



DINCON 2017

CONFERÊNCIA BRASILEIRA DE DINÂMICA, CONTROLE E APLICAÇÕES
30 de outubro a 01 de novembro de 2017 – São José do Rio Preto/SP

Projeto de controle robusto para realimentação de saída de sistemas chaveados via LMIs e Algoritmo Evolutivo

Leonardo Ataide Carniato¹

Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Engenharia, Ilha Solteira

Alexandre Ataide Carniato², Tiago Veronese Ortunho³

Departamento de Engenharia Elétrica, IFSP, Presidente Epitácio, SP,

Diogo Ramalho de Oliveira⁴

Instituto Federal de Mato Grosso do Sul (IFMS), Campus Três Lagoas, MS,

Gilberto Rodrigues dos Santos⁵

Câmpus do Pantanal, UFMS, Corumbá, MS,

Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira⁶

Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Engenharia, Ilha Solteira

Resumo. Este trabalho investiga a aplicação da evolução diferencial, juntamente com a abordagem por meio de desigualdades matriciais lineares (LMIs), para tratar o projeto de controladores robustos em sistemas lineares chaveados, considerando a realimentação estática de saída. Este projeto pode conduzir à problemas que envolvam desigualdades matriciais bilineares (BMIs), ou seja, problemas de otimização não convexa (NP-hard), não existindo na literatura técnicas determinísticas capazes de encontrar a solução ótima. Portanto, a investigação de uma técnica híbrida baseada em LMIs e evolução diferencial é proposta neste trabalho. Resultados de simulação são apresentados a fim de validar a técnica proposta.

Palavras-chave. Controle robusto, sistema chaveado, evolução diferencial, desigualdades matriciais bilineares, desigualdades matriciais lineares.

¹leonardo@ifsp.edu.br

²carniato@ifsp.edu.br

³tiago.veronese@ifsp.edu.br

⁴diogo.ramalho@ifms.edu.br

⁵gilberto.rodrigues@ufms.br

⁶marcelo@dee.feis.unesp.br

1 Introdução

A denominação Sistemas Chaveados é dada à classe de sistemas dinâmicos que são compostos por um número finito de subsistemas, que, respeitando uma regra de chaveamento dependente do tempo ou do estado da planta, comutam entre si. Cada subsistema pode apresentar uma particularidade, levando à um sistema global ser composto por subsistemas estáveis e instáveis localmente. Porém, por meio de uma regra de chaveamento adequada é possível conduzir o sistema global para estabilidade [1]. É possível descrever uma gama de sistemas físicos por modelos dinâmicos chaveados. Como exemplos encontra-se na literatura o controle de conversores CC-CC [2], sistemas mecânicos, dentre outros. Com isso, recentemente pesquisas em torno de sistemas chaveados tem ganhado destaque. Para análise destes sistemas dinâmicos, e posterior projeto de controladores robustos, considera-se a utilização de LMIs (do inglês, *Linear Matrix Inequalities*). Para a resolução de problemas que envolvam LMIs existem aplicações disponíveis (*solvers*) para encontrar soluções as quais podem ser aplicados diretamente no MatLab®. Dentre tais algoritmos pode-se citar o SeDuMi [3] como um dos mais largamente empregados. Porém, o projeto de controladores robustos, considerando realimentação de saída, para sistemas lineares chaveados podem conduzir para condições que envolvam BMIs. Como tais desigualdades apresentam características não convexas e podem ser entendidas como um problema NP-hard [4] que, até o melhor conhecimento dos autores, não existe na literatura técnica determinística para encontrar uma solução ótima. Portanto, para tratar deste tipo de problema a aplicação de técnicas metaheurística podem ser investigadas. Dentre tais técnicas destaca-se neste trabalho os algoritmos evolutivos, a qual é um ramo da Inteligência Artificial que buscam soluções de problemas inspirados na Seleção Natural. Os Algoritmos Genéticos (AG) apontaram-se como um dos precursores de algoritmos evolutivos e ainda se destacam pela vasta aplicação. Porém, outras técnicas que utilizam esta última como base foram desenvolvidas, como o exemplo da Evolução Diferencial - ED [5]. No presente trabalho a ED será a técnica visada para aplicação. Por fim, considere $\mathbb{K}_N = \{1, 2, \dots, N\}$ o conjunto dos N primeiros inteiros positivos.

