



Modelagem Computacional de Sistemas em Malha Fechada com Erros em Variáveis

J. A. Puerto Acosta¹

Celso P. Bottura²

LCSI-DSIF-FEEC-UNICAMP

Av. Albert Einstein - 400, Cidade Universitária Zeferino Vaz

Distrito Barão Geraldo, Campinas, SP, Brasil, 13083-852

Resumo. Neste trabalho é apresentada uma abordagem do problema de identificação de sistemas lineares invariantes no tempo em malha fechada, fazendo uso da representação aumentada de sistemas em malha fechada via transformação fracionária linear. Abordagem que permite uma representação geral do sistema com erros nas medições dos conjuntos de dados de entrada saída; e a representação particular do mesmo, tendo considerações específicas sobre a matriz de transferência direta da planta. O que pode ser uma vantagem em relação à abordagem clássica do problema de identificação a qual é feita através da representação conjunto entrada-saída por meio de redução de blocos ou descrição de funções de transferência. Aqui apresentamos as matrizes de estado do sistema aumentado que permitem implementar a identificação do sistema e posteriormente realizar o cálculo das equações que descrevem a planta e o controlador.

Palavras-chave. Erros em Variáveis “EIV”, Identificação de Sistemas em malha fechada

1 Introdução

Este trabalho é abordado o problema de identificação de sistemas com erros em variáveis o qual conta com um grande interesse dos grupos de pesquisa associados à modelagem computacional e dados, como é evidenciado nas referências deste trabalho e as referências no interior dos trabalhos citados no desenvolvimento deste texto. O objetivo deste trabalho é apresentar uma abordagem geral do sistema aumentado controle-saída em malha fechada via transformações fracionárias lineares fazendo a descrição do sistema em malha fechada apartir das conclusões relacionadas à identificabilidade do sistema EIV no artigo [1], onde é feita uma comparação de três topologias, a primeira topologia estudada no artigo é apresentada por [2], a segunda e a terceira são topologias canônicas de malha fechada. Neste trabalho é apresentada a segunda

¹japa1@dsif.fee.unicamp.br

²bottura@fee.unicamp.br

topologia estudada em [1], dado que segundo o autor, é a mais apropriada que a apresentada em [2], e claro identificável.

Assim este trabalho apresenta uma breve revisão do problema de identificação de erros em variáveis EIV em malha aberta, que foi tratado em [2,3] seguido de uma representação geral do sistema EIV fazendo uso da transformada fracionaria linear, e posteriormente é apresentado o método MOESP com a variação feita para tratar o caso EIV em [2].

1.1 Problema de Erros em Variáveis (EIV)

O problema de erros em variáveis (EIV)³, consiste, na inclusão de uma perturbação à entrada e a saída do modelo de estado. Dita perturbação é inserida quando são feitas as medições dos sinais na planta, como é mostrado na figura 1.

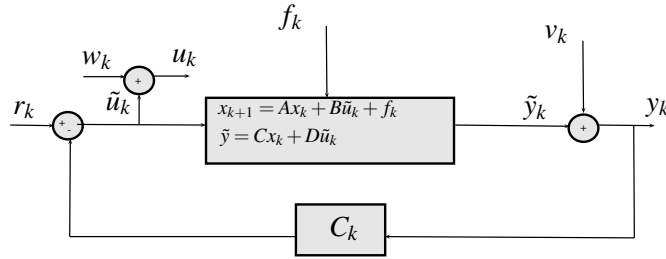


Figura 1: Diagrama do Modelo de Erros em Variáveis.

