



Identificação por Subespaços de Sistemas MIMO com Erros em Variáveis

Jorge. A. Puerto Acosta¹

Celso P. Bottura²

LCSI-DSIF-FEEC-UNICAMP

Av. Albert Einstein - 400, Cidade Universitária Zeferino Vaz

Distrito Barão Geraldo, Campinas, SP, Brasil, 13083-852

Resumo. Neste trabalho, é feita uma breve revisão do método de identificação por subespaços MIMO³ MOESP-EIV, para sistemas dinâmicos com erros em variáveis, ou seja modelos que estão submetidos a perturbação tanto na medida da entrada exógena, quanto à saída. Neste trabalho é contemplada a realização do sistema em dependência das características da entrada. O qual produz dois métodos para calcular estimativas consistentes das matrizes de estado A, C . Posteriormente apresenta-se o cálculo do conjunto de matrizes B, D usando o quadrados mínimos e variável instrumental com o fim de lidar com a perturbação dos sinais medidos. Por fim, apresentam-se um conjunto de aplicações que combinam os métodos de estimação das matrizes A, C com os procedimentos de cálculo das matrizes B, D .

Palavras-chave. Erros em Variáveis “EIV”, Identificação de Sistemas Dinâmicos

1 Introdução

Múltiplas abordagens ao problema de identificação do modelo apresentado na Figura 1 são feitas, algumas das mais significativas são feitas por [1–3] onde é considerado o problema de identificação do modelo EIV⁴ como um problema de identificação entrada-saída.

O problema de erros em variáveis tem chamado a atenção de pesquisadores por décadas, devido em parte à complexidade que tem inserido o ruído na entrada, isto por que muitas das abordagens feitas na literatura tratam o problema de ruído à saída exclusivamente exemplo deste interesse pode ser visto dentre outros em [4, 5]

¹japa1@dsif.fee.unicamp.br

²bottura@fee.unicamp.br

³do inglês: “MultiInput Multi-Output”

⁴do inglês: “Erros-In-Variables”

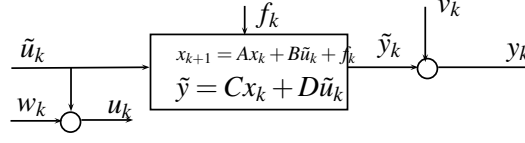


Figura 1: Diagrama do Modelo de Erros em Variáveis.

Outra abordagem é feita por [6], onde apresenta o problema de identificação EIV usando uma análise por subespaços e o uso de Variável Instrumental (IV) (esta abordagem será explicada amplamente a seguir na Seção 2).

1.1 Problema de Erros em Variáveis (EIV)

O problema de erros em variáveis EIV, consiste, na inclusão de uma perturbação à entrada do modelo de estado. Dita perturbação é inserida quando é feita a medição do sinal de entrada à planta como é mostrado na figura 1. Além do ruído medido na entrada, tem-se um sinal de saída poluído por uma perturbação de tipo ruído branco a qual não é correlata com a perturbação medida na entrada.

Considere o sistema apresentado na Figura 1, o qual pode-ser representado no espaço de estado como:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + B\tilde{u}_k + f_k \\ y_k &= \tilde{y}_k + v_k \\ \tilde{y}_k &= Cx_k + D\tilde{u}_k \\ \tilde{u}_k &= u_k - w_k, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \tag{1}$$

O modelo em (1) é conhecido como modelo EIV e é considerado para um conjunto de dados de entrada-saída $\{u_k, y_k, | k = 0, 1, \dots, N-1\}$, com N amostras. Onde x_k é o vetor de estado, u_k o vetor de entrada medido (perturbado), y_k o vetor de saída perturbado, as perturbações w_k , f_k , v_k , são supostas como ruído branco de media zero e variância unitária, e A, B, C, D matrizes constantes.

2 Abordagem do problema EIV por Subespaços

Esta abordagem divide o problema em duas categorias, de acordo com as considerações feitas sob o ruído.

