



Estratégias Multimodelo em um Sistema de Levitação Magnética usando os Controles LQG/LTR e $\mathcal{H}_\infty$ /LTR em Tempo Discreto

Luiz F. Pugliese¹

Fernando H. D. Guaracy²

Fadul F. Rodor³

Renan L. Pereira⁴

Guilherme M. C. Hott⁵

Universidade Federal de Itajubá - Campus Itabira, MG

Resumo. Neste trabalho, investiga-se as estratégias de controle multimodelo LQG/LTR e $\mathcal{H}_\infty$ /LTR em tempo discreto aplicadas a um sistema não linear de levitação magnética. Na metodologia proposta, o sistema de levitação magnética é linearizado em torno de alguns pontos de operação e a partir do modelo linear local, controladores LQG/LTR e $\mathcal{H}_\infty$ /LTR em tempo discreto são projetados e comparados. Como cada controlador linear tem seu desenvolvimento baseado em um ponto de operação específico, o sinal de controle global é dado pela fuzzificação de todos os sinais de controle locais. Desta maneira, são desenvolvidos controladores híbridos capazes de superar o problema da não linearidade presente no sistema de levitação magnética. Por fim, apresenta-se os resultados experimentais obtidos com a comparação das duas estratégias de controle multimodelos LQG/LTR e $\mathcal{H}_\infty$ /LTR.

Palavras-chave. Multimodelo fuzzy, controle a tempo discreto, controle LQG/LTR, controle $\mathcal{H}_\infty$ /LTR, MAGLEV.

1 Introdução

O Princípio de Recuperação da Malha Objetivo (*Loop Transfer Recovery* – LTR) foi proposto originalmente como um procedimento sistemático para a aplicação do controle LQG que resulta na recuperação das boas características de robustez e desempenho do Filtro de Kalman ou do Regulador Linear Quadrático na malha de controle projetada [1].

¹luizfelipe.pugliese@unifei.edu.br

²fernandoh@unifei.edu.br

³fadulrodor@unifei.edu.br

⁴renan.lima@unifei.edu.br

⁵guilhermemendes@unifei.edu.br

Posteriormente, esse método foi estendido para o contexto do controle $\mathcal{H}_\infty$, no qual obteve-se uma nova ferramenta que auxilia o projetista a limitar a sensibilidade complementar da malha [2]. Como o máximo valor da sensibilidade complementar está associado ao máximo pico da resposta transitória do sistema, essa ferramenta adicional dá maior controle ao projetista no que diz respeito à especificação do desempenho do sistema em malha fechada.

Tanto o controle LQG/LTR e o controle $\mathcal{H}_\infty$ /LTR foram propostos inicialmente em tempo contínuo e posteriormente estendidos para o caso do tempo discreto [3–5]. Em ambos os casos, mostrou-se que propriedades bastante semelhantes àsquelas obtidas em tempo contínuo podem ser recuperadas desde que os observadores de estado utilizados sejam do tipo corrente ou, equivalentemente, que o controlador não seja estritamente próprio.

Uma estratégia que permite trabalhar com não linearidades é a chamada multimodelos, de forma que o sistema não linear global é representado pela combinação de diversos outros sistemas lineares mais simples, locais. Com o sistema multimodelos representado por diferentes controladores locais, realiza-se a união desses controladores através de uma inferência *fuzzy* Takagi-Sugeno (TS). Este modelo *fuzzy* consiste em um sistema de inferência capaz de descrever, de forma exata ou aproximada, sistemas dinâmicos não lineares por meio de um conjunto de sistemas dinâmicos lineares, localmente válidos, interpolados de forma suave, não linear e convexa. Sob o ponto de vista de controle, modelos TS permitem conciliar técnicas de controle não linear e, ao mesmo tempo, estender de forma rigorosa resultados da teoria de controle de sistemas lineares [7].

Assim, este artigo realiza uma investigação das técnicas de controle LQG/LTR e $\mathcal{H}_\infty$ /LTR em tempo discreto aplicadas a um sistema de levitação magnética. A aplicação de métodos de controle linear no sistema não linear é realizada pela técnica multimodelos. São obtidos resultados experimentais que comprovam as análises teóricas realizadas. O restante do artigo é dividido da seguinte maneira: a Seção 2 faz uma revisão teórica sobre os controle LQG/LTR e $\mathcal{H}_\infty$ /LTR e a Seção 3 aborda brevemente a técnica multimodelos. A Seção 4 apresenta a planta em questão e os resultados experimentais obtidos. A Seção 5 traz as conclusões e considerações finais.