O problema de erros em variáveis é um problema amplamente tratado na literatura, isto, pode ser evidenciado em [4, 5] e nos trabalhos citados no interior desses artigos. Em [3] é feita uma breve descrição do problema de identificação de sistemas EIV em malha aberta a qual pode ser resumida como é apresentado nos Algoritmos 1 e 2:

```

inicio
    construa as matrizes de dados  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{y}$ ,  $v$ ,  $f$ ,  $w$  e as matrizes Toeplitz  $H$  ( $G$ ); com a forma:


$$U_{j,s,N} = \begin{bmatrix} u_j & \cdots & u_{j+N-1} \\ u_{j+1} & \cdots & u_{j+N} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{j+s-1} & \cdots & u_{j+N+s-2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{sm \times N}, \quad H_s = \begin{bmatrix} D & \cdots & 0 \\ CB & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{s-2}B & \cdots & D \end{bmatrix} \quad (1)$$


    if  $\tilde{u}$  é Ruído Branco de média zero (RBMZ) then
        Use o Teorema 3.1, e determine a matriz de observabilidade estendida  $\hat{\Gamma}_s$  a partir de  $[R_{42} \quad R_{43}]$ .
        Com  $\hat{\Gamma}_s = [C \quad CA \quad \cdots \quad CA^{s-1}]'$ 
        e a ordem do sistema, obtida a partir da decomposição em valores singulares de  $[R_{42} \quad R_{43}]$ 
    else
        Use o Teorema 3.2 e determine a matriz de observabilidade estendida  $\hat{\Gamma}_s$  a partir de

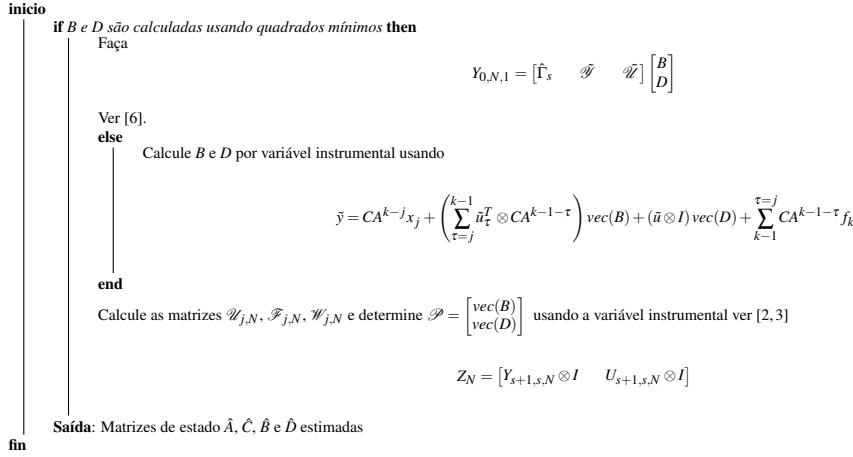

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{N}} R_{22} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \Gamma_s X_{s+1,N} [U_{1,s,N}^T \quad Y_{1,s,N}^T] Q_2^T$$


        e a ordem do sistema fazendo a decomposição em valores singulares de  $[R_{22}]$ 
    end
    Saída: Com  $\hat{\Gamma}_s$  determine  $\hat{A}$  e  $\hat{C}$ 
fin

```

Algorithm 1: Algoritmo de Identificação EIV, calculo das matrizes A e C

³do inglês: “Erros-In-Variabes”



Algorithm 2: Algoritmo de Identificação EIV, calculo das matrizes B e D

2 Abordagem Controle Saída do Modelo EIV

O sistema na Figura 1, representa a abordagem clássica do problema em EIV em malha fechada [7]. Em [1], tem sido feita uma avaliação de vários esquemas de realimentação associados ao problema de identificação do modelo EIV em malha fechada, dentre esses esquemas, tem-se concluído que a configuração mais apropriada para identificação do modelo seria o esquema apresentada na Figura 2, porém, dita avaliação do esquema é feita para sistemas SISO, portanto neste trabalho propõe-se a avaliação do esquema considerando-lo como um sistema MIMO, e a identificação do modelo abordada por subespaços como uma realização conjunta controle-saída do sistema; para esse proposito nesta seção é apresentada uma abordagem via transformações

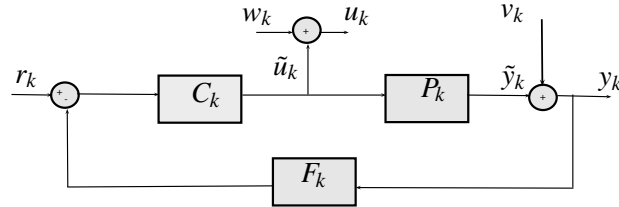


Figura 2: Sistema MIMO em Malha Fechada.

fracionais lineares LFT para o problema de identificação-EIV MIMO LTI em malha fechada ver [8].