No problema na Figura 1 e no modelo (1). Os processos w_k , f_k , v_k , são considerados ruído branco de media zero e não correlatos com a entrada $\tilde{u}_k$ ou seja a esperança $E[\cdot]$ entre o passado da entrada livre de ruído $\tilde{u}_k$ e os processos w_k , f_k , v_k é igual a zero, ou seja:

$$E[\tilde{u}_k w_j] = E[\tilde{u}_k f_j] = E[\tilde{u}_k v_j] = 0 \quad \text{para todo } j \geq k$$

Além disso, é suposto que w_k e v_k são independentes da sequência de estado x_k , e o processo de ruído f_k (com $k \geq 1$) é independente do estado inicial x_1 . A prova de isto pode-se ver em [7].

A abordagem aqui apresentada esta sendo tratada a traves dos algoritmos MOESP [7, 8], o qual esta constituido de dois passos, o primeiro é a estimação da matriz de observabilidade estendida $\hat{\Gamma}$ e a ordem do sistema, com o que podem ser estimadas as matrizes de estado (A, C) . O segundo passo consiste na estimação das matrizes de estado (B, D) a partir da estimação de (A, C) no passo um.

Para o desenvolvimento do passo um, é preciso construir as matrizes de dados $u_k, \tilde{u}_k, y_k, \tilde{y}, w_k, f_k, w_k$ no formato da matriz bloco de Hankel em (2).

$$U_{0|s-1} = \begin{bmatrix} u(0) & \cdots & u(N-1) \\ u(1) & \cdots & u(N) \\ \vdots & & \vdots \\ u(s-1) & \cdots & u(s+N-2) \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{sm \times N} \quad (2)$$

E a traves de:

$$Y_{j,s,N} = \Gamma_s X_{j,N} + H_s U_{j,s,N} - H_s W_{j,s,N} + G_s F_{j,s,N} + V_{j,s,N} \quad (3)$$

é obtida a matriz de observabilidade estendida, em (3), H_s, G_s são matrizes bloco de Toeplitz e $X_{j,N}$ é dada por:

$$X_{j,N} = [x_j \quad \cdots \quad x_{j+N-1}] \quad (4)$$

e os blocos de Toeplitz:

$$H_s = \begin{bmatrix} D & \cdots & 0 \\ CB & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{s-2}B & \cdots & D \end{bmatrix}, e \quad G_s = \begin{bmatrix} D & \cdots & 0 \\ C & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{s-2} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

onde j é o índice de tempo no qual é inicializada a variável, N o número de amostras, e s o número de blocos.

2.1 $\tilde{u}_k$ sendo Ruído Branco de Media Zero

Em [6] são apresentados e provados os seguintes teoremas

Teorema 2.1. *Dado o conjunto entrada-saída com ruído u_k, y_k que satisfaz o problema EIV. É suposto que a entrada livre de ruído $\tilde{u}_k$ é uma sequência discreta de ruído branco e media zero, para a qual tem-se a fatoração QR dada por:*

$$\begin{bmatrix} U_{s+1,s,N} \\ U_{1,s,N} \\ Y_{1,s,N} \\ Y_{s+1,s,N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 & 0 & 0 \\ R_{21} & R_{22} & 0 & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & 0 \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \\ Q_3^T \\ Q_4^T \end{bmatrix} \quad (6)$$

então

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{N}} [R_{42} \quad R_{43}] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \Gamma_s X_{s+1,N} [Q_2 \quad Q_3]^T \quad (7)$$

O Teorema 2.1, implica que quando $\tilde{u}$ é uma entrada livre de perturbação do tipo ruído branco de media zero, pode ser estimada a matriz Γ_s a partir de $[R_{42} \quad R_{43}]$.

2.2 $\tilde{u}_k$ não sendo Ruído Branco de Media Zero

Nesta consideração são usadas as matrizes bloco de Hankel $U_{1,s,N}$ e $Y_{1,s,N}$ como variáveis instrumentais (IV) com o fim de remover o ruído. Pós-multiplicando (3) por $\begin{bmatrix} U_{1,s,N} \\ Y_{1,s,N} \end{bmatrix}$ tem-se

$$Y_{j,s,N} \begin{bmatrix} U_{1,s,N} \\ Y_{1,s,N} \end{bmatrix} = \Gamma_s X_{j,N} \begin{bmatrix} U_{1,s,N} \\ Y_{1,s,N} \end{bmatrix} + H_s U_{j,s,N} \begin{bmatrix} U_{1,s,N} \\ Y_{1,s,N} \end{bmatrix} \quad (8)$$

para $N \rightarrow \infty$. Então baseados em (8) é apresentado o seguinte teorema