2 Recuperação da Malha Objetivo nos Controles LQG e $\mathcal{H}_\infty$ em Tempo Discreto

2.1 Controle LQG/LTR

Considere uma representação em variáveis de estado da planta de processo $G = (A, B, C, D)$ em tempo discreto, que também pode ser escrita como

$$G := \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right] \quad (1)$$

em que (A, B) é estabilizável e (A, C) é detectável, a qual também pode ser representada por sua matriz de transferência $G(z) = C\Phi(z)B$, com $\Phi(z) = (zI - A)^{-1}$.

Uma representação em espaço de estados do controlador LQG em tempo discreto com observador de estados corrente é [4]

$$K_{2_{corr}} = \left[\frac{(A - BK_{C_2})(I - K_{F_2}C)}{K_{C_2}(I - K_{F_2}C)} \mid \frac{(A - BK_{C_2})K_{F_2}}{K_{C_2}K_{F_2}} \right], \quad (2)$$

em que K_{C_2} e K_{F_2} são, respectivamente, os ganhos do regulador e do observador de estados, calculados por

$$K_{C_2} = \rho^{-2}B'X_2(I + \rho^{-2}BB'X_2)^{-1}A, \quad (3a)$$

$$K_{F_2} = \mu^{-2}(I + \mu^{-2}Y_2C'C)^{-1}Y_2C', \quad (3b)$$

e X_2 e Y_2 são as matrizes simétricas soluções das seguintes equações algébricas de Riccati

$$A'X_2(I + \rho^{-2}BB'X_2)^{-1}A - X_2 + H'H = 0, \quad (4a)$$

$$A(I + \mu^{-2}Y_2C'C)^{-1}Y_2A' - Y_2 + LL' = 0, \quad (4b)$$

nas quais o sobrescrito $'$ denota matriz transposta. Embora no controle LQG tenham interpretação física bem definida, de acordo com o procedimento LTR os parâmetros $\rho > 0$, H , $\mu > 0$ e L podem ser escolhidos livremente para fazer com que o sistema resultante tenha as características desejadas, desde que o par (A, L) seja estabilizável e o par (A, H) seja controlável.

Considerando que $G(z)$ é de fase mínima, quadrada e que a matriz CB tem posto completo, se a matriz H for escolhida igual a matriz C e o escalar ρ for escolhido com valor que tende a zero, tem-se que a matriz de transferência de malha aberta é dado por [4]

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} G(z)K(z) = C\Phi(z)AK_F, \quad (5)$$

sendo a malha objetivo $C\Phi(z)AK_F$ formatada de maneira a atender as especificações desejadas. O limitante de desempenho no controle LQG/LTR em tempo discreto associado à função de sensibilidade complementar $\mathcal{T}(z)$ é dado por [6]

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \sigma_{\max}(\mathcal{T}(e^{j\omega T})) \leq 1 + \sqrt{1 + \mu^{-2}\lambda_{\max}(CYC')}, \quad (6)$$

em que $\sigma_{\max}$ representa o maior valor singular e $\lambda_{\max}$ o maior autovalor.

2.2 Controle $\mathcal{H}_\infty$ /LTR

Uma representação em espaço de estados do controlador $\mathcal{H}_\infty$ em tempo discreto com observador de estados corrente para o sistema (1) é dada por [8]

$$K_\infty = \left[\frac{(A_\infty - BK_{C_\infty})(I - K_{F_\infty}C)}{K_{C_\infty}(I - K_{F_\infty}C)} \mid \frac{(A_\infty - BK_{C_\infty})K_{F_\infty}}{K_{C_\infty}K_{F_\infty}} \right], \quad (7)$$

com

$$A_\infty = A + \gamma^{-2}LL'X_\infty(I + \rho^{-2}BB'X_\infty - \gamma^{-2}LL'X_\infty)^{-1}A. \quad (8)$$