Suponha que as equações da planta e do controlador do sistema na Figura 2, são dadas como:

$$\begin{aligned} x_{pk+1} &= A_p x_{pk} + B_p u_{pk} \\ y_k &= C_p x_{pk} + D_p u_{pk} \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} x_{ck+1}(t) &= A_c x_{ck} + B_c [r_k - y_k] \\ u_k &= C_c x_{ck} + D_c [r_k - y_k] \end{aligned} \quad (2)$$

O problema EIV em malha fechada pode ser tratado como um conjunto controle-saída (ou

sistema aumentado), através da abordagem via LFT como:

$$\begin{bmatrix} x_{pk+1} \\ x_{ck+1} \\ y_k \\ u_k \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x_{pk} \\ x_{ck} \\ r_k \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} x_{pk} \\ x_{ck} \end{bmatrix} = z^{-1} \begin{bmatrix} x_{pk+1} \\ x_{ck+1} \end{bmatrix} \quad (3)$$

supondo $v_k = 0$ e $w_k = 0$, então M , pode ser calculada como:

$$M = \left[\begin{array}{cc|c} A - BD_c FRC & BRC_c & -BD_c R3 \\ -B_c F R1C & A_c - BFDRC_c & B_c R3 \\ \hline R2C & DRC_c & DD_c R3 \\ -D_c F R2C & RC_c & -D_c R3 \end{array} \right] \quad (4)$$

com $R = (I + D_c F D_p)^{-1}$, $R1 = (I + D_c D_p F)^{-1}$, $R2 = (I + F D_p D_c)^{-1}$, $R3 = (I + F D_p D_c)^{-1}$; apartir de C_k e P_k na Figura 2.

Fazendo F em (4) uma identidade de tamanho adequado, e $D = 0$, as matrizes de estado do sistema em malha fechada (aumentado) são dadas por:

$$M = \left[\begin{array}{cc|c} \overbrace{A - BD_c C}^{\bar{A}} & \overbrace{BC_c}^{\bar{B}} & \overbrace{BD_c}^{\bar{B}} \\ -B_c C & A_c & B_c \\ \hline \underbrace{C}_{\bar{C}} & 0 & 0 \\ -D_c C & C_c & D_c \\ \hline \underbrace{}_{\bar{C}} & \underbrace{}_{\bar{D}} & \underbrace{}_{\bar{D}} \end{array} \right] \quad (5)$$

O sistema da Figura 2, é representado como a LFT dada por $\mathcal{F}_u \{M, z^{-1}\}$, como é mostrado na Figura 3.

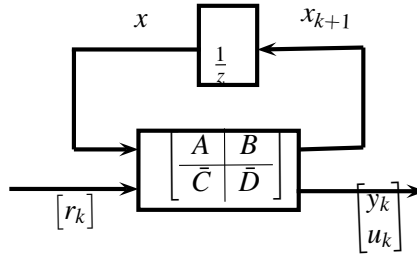


Figura 3: Diagrama LFT Superior.

por tanto a LFT do sistema em malha fechada é dada por:

$$\begin{bmatrix} x_{pk+1} \\ x_{ck+1} \\ y_k \\ u_k \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \bar{A} & \bar{B} \\ \hline \bar{C} & \bar{D} \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_{pk} \\ x_{ck} \\ r_k \end{bmatrix} \quad (6)$$

do qual é possível calcular o controlador e a planta na Figura 2, através da análise de sensibilidade MIMO (ver [9]); como:

$$P_k = T_{ur}^{-1} T_{yr}, \quad \text{e } C_k = (I - T_{yr})^{-1} T_{ur} \quad (7)$$

Sendo que T_{ur} é a matriz de transferência das saídas aumentadas $u \in R^n$ e as entradas $r \in R^m$; e T_{yr} é a matriz de transferência, das saídas aumentadas $y \in R^m$ e as entradas.

3 Identificação Baseada no Método MOESP

No problema da Figura 1; os processos w_k, f_k, v_k , são considerados ruído branco de media zero e não correlatos com a entrada $\tilde{u}_k$ ou seja a esperança $E[\cdot]$ entre o passado da entrada livre de ruído $\tilde{u}_k$ e os processos w_k, f_k, v_k é igual a zero, ou seja:

$$E[\tilde{u}_k w_j] = E[\tilde{u}_k f_j] = E[\tilde{u}_k v_j] = 0 \quad \text{para todo } j \geq k$$

Além disso, é suposto que w_k e v_k são independentes da sequência de estado x_k , e o processo de ruído f_k (com $k \geq 1$) é independente do estado inicial x_1 . A prova de isto pode-se ver em [7].