Teorema 2.2. *Dado o conjunto de saída-entrada u_k, y_k , e supondo que $\tilde{u}_k$ não é uma sequência de ruído branco de media zero, a fatoração QR é dada por:*

$$\begin{bmatrix} U_{s+1,s,N} U_{1,s,N}^T & U_{s+1,s,N} Y_{1,s,N}^T \\ Y_{s+1,s,N} U_{1,s,N}^T & Y_{s+1,s,N} Y_{1,s,N}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{bmatrix} \quad (9)$$

então

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{N}} R_{22} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \Gamma_s X_{s+1,N} \begin{bmatrix} U_{1,s,N}^T & Y_{1,s,N}^T \end{bmatrix} Q_2^T \quad (10)$$

2.3 Estimação das Matrizes B e D

Múltiplas abordagens para o calculo das matrizes B e D tem sido apresentadas na literatura a mais comumente usada é a nomeada problema de estimação “linear-in-parameter” que pode ser vista em [7] e as referências usadas nesses artigos. A seguir é pesentado o cálculo usando variável instrumental, mas, um dos métodos mais usados no algoritmo MOESP ordinario para calcular as matrizes (B, D) é quadrados mínimos, por tanto recomenda-se ver [9, 10].

2.3.1 Variável Instrumental

A inclusão do ruído na medida da entrada faz útil o uso de variáveis instrumentais no processo de estimação destas matrizes.

Para isto é usada a representação do modelo de erro de saída, no qual $\tilde{y}$ no modelo apresentado em (1), pode ser representada como:

$$\tilde{y} = CA^{k-j} x_j + \left(\sum_{\tau=j}^{k-1} \tilde{u}_\tau^T \otimes CA^{k-1-\tau} \right) \text{vec}(B) + (\tilde{u} \otimes I) \text{vec}(D) + \sum_{k=1}^{\tau=j} CA^{k-1-\tau} f_k \quad (11)$$

onde $\text{vec}(\cdot)$ é o vetor coluna formado pelas colunas de $(\cdot)$ e $\otimes$ o produto de Kronecker.

Definindo as seguintes matrizes:

$$\mathcal{U}_{j,N} = \begin{bmatrix} 0 & u_j^T \otimes I \\ u_j^T \otimes I & u_{j+1}^T \otimes I \\ \vdots & \vdots \\ \sum_{\tau=j}^{j+N-2} u_\tau^T \otimes CA^{j+N-2-\tau} & u_{j+N-1}^T \otimes I \end{bmatrix} \quad \mathcal{P} = \begin{bmatrix} \text{vec}(B) \\ \text{vec}(D) \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\mathcal{F}_{j,N} = \begin{bmatrix} 0 \\ CAf_j \\ \vdots \\ \sum_{\tau=j}^{j+N-2} CA^{j+N-2-\tau} f_\tau \end{bmatrix} \quad \mathcal{W}_{j,N} = \begin{bmatrix} 0 & w_j^T \otimes I \\ w_j^T \otimes I & w_{j+1}^T \otimes I \\ \vdots & \vdots \\ \sum_{\tau=j}^{j+N-2} w_\tau^T \otimes CA^{j+N-2-\tau} & w_{j+N-1}^T \otimes I \end{bmatrix} \quad (13)$$

Levando em conta o ruído medido na entrada e fazendo conjuntos e vetores coluna, com as medidas da saída consecutivos desde o tempo j até o tempo $j+N-1$, pode-se chegar a seguinte equação de modelo de erro de saída:

$$Y_{j,N,1} = \Gamma_N x_j + \mathcal{U}_{j,N} \mathcal{P} + \underbrace{\mathcal{F}_{j,N} + \mathcal{W}_{j,N} \mathcal{P} - V_{j,N,1}}_{\substack{\text{Erro de saída} \\ \mathcal{E}_{j,N}}} \quad (14)$$

Para calcular as matrizes (B, D) a partir de (14), é preciso calcular a matriz Γ_N a partir das matrizes A, B do modelo real. Porém, as matrizes reais são desconhecidas, então o calculo da matriz Γ_N é feito com as matrizes (A, C) estimadas no passo anterior. De forma semelhante as matrizes definidas em (12) até (??) são expressas em função das matrizes (A, C) .