2 Controle de Sistemas Lineares Incertos Chaveados com Realimentação Estática de Saída

Considere o sistema linear chaveado incerto com a seguinte realização em espaço de estados [6]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(\sigma, \alpha)x(t) + B(\sigma, \alpha)u(t), & x(0) = x_0, \\ y(t) &= Cx(t), \end{cases} \quad (1)$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ a saída controlada, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle, x_0 a condição inicial e $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ a matriz de saída do sistema, constante para todo $t \geq 0$ e $\sigma(t)$ a regra ou lei de chaveamento, que seleciona em cada instante de tempo $t \geq 0$, um subsistema disponível $A(i, \alpha)$, $i \in \mathbb{K}_N$. Na matriz $A(\sigma, \alpha)$, o vetor $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_r]'$ representa as incertezas politópicas da planta. As matrizes $A(\sigma, \alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B(\sigma, \alpha) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ podem ser descritas por meio da combinação convexa de seus vértices,

ou seja, $A(\sigma, \alpha) = \sum_{j=1}^r \alpha_j A_{\sigma j}$, $B(\sigma, \alpha) = \sum_{j=1}^r \alpha_j B_{\sigma j}$ $\sum_{j=1}^r \alpha_j = 1, \alpha_j \geq 0, \sigma(t) \in \mathbb{K}_N$, sendo r o número de vértices do politopo e N o número de subsistemas.

Em aplicações práticas por vezes as variáveis de estado do sistema $(x(t))$ não estão completamente disponíveis para realimentação. Portanto torna-se interessante investigar leis de chaveamento/controlare que sejam dependentes somente da saída da planta $(y(t))$. Deste modo, considerando os resultados obtidos em [6] e [7], enuncia-se o seguinte problema de controle:

Problema 2.1. *Determine uma função $v(\cdot) : \mathbb{R}^p \rightarrow \{1, 2, \dots, N\}$ tal que a entrada de controle e a regra de chaveamento*

$$u(t) = K_\sigma y(t), \quad \sigma(t) = v(y(t)), \quad (2)$$

torne o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema linear chaveado definido em (1) globalmente assintoticamente estável e admita o seguinte limitante superior

$$J = \int_0^\infty y(t)' y(t) dt = \int_0^\infty x(t)' C' C x(t) dt \leq \max_{j,k \in \mathbb{K}_r} x_0 P_{jk} x_0 < \rho x_0' I_n x_0 \quad (3)$$

Em [7] os autor propôs uma solução para o problema de controle supracitado. Ainda, para mais detalhes sobre o custo garantido considere a referência supracitada.

Teorema 2.1. [7] *Se existirem $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{R}^N : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1, i \in \mathbb{K}_N\}$, um escalar $\rho > 0$, matrizes $X_{1_{ik}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_{2_{ik}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes simétricas $Q_{0_{jk}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ e matrizes simétricas definidas positivas $P_{jk} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que*

$$P_{jk} - \rho I_n < 0, \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} X_{1_{ik}} \hat{A}_{ij} + X_{1_{ij}} \hat{A}_{ik} + (*) + 2C' C & (*) \\ P_{jk} - X'_{1_{ik}} + X_{2_{ik}} \hat{A}_{ij} + P_{kj} - X'_{1_{ij}} + X_{2_{ij}} \hat{A}_{ik} & -X_{2_{ik}} - X_{2_{ij}} - (*) \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} Q_{0_{jk}} + Q_{0_{kj}} + 2C' Q_i C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$Q_{0_{jk}} + C' Q_\lambda C < 0, \quad (6)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$, e $j, k \in \mathbb{K}_r$, com $\hat{A}_{ij} = A_{ij} + B_{ij} K_i C$, então a regra de chaveamento

$$\sigma(y) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} (y' Q_i y), \quad (7)$$

juntamente com a entrada de controle (2), torna a origem $x = 0$ do sistema linear chaveado incerto (1) um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável e o custo garantido (3) mantém-se para $x_0 = x(0) \neq 0$.