A abordagem aqui apresentada esta constituída de dois passos, o primeiro é a estimação da matriz de observabilidade estendida $\hat{\Gamma}$ e a ordem do sistema, com o que podem ser estimadas as matrizes de estado (A, C) . O segundo passo consiste na estimação das matrizes de estado (B, D) a partir da estimação de (A, C) no passo um.

Para o desenvolvimento do passo um, é preciso construir as matrizes de dados $u_k, \tilde{u}_k, y_k, \tilde{y}_k, w_k, f_k, v_k$ no formato da matriz bloco de Hankel, como no Algoritmo 1; posteriormente obter a matriz de observabilidade estendida. O calculo da matriz Γ_s , no sentido do problema de EIV, é feito de acordo com as características do sinal de entrada medida $\tilde{u}$. A primeira consideração é feita para $\tilde{u}_k$ sendo ruído branco de media zero. A segunda consideração para o calculo de Γ_s é sendo $\tilde{u}_k$ um sinal que não é ruído branco de media zero, e sim um sinal persistentemente excitante.

3.1 $\tilde{u}_k$ sendo Ruído Branco de Media Zero

Em [2] são apresentados e provados os seguintes teoremas

Teorema 3.1. *Dado o conjunto entrada-saída com ruído u_k, y_k que satisfaz o problema EIV. É suposto que a entrada livre de ruído $\tilde{u}_k$ é uma sequência discreta de ruído branco e media zero, para a qual tem-se a fatoração QR dada por:*

$$\begin{bmatrix} U_{s+1,s,N} \\ U_{1,s,N} \\ Y_{1,s,N} \\ Y_{s+1,s,N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 & 0 & 0 \\ R_{21} & R_{22} & 0 & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & 0 \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \\ Q_3^T \\ Q_4^T \end{bmatrix} \quad (8)$$

então

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} R_{42} & R_{43} \end{bmatrix} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \Gamma_s X_{s+1,N} \begin{bmatrix} Q_2 & Q_3 \end{bmatrix}^T \quad (9)$$

O Teorema 3.1, implica que quando $\tilde{u}$ é uma entrada livre de perturbação do tipo ruído branco de media zero, pode ser estimada a matriz Γ_s a partir de $\begin{bmatrix} R_{42} & R_{43} \end{bmatrix}$.

3.2 $\tilde{u}_k$ não sendo Ruído Branco de Media Zero

Nesta consideração são usadas as matrizes bloco de Hankel $U_{1,s,N}$ e $Y_{1,s,N}$ como variáveis instrumentais (IV) com o fim de remover o ruído. Pós-multiplicando por $\begin{bmatrix} U_{1,s,N} \\ Y_{1,s,N} \end{bmatrix}$ tem-se

$$Y_{j,s,N} \begin{bmatrix} U_{1,s,N} \\ Y_{1,s,N} \end{bmatrix} = \Gamma_s X_{j,N} \begin{bmatrix} U_{1,s,N} \\ Y_{1,s,N} \end{bmatrix} + H_s U_{j,s,N} \begin{bmatrix} U_{1,s,N} \\ Y_{1,s,N} \end{bmatrix} \quad (10)$$

para $N \rightarrow \infty$. Então baseados em (10) é apresentado o seguinte teorema

Teorema 3.2. *Dado o conjunto de saída-entrada u_k, y_k , e supondo que $\tilde{u}_k$ não é uma sequência de ruído branco de media zero, a fatoração QR é dada por:*

$$\begin{bmatrix} U_{s+1,s,N} U_{1,s,N}^T & U_{s+1,s,N} Y_{1,s,N}^T \\ Y_{s+1,s,N} U_{1,s,N}^T & Y_{s+1,s,N} Y_{1,s,N}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{bmatrix} \quad (11)$$

então

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{N}} R_{22} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \Gamma_s X_{s+1,N} \begin{bmatrix} U_{1,s,N}^T & Y_{1,s,N}^T \end{bmatrix} Q_2^T \quad (12)$$

tendo Γ_s podem ser calculadas as matrizes (A, C) de acordo com o método MOESP ordinario em [7]. O segundo paso é tratado na seguinte seção.