Assim, (14) pode ser reescrita como:

$$Y_{j,N,1} = \hat{\Gamma}_N x_j + \hat{\mathcal{U}}_{j,N} \mathcal{P} + \hat{\mathcal{F}}_{j,N} + \hat{\mathcal{W}}_{j,N} \mathcal{P} - V_{j,N,1} + \Delta_N \quad (15)$$

sendo

$$\Delta_N = \Delta_N \Gamma_N x_j + \Delta_N \mathcal{U}_{j,N} \mathcal{P} + \Delta_N \mathcal{F}_{j,N} + \Delta_N \mathcal{W}_{j,N} \mathcal{P} - V_{j,N,1}$$

Asumindo a consistencia na estimação de (A, C) temos:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Delta_N = 0$$

Escolhiendo uma variável instrumental Z_N como:

$$Z_N = [Y_{s+1,s,N} \otimes I \quad U_{s+1,s,N} \otimes I] \quad (16)$$

a expressão em (15) pode ser dada como:

$$\frac{1}{N} Z_N^T Y_{j,N,1} = \frac{1}{N} Z_N^T \hat{\Gamma}_N x_j + \frac{1}{N} Z_N^T \hat{\mathcal{U}}_{j,N} \mathcal{P} + \frac{1}{N} Z_N^T \hat{\mathcal{F}}_{j,N} + \frac{1}{N} Z_N^T \hat{\mathcal{W}}_{j,N} \mathcal{P} - \frac{1}{N} Z_N^T V_{j,N,1} + \frac{1}{N} Z_N^T \Delta_N \quad (17)$$

Se os seguintes requerimentos são cumpridos, então é possível ter uma estimação consistente de (B, D) (ver [6] para o detalhamento dos requisitos) $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} Z_N^T \hat{\mathcal{F}}_{j,N} = 0$ $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} Z_N^T \hat{\mathcal{W}}_{j,N} = 0$ $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} Z_N^T V_{j,N,1} = 0$ $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} Z_N^T \hat{\Gamma}_N = 0$ $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} Z_N^T \Delta_N = 0$ A matriz

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} Z_N^T \hat{\mathcal{U}}_{j,N}$$

tem posto completo.

3 Aplicação

A seguinte aplicação apresenta um sistema MIMO de ordem doze dado pelo conjunto de matrizes de estado apresentado em (18). O sistema de quinta ordem estimado é apresentado em (19). A ordem do sistema pode ser escolhida a partir da decomposição em valores singulares da Equação (7) no Teorema 2.1. E no caso da aplicação do Teorema 2.2, a ordem do sistema pode ser escolhida a partir da informação fornecida pela decomposição em valores singulares da Equação (10).

$$\begin{aligned}
 A_p = & \begin{bmatrix} 0.9977 & -0.0033 & 0.0029 & 0.0006 & -0.0131 & 0.001 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0006 & 0.0000 & 0.0009 & 0.0000 \\ 0.0260 & 0.9403 & 0.0005 & 0.0001 & -0.0024 & 0.0002 & -0.0000 & -0.0001 & -0.0311 & 0.0000 & 0.0002 & 0.0000 \\ 0.0293 & -0.0148 & 0.9683 & 0.0000 & -0.0002 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0151 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.9727 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0001 & -0.0052 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 \\ 0.0005 & 0.0407 & 0.0000 & -0.0844 & 0.9047 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0004 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ -0.0075 & -0.5590 & -0.0002 & 1.1599 & -26.1909 & 0.9047 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0059 & 0.0186 & 1.8601 & 0.0000 \\ -0.0001 & -0.0071 & -0.0000 & 0.0147 & -0.3325 & -0.0000 & 0.9950 & -0.0000 & -0.0028 & 0.0000 & 0.0273 & -0.0344 \\ -0.0029 & -0.2165 & -0.0001 & -0.0467 & -0.0089 & -0.0000 & 0.0552 & 0.9996 & -0.2184 & 0.0000 & 0.0007 & -0.0010 \\ -0.0000 & -0.0001 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0010 & 0.9999 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ -0.0000 & -0.0025 & -0.0000 & 0.0051 & -0.1161 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.9048 & -0.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0001 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0010 & 1.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0076 & -0.0000 & -0.0000 & 0.9048 \end{bmatrix} \\
 B_p = & \begin{bmatrix} 0.0084 & -0.0000 \\ 0.0015 & -0.0000 \\ 0.0001 & -0.0000 \\ -0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 \\ 16.8363 & -0.0000 \\ 0.2469 & 0.0020 \\ 0.0067 & 0.0001 \\ 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0862 & -0.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 \\ -0.0000 & 0.0054 \end{bmatrix} \quad D_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 C_p = & \begin{bmatrix} 0.0004 & 0.0287 & 0.0000 & -0.0596 & 1.3468 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0003 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ -0.0000 & -0.0001 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0007 & 1.4141 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{18}$$

