



Linearização Exata Aplicada ao Sistema Dinâmico do Pêndulo

Wagner Felipe Santana Souza¹

Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas, UESC, Ilhéus, BA

Arthur Lucide Cotta Weyll²

Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas, UESC, Ilhéus, BA

Resumo. Grande parte dos sistemas físicos dinâmicos pode ser descritos por equações diferenciais não-lineares, por isso, um há grande interesse de pesquisa nessa área. Uma abordagem que pode ser utilizada para o trabalho com sistemas não-lineares é a linearização por realimentação exata, que baseia-se na construção de uma lei de controle que cancele de forma exata as não linearidades do sistema, permitindo a imposição de uma nova dinâmica linear. Tendo isso em vista o presente trabalho possui como objetivos principais abordar a teoria envolvida na linearização exata por realimentação e aplicar á mesma num sistema dinâmico constituído por um pêndulo. E, como objetivo secundário, aplicar controle de posição no sistema linearizado. Através da técnica aplicada ao sistema foi possível linearizar o mesmo e posteriormente controlá-lo através de técnicas clássicas de projeto em espaço de estados.

Palavras-chave: Controle. Linearização. Realimentação. Pêndulo

1 Introdução

Grande parte dos sistemas físicos dinâmicos pode ser descritos por equações diferenciais não-lineares, por isso, um há grande interesse de pesquisa nessa área [1]. Uma abordagem bastante utilizada para o trabalho com sistemas não lineares é a linearização, o que possibilita a aplicação de um amplo conjunto de ferramentas para controle de sistemas lineares [2].

Uma das técnicas existentes para linearização é a linearização por realimentação exata de estados. Esta baseia-se na construção de uma lei de controle que cancele de forma exata as não linearidades do sistema, permitindo a imposição de uma nova dinâmica linear. Esta abordagem possui a vantagem de ser válida para grande parte do espaço de estados, porém para o projeto de tal controlador é condição necessária o conhecimento dos parâmetros e estados do sistema o que não ocorre na maioria dos sistemas reais. Quando houver incertezas paramétricas ou de medição, o cancelamento não será exato e o comportamento do sistema irá diferir do desejado, podendo inclusive levar a instabilidade [2, 5].

¹wagnerengeletricauesc@gmail.com

²arthur-lcw@hotmail.com

A linearização clássica realizada através realimentação exata, é uma ferramenta matemática muito vantajosa para aplicação em sistemas não lineares, em contrapartida a mesma é pouco robusta a incertezas, restringindo suas aplicações. Em [3], foi proposto uma linearização realimentação menos sensível as variações paramétricas do modelo. Nesta abordagem, os autores propõem que a dinâmica não-linear do sistema seja transformada em sua aproximação linear em torno de um ponto através da linearização por realimentação de estados.

Outro fator que pode degradar consideravelmente o desempenho da linearização exata e até mesmo tornar o sistema instável é a saturação dos atuadores. São poucos os estudos que abordam o efeito da saturação de um sistema que utiliza linearização por realimentação de estados, sendo que algumas deles restringem a operação do sistema em uma região no espaço de estados em que o controle não satura. Em [4] os autores propõem a determinação de uma região no espaço de estados na qual a linearização por realimentação de estados não satura os atuadores. Baseados na limitação do sinal de controle para os estados dentro desta região, os autores calculam as trajetórias passíveis de serem implementadas sem que haja saturação.

2 Fundamentação Teórica

Um sistema é dito não linear, se em sua descrição matemática, existir pelo menos uma componente ou um sub-sistema não linear, senóides, exponenciais, etc [6] . A não linearidade vem do fato que, tais tipos de sistemas não satisfazem ao princípio da superposição, conceito básico para definição de um sistema linear.

Os sistemas dinâmicos reais apresentam características que podem classifica-los como não lineares, são elas: variações dos parâmetros, atrasos de transporte e perturbações diversas. Quando utiliza-se os métodos de controle clássicos para sistemas com essas características não lineares, percebe-se que estes apresentam bom desempenho apenas para uma pequena faixa de operação do sistema. Fora dela, o desempenho será ruim, ou até mesmo instável [2,6].

