naturais.

Referências

- [1] J. Aguirre, J. C. Vallejo and M. A. F. Sanjuán, Wada basins and chaotic invariant sets in the Hénon-Heiles system, *Phys. Rev. E*, (2001) Vol 64, pp. 066208.
- [2] J. Aguirre, R. L. Viana and M. A. F. Sanjuán, Fractal structures in nonlinear dynamics, *Reviews of Modern Physics*, (2009) Vol. 81, pp. 333-386.
- [3] S. C. Assis, M. O. Terra, Escape dynamics and fractal basin boundaries in the planar Earth-Moon system, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, (2014) Vol. 120, pp. 105-130.
- [4] S. C. Assis, M. O. Terra, Biparametric analysis of the escape dynamics in the Solar System: some preliminary results, 22nd. International Congress of Mechanical Engineering (COBEM 2013), (2013), Ribeirão Preto – SP.

- [5] L. Benet, D. Trautmann, D. and T. H. Seligman, Chaotic scattering in the restricted three-body problem the Copenhagen problem, *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, (1997), Vol 66, pp. 203-228.
- [6] L. Benet, D. Trautmann, D. and T. H. Seligman, Chaotic scattering in the restricted three-body problem ii. Small mass parameter, *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, (1998), Vol 71, pp. 167-189.
- [7] G. Contopoulos and M. Harsoula, Stickiness in Chaos, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, (2008), Vol 8, n° 10, 2929-2949.
- [8] D. C. Davis and K. C. Howell, Trajectories evolution in the multi-body problem with applications in the Saturnian system, *Act. Astronaut*, (2011), Vol. 69, pp. 1038-1049.
- [9] D. C. Davis and K. C. Howell, Characterization of trajectories near the smaller primary in restricted problem for applications, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, (2012), Vol. 35, pp. 116-128.
- [10] C. Grebogi and J. A. Yorke, *Physical Review Letters*, (1982), Vol 48, pp. 1507.
- [11] C. Grebogi, J. A. York and E. Ott, *Physica D*, (1983), Vol 7, pp. 181.
- [12] J. Nagler, Crash test for the Copenhagen problem, *Physical Review E*, (2004) Vol. 69, pp. 066218.
- [13] J. Nagler, J., Crash test the restricted three-body problem, *Physical Review E*, (2005) Vol. 71, pp. 026227.
- [14] V. Szebehely, *Theory of Orbits*, Academic Press, (1967), New York.
- [15] E. E. Zotos, Crash test for the Copenhagen problem with oblateness, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, (2015), Vol. 122, pp. 75-99.