Modelo estimado na iteração 40; considerando $\tilde{u}$ Ruído colorido, e uso de IV

$$\begin{aligned}
 A = & \begin{bmatrix} 0.9916 & 0.0531 & 0.0037 & -0.0072 & 0.0055 \\ -0.0364 & 0.9881 & 0.0111 & 0.0198 & -0.0049 \\ -0.0067 & -0.0200 & 0.9617 & 0.0591 & -0.0685 \\ -0.0151 & -0.0322 & -0.0632 & 0.6623 & 0.3410 \\ 0.0222 & -0.0409 & 0.0852 & -0.5570 & 0.6384 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.0803 & 0.0289 \\ -0.0324 & 0.0469 \\ 0.0801 & -0.0405 \\ 0.0185 & 0.0955 \\ 0.0554 & 0.0325 \end{bmatrix} \\
 D = & \begin{bmatrix} 0.0768 & -0.0387 \\ 0.0708 & 0.0357 \end{bmatrix} \\
 C = & \begin{bmatrix} -0.1127 & 0.1701 & 0.0343 & -0.0694 & 0.0492 \\ -0.0237 & 0.0454 & -0.0757 & 0.0065 & 0.0184 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{19}$$

4 Conclusões

Neste trabalho é apresentado o algoritmo de identificação por subespaços em malha aberta de erros em variáveis, com a implementação do calculo das matrizes de estado (A, C) a partir de

dois algoritmos que dependem das características da excitação. O cálculo das matrizes (B, D) é feito por mínimos quadrados e com o uso de variável instrumental. Este último método, implica um tratamento das perturbações a fim de cancelar o efeito destas na identificação.

Referências

- [1] T. Söderström, “Identification of stochastic linear systems in presence of input noise,” *Automatica*, vol. 17, no. 5, pp. 713 – 725, 1981.
- [2] —, “Errors-in-variables methods in system identification,” *Automatica*, vol. 43, no. 6, pp. 939 – 958, 2007.
- [3] T. Söderström, L. Wang, R. Pintelon, and J. Schoukens, “Can errors-in-variables systems be identified from closed-loop experiments?” *Automatica*, vol. 49, no. 2, pp. 681 – 684, 2013.
- [4] R. Diversi and U. Soverini, “Identification of errors-in-variables models with colored output noise,” in *2015 European Control Conference (ECC)*, July 2015, pp. 1784–1789.
- [5] M. Ikenoue and K. Wada, “Generalized eigenvector method for errors-in-variables models identification,” in *2015 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, Dec 2015, pp. 777–782.
- [6] C. CHOU and M. VERHAEGEN, “Subspace algorithms for the identification of multivariable dynamic errors-in-variables models,” *Automatica*, vol. 33, no. 10, pp. 1857 – 1869, 1997.
- [7] M. Verhaegen and P. Dewilde, “Subspace model identification. part i: the output-error state space model identification class of algorithms,” *Journal of control*, vol. 56, no. 1, pp. 1187–1210, 1992.
- [8] M. Verhaegen, “Special issue on statistical signal processing and control identification of the deterministic part of mimo state space models given in innovations form from input-output data,” *Automatica*, vol. 30, no. 1, pp. 61 – 74, 1994.
- [9] A. J. Forero, J. A. Puerto Acosta, and C. P. Bottura, “Identificação no espaço de estado de um sistema eletro mecânico usando os métodos moesp e cca,” *XII Simposio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI)*, Outubro 2015.
- [10] G. Barreto, “Modelagem computacional distribuída e paralela de sistemas e de séries temporais multivariáveis no espaço de estado,” Ph.D. dissertation, Universidade Estadual de Campinas, 2002.