Logo, para dispor de mecanismos de controle inteligentes para sistemas não lineares, existem metodologias na literatura que auxiliam no projeto de controladores para esta classe de sistemas. Tais como método de linearização exata por realimentação de estados, método do projeto da dinâmica zero e o desacoplamento de perturbação, no qual os dois primeiros melhoram a estabilidade dos sistemas e a performance dinâmica, enquanto o ultimo visa o aumento da capacidade do sistema de controle em resistir a grandes perturbações [4]. Neste trabalho será utilizado a linearização exata por realimentação como método de desenvolvimento de controle.

2.1 Linearização por realimentação exata de estados

A linearização consiste encontrar um modelo linear que seja uma boa aproximação para o sistema não linear estudado. No caso da linearização por realimentação, o modelo linear equivalente do sistema é obtido através da realimentação não linear do estado ou da

saída convenientemente escolhida, de forma que o comportamento do sistema em malha fechada seja linear.

Apenas determinados tipos de sistemas são suscetíveis de serem linearizados por realimentação. Em geral, sistemas em que nas equações de estados as variáveis de entrada e de estado são separáveis, podendo ser escritas da forma (1), é possível efetuar uma linearização exata.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{1}$$

Onde $x \in \mathbb{R}$ é um vetor de estados, $u \in \mathbb{R}^p$ é um vetor de entradas e $y \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de saídas.

2.1.1 Definições matemáticas

Para definir como se dá a linearização por realimentação de estados é necessário conhecer algumas definições matemáticas que auxiliam no entendimento do processo. São elas: derivada de Lie, grau relativo de um sistema e difeomorfismo. As mesmas são apresentadas abaixo:

Definição 1: *Seja $h(x): \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ uma função escalar suave e $f(x) \in \mathbb{R}^n$ um campo vetorial suave no $\mathbb{R}^n$. A derivada de Lie de $h(x)$ em relação a $f(x)$ é uma função escalar dada por:*

$$L_f h(x) \triangleq \frac{dh(x)}{dx} f(x)\tag{2}$$

Pode-se definir derivadas de lie repetidas de forma recursiva, da seguinte forma:

$$L_f^i h(x) = L_f(L_f^{(i-1)} h(x)), \quad i = 0, 1, 2, \dots\tag{3}$$

Definição 2: *O grau relativo do sistema é dito ρ , $1 \leq \rho \leq n$ em uma região $D^0 \subset D$, se:*

$$\begin{aligned}L_g L_f^i h(x) &= 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \rho - 2 \\ L_g L_f^{(\rho-1)} h(x) &\neq 0\end{aligned}\tag{4}$$

Definição 3: *Uma função $T: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, definida em uma região D é chamada de difeomorfismo se for suave e sua função inversa $T(x)^{-1}$ existir e também for suave.*

Com o auxílio dessas definições, pode-se enunciar um sistema linearizável por realimentação de estados:

Definição 4: *Um sistema não linear, pode ser linearizado, no sentido entrada estado, se existir um difeomorfismo $T: D \mapsto \mathbb{R}^n$, tal que as mudanças de variáveis $z = T(x)$ transforma o sistema (1) para a forma:*

$$\dot{z} = aZ + B\beta^{-1}(x)[u - \alpha(x)]\tag{5}$$

com o par (A, B) controlável e $\beta(x)$ não singular $\forall x \in D$. Define-se as funções α e $\beta: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$.

2.2 Determinação da ação de controle linearizante

O grau relativo de um sistema corresponde ao número de estados observáveis do sistema descrito em (1), podendo vir a serem controlados. O procedimento para obter a entrada de controle linearizante pode não ter êxito quando não se conhecer o grau relativo do sistema apresentado na definição 2. Caso o grau relativo (ρ) seja menor que o grau do sistema (n), há uma dinâmica interna que precisa ser analisada separadamente. Já para situação onde o grau relativo (ρ) ser igual ao grau relativo do sistema (n), diz-se que há uma linearização por entrada estado, onde todos os estados são observáveis podendo ser controlados.[8]

A transformação $T(x)$ apresentada na equação (5) é obtida através da derivada de Lie aplicada ao sistema. Sua formulação é apresentada pela equação (6), resultando no sistema descrito na equação (7).