Demonstração. Notações: $T' = [I_n \quad \hat{A}'(\sigma, \alpha)]$ e $\Sigma = \sum_{j=1}^r \alpha_j \sum_{k=1}^r \alpha_k$

Considere que (5) e (6) são factíveis. Portanto, de (7) e (6), para $x \neq 0$ segue que:

$$0 > x' (Q_{0_{jk}} + C' Q_\lambda C) x \geq x' Q_{0_{jk}} x + \min_{i \in \mathbb{K}_N} (y' Q_i y) = x' (Q_{0_{jk}} + C' Q_\sigma C) x. \quad (8)$$

Observe que (8) pode ser reescrita como:

$$x'(Q_{0jk} + C'Q_\sigma C)x = x'T' \begin{bmatrix} Q_{0jk} + C'Q_\sigma C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Tx < 0. \quad (9)$$

Agora, definindo $P(\alpha) = (\alpha_1\alpha_1P_{11} + \alpha_1\alpha_2P_{12} + \dots + \alpha_r\alpha_rP_{rr})$, $X_1(\sigma, \alpha) = (\alpha_1X_{1\sigma 1} + \alpha_2X_{1\sigma 2} + \dots + \alpha_rX_{1\sigma r})$, $X_2(\sigma, \alpha) = (\alpha_1X_{2\sigma 1} + \alpha_2X_{2\sigma 2} + \dots + \alpha_rX_{2\sigma r})$. Então, multiplicando (9) por $\alpha_j \times \alpha_k$ e realizando o somatório de $j = 1$ até $j = r$ e de $k = 1$ até $k = r$, respectivamente, de (5), note que:

$$\begin{aligned} 0 &> \frac{1}{2} \sum x'T' \begin{bmatrix} Q_{0jk} + Q_{0kj} + 2C'Q_\sigma C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Tx \\ &> \frac{1}{2} \sum x'T' \begin{bmatrix} X_{1\sigma k}\hat{A}_{\sigma j} + \hat{A}'_{\sigma j}X'_{1\sigma k} + X_{1\sigma j}\hat{A}_{\sigma k} + \hat{A}'_{\sigma k}X'_{1\sigma j} + 2C'C \\ P_{jk} - X'_{1\sigma k} + X_{2\sigma k}\hat{A}_{\sigma j} + P_{kj} - X'_{1\sigma j} + X_{2\sigma j}\hat{A}_{\sigma j} \\ P_{jk} - X_{1\sigma k} + \hat{A}'_{\sigma j}X'_{2\sigma k} + P_{kj} - X_{1\sigma j} + \hat{A}'_{\sigma k}X'_{2\sigma j} \\ -X_{2\sigma k} - X'_{2\sigma k} - X_{2\sigma j} - X'_{2\sigma j} \end{bmatrix} Tx. \end{aligned} \quad (10)$$

Note que é possível reescrever (10) como:

$$\begin{aligned} 0 &> x'T' \begin{bmatrix} X_1(\sigma, \alpha)\hat{A}(\sigma, \alpha) + (*) + C'C & (*) \\ P(\alpha) - X'_1(\sigma, \alpha) + X_2(\sigma, \alpha)\hat{A}(\sigma, \alpha) & -X_2(\sigma, \alpha) - X'_2(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} Tx \\ &= x'T' \left\{ \begin{bmatrix} C'C & P(\alpha) \\ P(\alpha) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1(\sigma, \alpha) \\ X_2(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}(\sigma, \alpha) & -I_n \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} \hat{A}'(\sigma, \alpha) \\ -I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X'_1(\sigma, \alpha) & X'_2(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \right\} Tx. \end{aligned} \quad (11)$$