4 Estimação das Matrizes B e D

Calculando-se os valores singulares de R_{22} é possível obter a matriz de observabilidade estendida Γ_s e consequentemente a dimensão n , da seguinte forma:

$$R_{22} = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} = U_1 \Sigma_1 V_1^T \quad (13)$$

Calcula-se a matriz de observabilidade estendida como $\Gamma_s = U_1 \Sigma_1^{1/2}$ e $n = \dim(\Sigma_1)$. Fazendo $U_2^T R_{22} = 0$ e $U_2^T \Gamma_s = 0$ pré multiplicando $\Gamma_s X_0 + H_s R_{11} Q_1^T = R_{21} Q_1^T + R_{22} Q_2^T$ por $U_2^T \in R^{(sp-n) \times sp}$, temos:

$$U_2^T H_s R_{11} Q_1^T = U_2^T R_{21} Q_1^T \quad (14)$$

e pós multiplicando por Q_1 tem-se

$$U_2^T \begin{bmatrix} D & \dots & 0 \\ CB & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{s-2}B & \dots & D \end{bmatrix} = U_2^T R_{21} R_{11}^{-1} \quad (15)$$

Definindo $U_2^T := [\mathcal{L}_1 \quad \mathcal{L}_2 \quad \dots \quad \mathcal{L}_s]$, $U_2^T R_{21} R_{11}^{-1} := [\mathcal{M}_1 \quad \mathcal{M}_2 \quad \dots \quad \mathcal{M}_s]$, e $\tilde{\mathcal{L}}_i = [\mathcal{L}_1 \quad \dots \quad \mathcal{L}_i] \in R^{(sp-n) \times (s+1-i)}$, $i = 2, \dots, s$ temos a seguinte equação superdeterminada:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_1 & \tilde{\mathcal{L}}_2 \Gamma_{s-1} \\ \vdots & \vdots \\ \mathcal{L}_{s-1} & \tilde{\mathcal{L}}_s \Gamma_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{M}_{s-1} \end{bmatrix} \quad (16)$$

onde o bloco de coeficientes da matriz da equação (16) no primeiro membro tem dimensão $s(sp - n) \times (p + n)$.

5 Conclusões

Este trabalho apresenta a representação conjunta controle-saída do sistema em malha fechada EIV, fazendo uso da transformada fracionária linear, o que permite uma representação geral e o tratamento de sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas. Também apresenta brevemente uma revisão do método MOESP-EIV, e deixa uma estrutura de modelo em malha fechada que permite em futuros trabalhos a aplicação de outros métodos de identificação determinística; também permite em futuros trabalhos a inclusão da parte estocástica do sistema que em este trabalho não é incluída.

Referências

- [1] T. Söderström, L. Wang, R. Pintelon, and J. Schoukens, “Can errors-in-variables systems be identified from closed-loop experiments?” *Automatica*, vol. 49, no. 2, pp. 681 – 684, 2013.
- [2] C. CHOU and M. VERHAEGEN, “Subspace algorithms for the identification of multivariable dynamic errors-in-variables models,” *Automatica*, vol. 33, no. 10, pp. 1857 – 1869, 1997.
- [3] J. A. Puerto Acosta and C. P. Bottura, “Identificação por subespaços de sistemas mimo com erros em variáveis.” *DINCON*, Agosto 2017-Submetido.
- [4] T. Söderström, “Errors-in-variables methods in system identification,” *Automatica*, vol. 43, no. 6, pp. 939 – 958, 2007.
- [5] J. Wang, Y. Guo, and Juanjuan, *Closed-Loop Subspace Identification Algorithm of EIV Model Based on Orthogonal Decomposition and PCA*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2012, pp. 55–65.
- [6] M. Verhaegen and V. Verdult, *Filtering and System Identification*. Cambridge University Press, 2007, cambridge Books Online.
- [7] M. Verhaegen and P. Dewilde, “Subspace model identification. part i: the output-error state space model identification class of algorithms.” *Journal of control*, vol. 56, no. 1, pp. 1187–1210, 1992.
- [8] J. Doyle, A. Packard, and K. Zhou, “Review of lfts, lmis, and mu;,” in *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control, 1991.*, Dec 1991, pp. 1227–1232 vol.2.
- [9] S. Skogestad and I. Postlethwaite, *Multivariable feedback control: analysis and design*. Wiley New York, 2007, vol. 2.