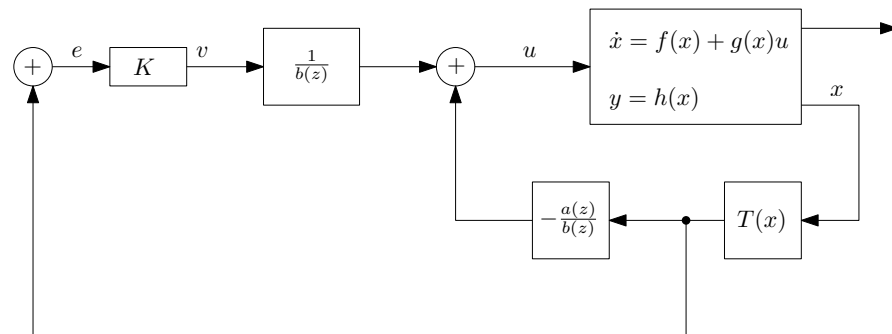
$$T(x) = \begin{bmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ \vdots \\ z_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{(n-1)} h(x) \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = L_f h(x) = z_2(x) \\ \dot{z}_2 = L_f^2 h(x) = z_3(x) \\ \vdots \\ \dot{z}_n = L_f^n h(x) + L_g L_f^{(n-1)} h(x) u \end{cases} \quad (7)$$

O objetivo da linearização por realimentação é desenvolver uma entrada de controle (8), para um sistema que pode ser descrito pela equação (1). A entrada de controle proposta pela linearização por realimentação pode ser escrita da seguinte forma:

$$u = \alpha(x) + \beta(x)^{-1}v \quad (8)$$

Obtido o sistema linearizado, sujeito a uma nova entrada v , aplica-se a estratégia de controle clássica na malha externa do sistema linearizado que é ilustrada na figura 1.



Os parâmetros $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ utilizados na entrada de controle são calculados através das derivadas de Lie aplicadas no sistema e são dados por:

$$\alpha = \frac{L_f^n h(x)}{L_g L_f^{(n-1)} h(x)} \quad e \quad \beta = \frac{1}{L_g L_f^{(n-1)} h(x)} \quad (9)$$

3 METODOLOGIA

Para a realização do trabalho, primeiramente foi obtido o equacionamento matemático, que descrevia a dinâmica do pêndulo simples. A partir das equações do modelo não linear, o sistema foi escrito na forma de duas equações de estado e, com isso, definiu-se as matrizes $f(x)$ e $g(x)$. Com as matrizes $f(x)$ e $g(x)$ utilizou-se das técnicas das derivadas de Lie para realizar a transformação $T(x)$ que levasse o sistema não linear para o sistema linear equivalente. Com o sistema linear, técnicas clássicas de controle foram implementadas através do software Scilab, para que o sistema fosse levado a um ponto de interesse com erro de estado estacionário nulo. Por fim foram inseridas perturbações nas variáveis do modelo com o objetivo de observar o comportamento do controlador.

4 RESULTADOS

4.1 Modelo Matemático do Pêndulo

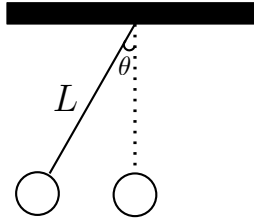


Figura 2: Pêndulo simples.

Como já foi dito, este trabalho consistiu em aplicar a técnica de linearização por realimentação exata no sistema pêndulo simples figura (2). As equações de movimento do sistema, foram obtidas através da equação de Lagrange, e sua formulação é dada em 10 .

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin(\theta) - \frac{b}{m}(\dot{\theta}) + \frac{1}{ml}u \quad (10)$$

Adotando-se $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, tem-se o sistema escrito na forma das equações (1):

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{b}{m}(x_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml} \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (11)$$

Como pode ser visto acima, foi possível escrever o sistema na forma (1), que é uma das condições necessárias para aplicar linearização por realimentação no sistema. Outra condição é a análise do grau relativo do sistema. Para o sistema em questão, vemos que o número de estados observáveis do sistema é igual a dois, este valor por definição é igual ao grau relativo do sistema, que por sua vez é igual à dimensão do sistema. Estes dois fatos nos garantem que a linearização por realimentação exata pode ser aplicada no sistema de estudo. Com isso, o sistema linearizado pode ser obtido e é dado em (12)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