Os ganhos do regulador e do observador de estados são calculados, respectivamente, por

$$K_{C\infty} = \rho^{-2} B' X_{\infty} (I + \rho^{-2} B B' X_{\infty} - \gamma^{-2} L L' X_{\infty})^{-1} A , \quad (9a)$$

$$K_{F\infty} = \mu^{-2} (I + \mu^{-2} Y_{\infty} C' C - \gamma^{-2} Y_{\infty} X_{\infty})^{-1} Y_{\infty} C' , \quad (9b)$$

em que X_{∞} e Y_{∞} são as matrizes simétricas soluções das seguintes equações algébricas de Riccati generalizadas

$$A' X_{\infty} (I + \rho^{-2} B B' X_{\infty} - \gamma^{-2} L L' X_{\infty})^{-1} A - X_{\infty} + H' H = 0 , \quad (10a)$$

$$A (I + \mu^{-2} Y_{\infty} C' C - \gamma^{-2} Y_{\infty} H' H)^{-1} Y_{\infty} A' - Y_{\infty} + L L' = 0 , \quad (10b)$$

sendo γ o valor da norma $\mathcal{H}_{\infty}$. Para que esse controlador exista, o produto matricial $X_{\infty} Y_{\infty}$ deve ter raio espectral menor do que γ^2 .

Sob as mesmas condições de recuperação do caso LQG, quando ρ tende a zero pela direita, a matriz de transferência de malha aberta $G(z)K(z)$ é dada por (5). Os limitantes de desempenho no controle $\mathcal{H}_{\infty}$ /LTR em tempo discreto associados à função de sensibilidade complementar são dados por [5]

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \sigma_{\max}(\mathcal{T}(e^{j\omega T})) \leq 1 + \frac{\sqrt{1 + \mu^{-2} \lambda_{\max}(C Y C')}}{\sqrt{1 - \gamma^{-2} \lambda_{\min}(C Y C')}} \quad (11a)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \sigma_{\max}(\mathcal{T}(e^{j\omega T})) \leq \frac{\gamma}{\mu} \frac{\sqrt{1 + \mu^{-2} \lambda_{\max}(C Y C')}}{\sqrt{1 - \gamma^{-2} \lambda_{\min}(C Y C')}} , \quad (11b)$$

em que $\lambda_{\min}$ representa o menor autovalor.

A principal vantagem da ocorrência do LTR no contexto do controle $\mathcal{H}_{\infty}$ em tempo discreto é a restrição (11b), que permite que o projetista limite de maneira mais efetiva o pico de frequência da sensibilidade complementar pelo ajuste da razão γ/μ e, consequentemente, reduza o máximo pico da resposta do sistema. No caso em que γ tende a infinito, recupera-se o caso LQG.

3 Multimodelos *Fuzzy*

Diferentes controladores LQG/LTR e $\mathcal{H}_{\infty}$ /LTR em tempo discreto podem ser desenvolvidos para pontos de operação distintos, gerando os multimodelos representados pelos controladores lineares locais. Pode-se realizar a união destes controladores locais via lógica *Fuzzy* para que a aplicação deixe de ser local e o sistema não linear seja controlado globalmente. Essa união favorece a aplicação do controle híbrido multimodelo em uma ampla faixa de operação, fazendo com que os controladores locais atuem sobre a planta de processo global através de um grau de pertinência associado a cada controlador local. Desta forma, a ação de controle global é obtida através da equação [7]

$$u = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i u_i}{\sum_{i=1}^n \mu_i} , \quad (12)$$

em que μ_i é o valor da ativação da i -ésima regra (modelo local), u_i a ação de controle determinada pelo i -ésimo controlador e i o número de modelos/controladores locais e o modelo do controlador multimodelo pode ser visto na Figura 1.