Reescrevendo (11),

$$\begin{aligned} x' \begin{bmatrix} I_n & \hat{A}'(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C'C & P(\alpha) \\ P(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ \hat{A}(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x &< 0, \\ \dot{V}(x) + y'y &< 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Considerando uma função quadrática de Lyapunov $V(x) = x'P(\alpha)x$, note que como $\sum_{j=1}^r \alpha_j = 1$ e $\alpha_j \geq 0$, $V(x) > 0$, para $x \neq 0$. Além disto, observe que $\dot{V}(x) < 0$ para $x \neq 0$, conforme (12). Ainda, integrando (12) de zero até infinito, considerando $x_0 = x(0) \neq 0$, $V(x(\infty)) = 0$ e (4) obtêm-se (3). Deste modo, a prova está concluída. $\square$

3 Algoritmo Híbrido - SeDuMi e Evolução Diferencial

Note que as condições dadas em (5) e (6) são BMIs, tendo em vista a necessidade de encontrar os valores dos K_i da condição $\hat{A}_{ij} = A_{ij} + B_{ij}K_iC$ e dos λ_i da combinação convexa expressa por $Q_\lambda = \lambda_1Q_1 + \lambda_2Q_2 + \dots + \lambda_NQ_N$. Como supracitado, não existe

na literatura, até o conhecimento dos autores, método determinístico para solução ótimas que envolvam BMIs. Tais desigualdades apresentam características não convexas e podem ser entendidas como um problema NP-hard [4]. Portanto, propõe-se a combinação da técnica da Evolução Diferencial (ED) com o *solver* SeDuMi [3], já amplamente aplicado para soluções de LMIs, para encontrar soluções factíveis e otimizadas para as condições dadas em (4)-(6). A ED é um método de otimização estocástico baseado em população que foi introduzido por [5] e figurou como um dos melhores algoritmos apresentados na *Second International Contest on Evolutionary Optimization* e durante anos vem atraindo a atenção de pesquisadores de diversas áreas do conhecimento [8]. O algoritmo pode ser resumido em quatro estágios, assim como os AG: Inicialização da população, mutação, cruzamento e seleção. Para detalhamentos consultar [7] e [8].

Os indivíduos da ED serão compostos pelos valores de λ_i e/ou K_i a serem avaliados ao longo das gerações em busca da otimização do custo garantido e/ou da resposta dinâmica. Com estes valores fornecidos, as condições (5) e (6) passam a ser LMIs e a solução para as condições do Teorema 2.1 podem ser obtidas por meio do SeDuMi.

4 Exemplo Numérico

Considere o sistema linear incerto (1), sendo $r = 2$, $N = 3$, $i \in \{1, 2, 3\}$, $j \in \{1, 2\}$ e as seguintes matrizes que representam as dinâmicas dos subsistemas [6]:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} h_1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} -5 & -6 & 1 \\ -3 & h_2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \\ A_{31} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad A_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & h_3 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (13)$$

Em [6] os autores fazem estudo de factibilidade, portanto variam os valores dos parâmetros h_1 , h_2 e h_3 . Para o presente estudo, fixa-se os valores destes parâmetros em $h_1 = 2$, $h_2 = -30$ e $h_3 = 14$. Duas abordagens são realizadas visando empregar o algoritmo híbrido apresentado na Seção 3. Primeiramente considera-se para o Teorema 2.1 $\hat{A}_{ij} = A_{ij}$, ou seja, entrada controle nula. Assim, $u(t) = K_i y(t) = 0$ restando para o algoritmo encontrar os valores de λ_i visando reduzir o valor do parâmetro ρ relacionado ao custo garantido, sendo este justamente o valor adotado para a função de aptidão da ED. Esta abordagem é feita com objetivo de comparar os resultados com os valores de λ_i fornecidos em [6]. Na segunda abordagem, considera-se então a entrada de controle para o Teorema 2.1, ficando a cargo do algoritmo encontrar os valores de K_i e λ_i . Para destacar a flexibilidade do algoritmo, neste caso considera-se como objetivo de otimização a resposta dinâmica do sistema em malha fechada ($\hat{A}_{ij}$) por meio da alocação dos autovalores.