4.2 Projeto do Controlador

Os valores adotados para os parâmetros do sistema utilizados no projeto são dados na tabela 1:

Tabela 1: Valores dos parâmetros utilizados para o projeto do controlador

Parâmetro	$g(\text{m/s}^2)$	b	$m(\text{Kg})$	$l(\text{m})$
Valor	9.810	0.003	0.100	0.500

O resultado da simulação feita no XCOS é mostrado em 3 e 4

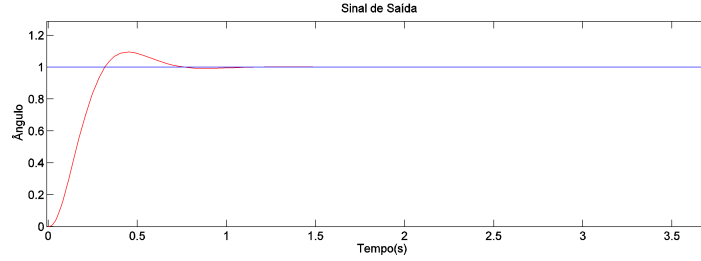


Figura 3: Resposta do sistema(em vermelho) mediante uma referência aplicada(em azul).

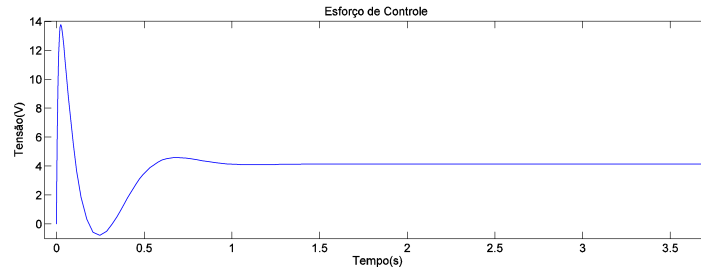


Figura 4: Esforço de controle realizado pelo controlador para levar o sistema à referência.

A partir das imagens acima, pode-se verificar que o sistema atingiu as especificações de desempenho estabelecidas para o projeto do controlador com erro de estado estacionário nulo como o esperado. Notou-se também, que o esforço de controle teve uma variação razoável num curto intervalo de tempo para conduzir o sistema para a entrada de referência.

5 Conclusão

O presente trabalho consistiu de estudos relacionados a sistemas não lineares, com foco em linearização exata. O objetivo principal foi de aplicar uma técnica de linearização no sistema não linear que foi o pêndulo simples. Através da realimentação exata aplicada ao sistema, foi possível obter um sistema linear equivalente em malha fechada, e utilizar técnicas clássicas de controle em espaço de estados para controlar o mesmo. O objetivo secundário foi avaliar como o esforço de controle era afetado pela mudança dos parâmetros originais do sistema. Na comparação com o sistema original torna-se claro que um controlador tradicional não é capaz de manter o desempenho desejado de um sistema quando este sofre variações em seus parâmetros. Sendo necessário, portanto, o projeto de um controlador robusto, para atender as especificações do projeto.

6 Referências

- [1] H.K. Khalil. Nonlinear systems. Prentice Hall Upper Saddle River, 2002.
- [2] C.T. Chen. Linear System Theory and Design. Saunders College Publishing Philadelphia, 1984.
- [3] H. Guillard and H. Bourles. Robust feedback linearization. Proc. 14 th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, 2000.
- [4] G.J. Pappas, J. Lygeros, and D.N. Godbole. Stabilization and tracking of feedback linearizable systems under input constraints. Proceedings 34 the IEEE Conf. on Decision and Control, pages 596?601, 1995.
- [5] A. Isidori. Nonlinear Control Systems. Springer, 1995.
- [6] Ogata, K. (2003). Engenharia de Controle Moderno, 4a edn, Pearson Education do Brasil.
- [7] NISE, NORMAN S., Engenharia de Sistemas de Controle, LTC, 2002.
- [8] ROHR, E.R. Análise de uma classe de sistemas não lineares incertos mediante linearização por realimentação de estados. 2008. 89f. Dissertação(Mestre em Engenharia) - Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, 2008.