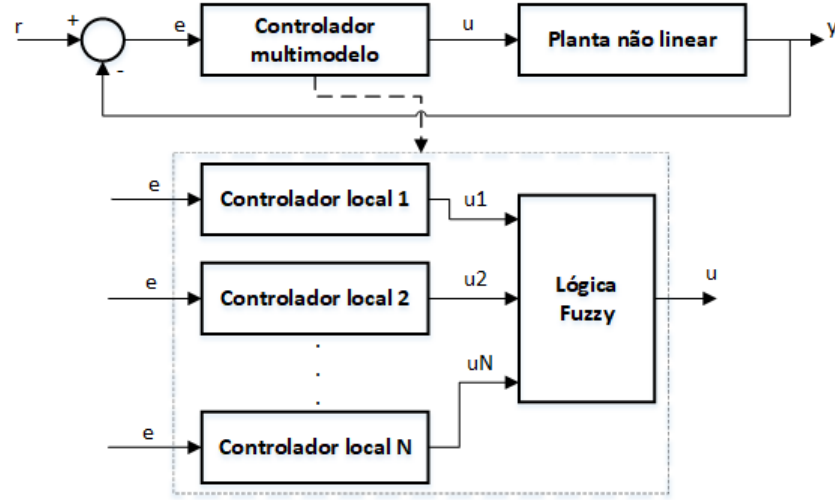


Figura 1: Estratégia multimodelo

4 Resultados Experimentais

Na aplicação, utiliza-se um sistema não linear representado por um levitador magnético fabricado pela empresa Quanser [9]. A Figura 2 ilustra o sistema de levitação magnética, sendo a base do eletroímã a referência para a ação de levitação da esfera de aço. A entrada de controle é a corrente da bobina i_c e a saída a ser controlada é a posição da esfera de aço a ser levitada x_b .

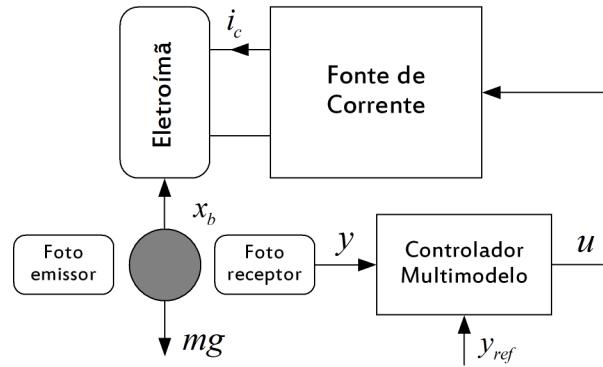


Figura 2: Representação do Sistema de Levitação

A dinâmica não linear da posição da esfera de aço segue a seguinte equação de movimento

$$\ddot{x}_b(t) = -\frac{K_m i_c(t)^2}{2M_b x_b(t)^2} + g, \quad (13)$$

em que $x_b(t)$ é a distância entre a base do eletroímã e a esfera de aço, K_m é a constante da força eletromagnética, $i_c(t)$ é a corrente da bobina, M_b é a massa da esfera de aço e g é a constante gravitacional. Do modelo não linear, lineariza-se o sistema para os pontos 6 [mm], 8 [mm], 10 [mm] e 12 [mm]. Dos modelos lineares, utiliza-se um tempo de amostragem de $T = 2$ [ms] para discretizar os sistemas. Dos modelos discretizados, realiza-se uma expansão da dinâmica da planta por integradores *backward* Euler e a matriz L é parametrizada como em [6]. Para determinar os controladores, utiliza-se $\mu = 0,1$, $\rho = 10^{-8}$ e $\gamma = 4$. Assim, determina-se quatro controladores locais para as posições escolhidas e dessa maneira, realiza-se a ponderação de todos os sinais de controle obtidos via lógica *Fuzzy* para que assim a aplicação se torne global.

A Figura 3(a) mostra a comparação das respostas obtidas utilizando o controlador local PIV projetado pela fabricante Quanser [9] para o ponto de operação de 6 [mm] e pela técnica multimodelos LQG/LTR. Nota-se que a estratégia multimodelos apresenta um desempenho mais satisfatório do que o controlador local, que tem seu comportamento deteriorado devido à larga faixa de operação considerada.

A Figura 3(b) mostra a comparação das respostas obtidas utilizando os controladores multimodelo LQG/LTR e $\mathcal{H}_\infty$ /LTR. Nos instantes em que a mudança de referência é mais acentuada, nota-se, com diferentes graus de intensidade dependendo do ponto de operação, que o máximo pico da resposta do sistema é menor quando utiliza-se a técnica $\mathcal{H}_\infty$ /LTR.