Os valores dos parâmetros considerados em [6] são $\lambda_1 = 0,1$, $\lambda_2 = 0,7$ e $\lambda_3 = 0,2$ levando à um valor de $\rho = 8,1188$. Como resultado da primeira abordagem o algoritmo obteve os valores $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0,9975$ e $\lambda_3 = 0,0025$ o que resulta em $\rho = 1,4284$, apresentando uma redução considerável se comparado ao valores obtidos com os λ_i apresentados em [6]. Para a segunda abordagem despreza-se o custo garantido, considerando-se portanto para

o Teorema 2.1 somente as condições (5) e (6). A função aptidão a ser minimizada agora é dada por $\sum_{j=1}^r \max_{j \in \mathbb{K}_r} \text{Re}(z_j) + \max_{j \in \mathbb{K}_r} \text{Im}(z_j)$. Nesta expressão z_j indica os autovalores da combinação convexa para cada vértice do sistema em malha fechada, ou seja, $\hat{A}_{\lambda_j} = \lambda_1 \hat{A}_{1j} + \lambda_2 \hat{A}_{2j} + \lambda_3 \hat{A}_{3j}$ no caso do exemplo com $N = 3$. Esta estratégia é realizada com o objetivo de obter um menor tempo de assentamento com menores oscilações e ainda apresentar a flexibilidade do algoritmo face à outro problema de otimização. Por meio do algoritmo proposto foram obtidos $K_1 = [149,648 \ -199,7088]$, $K_2 = [421,9105 \ -119,0477]$, $K_3 = [-288,1235 \ -27,4059]$, $\lambda_1 = 0,3154$, $\lambda_2 = 0,1982$ e $\lambda_3 = 0,4864$.

As Figuras 1 e 2 apresentam os resultados de simulação para os três casos supracitados. Por meio da Figura 1, que apresenta a resposta dinâmica, é possível observar que $x_2(t)$ e $x_3(t)$ (relativos à matriz de saída C) apresentam valores de tempo de assentamento e pico reduzidos para os casos da abordagem 1 e 2 em relação aos valores de [6]. A Figura 2.(a) apresenta o chaveamento ao longo do tempo. Já, a Figura 2.(b) apresenta a $\int_0^\infty y(t)'y(t)dt$ permitindo avaliar o custo real da resposta para os três casos. Observa-se que o custo real considerando o sistema realimentado é o menor obtido, seguido do caso dos λ_i otimizados. Portanto, ressalta-se que por meio do algoritmo proposto é possível tratar as BMIs com o objetivo de minimização de algum critério estabelecido pelo projetista.

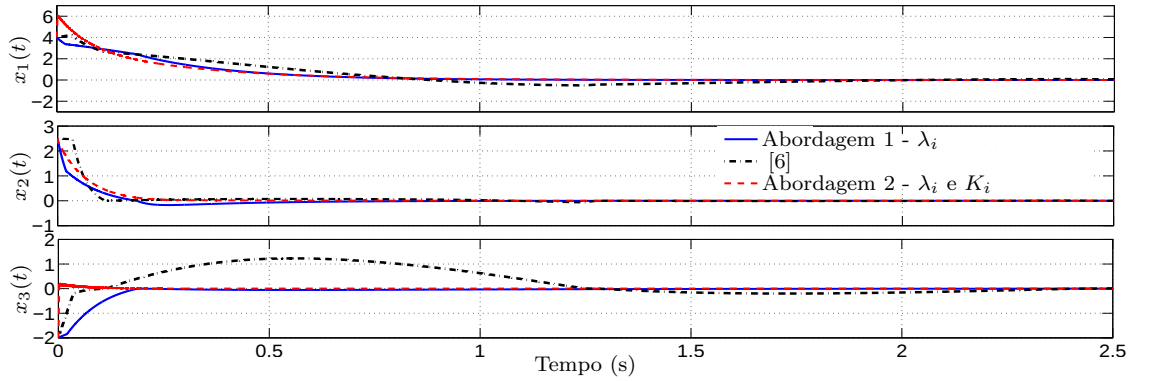


Figura 1: Resposta dinâmica do sistema

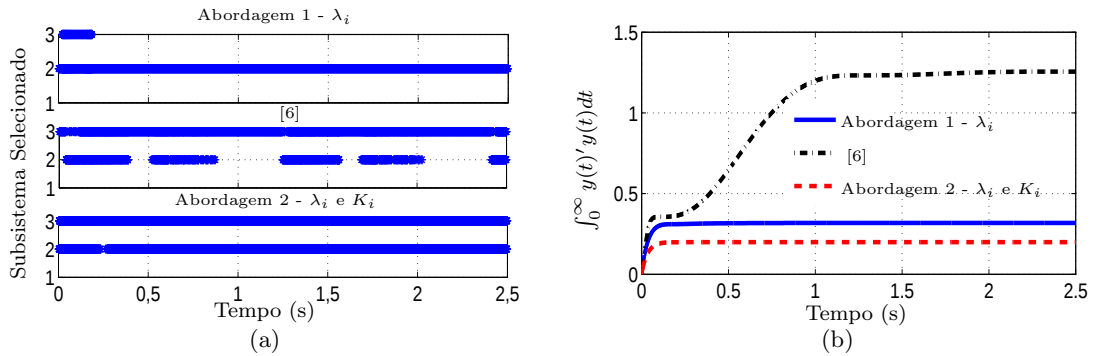


Figura 2: (a) Chaveamento; (b) Custo real ($\int_0^\infty y(t)'y(t)dt$).

5 Conclusões

Neste trabalho foi proposto um algoritmo que combina o *solver* SeDuMi, capaz de resolver LMIs, juntamente com a técnica da evolução diferencial para tratar o problema da realimentação estática de saída de sistemas chaveados que de acordo com a abordagem teórica apresenta condições com BMIs. Primeiramente, foram apresentadas as condições para o projeto de controlador robusto de saída para sistemas chaveamentos. Posteriormente, por meio de um exemplo com resultados de simulação e considerando duas abordagens diferentes, foi possível aplicar e verificar que a proposta otimiza o problema de acordo com o critério desejado.

Agradecimentos

Os autores agradecem à CAPES, ao CNPq e à FAPESP (2011/17610-0) pelo apoio financeiro.

Referências

- [1] D. Liberzon, *Switching in systems and control*, Springer Science & Business Media, (2003).
- [2] R. Cardim, M. C. M. Teixeira, E. Assunção and M. R. Covacic, Variable-structure control design of switched systems with an application to a DC-DC power converter, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 56, 3505–3513, (2009), doi: 10.1109/TIE.2009.2026381.
- [3] J. F. Sturm, Using sedumi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones, *Optimization Methods and Software*, v. 11, no. 1-4, p. 625–653, (1999), doi: 10.1080/10556789908805766
- [4] O. Toker and H. Ozbay, On the NP-hardness of solving bilinear matrix inequalities and simultaneous stabilization with static output feedback, *American Control Conference, Proceedings of the 1995*, vol.4, 2525–2526, (1995), doi: 10.1109/ACC.1995.532300.
- [5] R. Storn and K. Price, Differential Evolution – A simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces, *Journal of Global Optimization*, vol. 11, no. 4, pp. 341–359, (1997), doi: 10.1023/A:1008202821328
- [6] E. I. Mainardi Junior, M. C. M. Teixeira, R. Cardim, E. Assunção, M. R. Moreira, D. R. de Oliveira and A. A. Carniato, Robust control of switched linear systems with output switching strategy, *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, vol. 26, 455–465, (2015), doi: 10.1007/s40313-015-0195-1.
- [7] A. A. Carniato, *Controle de sistemas lineares chaveados incertos com acesso à saída*, Tese de Doutorado em Engenharia Elétrica, Universidade Estadual Paulista (UNESP), Ilha Solteira (2016).
- [8] S. Das and P. N. Suganthan, Differential Evolution: A survey of the state-of-the-art, in *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, vol. 15, no. 1, pp. 4–31, (2011) doi: 10.1109/TEVC.2010.2059031