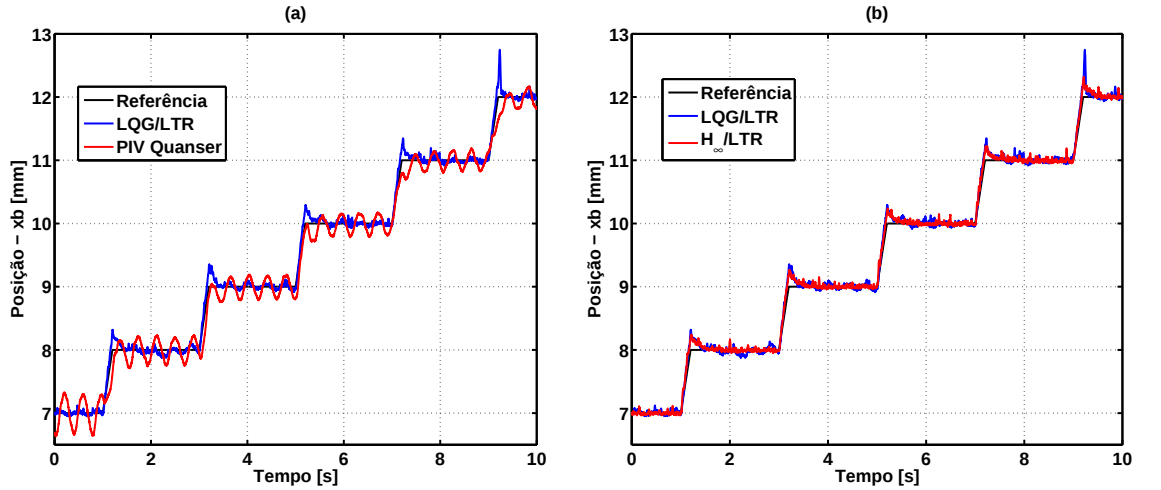


Figura 3: (a) Comparação LQG/LTR Multimodelo $\times$ PIV; (b) Comparação LQG/LTR Multimodelo $\times$ $\mathcal{H}_\infty$ /LTR Multimodelo

5 Conclusão

Neste artigo apresentou-se uma comparação entre controladores multimodelos não lineares aplicados a uma planta de levitação magnética. A proposta de desenvolver controladores LQG/LTR e $\mathcal{H}_\infty$ /LTR em tempo discreto locais e unir globalmente os sinais de controle pela lógica *Fuzzy*, obteve resultados satisfatórios.

A partir dos resultados obtidos pode-se perceber que tanto o controlador multimodelo LQG/LTR como o controlador multimodelo $\mathcal{H}_\infty$ /LTR em tempo discreto apresentam um bom desempenho comparado ao controlador local PIV projetado pela fabricante Quanser. Com isso, pode-se afirmar que as estratégias de controle híbrido para sistemas multimodelos possibilitam vencer as não linearidades impostas por um sistema de levitação magnética e proporciona um melhor desempenho do que utilizar um único controlador local. Além disso, é possível notar que entre as estratégias multimodelos, há uma vantagem no uso da técnica $\mathcal{H}_\infty$ /LTR em relação a técnica LQG/LTR.

Referências

- [1] J. C. Doyle and G. Stein, Multivariable feedback design: Concepts for a classical/modern synthesis, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 24, 4–16, (1981).
- [2] de Paula, C. F., and Ferreira, L. H. C, An easy-to-use $\mathcal{H}_\infty$ /LTR control solution with mixed-sensitivity properties, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 56, 1709–1713, (2011).
- [3] Goodman, G. C., The LQG/LTR method and discrete-time control systems, Master’s thesis, MIT, (1984).
- [4] Maciejowski, J. M., Asymptotic recovery for discrete-time systems, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 30, 602–605, (1985).
- [5] Guaracy, F. H. D.; Ferreira, L. H. C.; Pinheiro, C. A. M., The discrete-time controller for the $\mathcal{H}_\infty$ /LTR problem with mixed-sensitivity properties, Automatica, vol. 58, p 28–31, (2015).
- [6] Guaracy, F. H. D.; Silva, D. L. F; Ferreira, L. H. C., On the plant augmentation by integrators in the discrete-time LQG/LTR control, IEEE Multi-Conference on Systems and Control, 1152–1157, (2014).
- [7] Pugliese, L. F., Uma estratégia de controle multimodelo LQG/LTR aplicada a um sistema não linear de levitação magnética, Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Itajubá, UNIFEI, 2015.
- [8] Stoorvogel, A. A., The $\mathcal{H}_\infty$ control problem: a state space approach, Prentice Hall, (1992).
- [9] Quanser, Magnetic Levitation Workbook, Technical Report.