



Propriedades de difusão e transporte para um sistema sofrendo impactos com uma plataforma vibrante

André Luís Prando Livorati¹

Departamento de Física, IGCE - UNESP, Rio Claro, SP.

Resumo

Estudamos propriedades de difusão e transporte anômalos para um sistema que sofre impactos elásticos com uma plataforma vibrante. A dinâmica do sistema apresenta espaço de fases do tipo misto, com curvas invariantes ilhas KAM e mares de caos. Através de análises numéricas e de propriedades estatísticas e de leis de escala, conseguimos descrever um cenário robusto sobre difusão e transporte anômalos para o sistemas de impacto.

Palavras-chave. Transporte, Difusão, Stickiness, Caos.

1 Introdução

Nas últimas décadas, a investigação de propriedades estatísticas de transporte em sistemas Hamiltonianos tem se tornado uma área muito estudada [1, 2]. Esses sistemas apresentam dinâmica do tipo mista no espaço de fases, com ilhas KAM, toros invariantes, curvas spanning e mares de caos. Uma consequência de propriedades mistas no espaço de fases é o transporte anômalo que uma órbita caótica pode vir a sofrer, quando passar perto de uma ilha de estabilidade. A órbita pode literalmente “grudar” ao redor de suas fronteiras, ficando presa por um tempo finito na região, no que é conhecido na literatura como fenômeno de stickiness [5].

Uma observável natural que permite o estudo de propriedades estatísticas de transporte é, em particular $\rho(n)$, definida como a probabilidade (dada uma certa distribuição de condições iniciais) de uma órbita que não escape por um buraco ou barreira, até um tempo n . Aqui, o buraco ou barreira são pré-definidos como uma região acessível para a dinâmica no espaço de fases. Um dos aspectos mais importantes dessa análise, é que a taxa de escape é muito sensível ao tipo de dinâmica do sistema. Para sistemas altamente caóticos, o decaimento é tipicamente exponencial [4], enquanto que para sistemas que apresentam espaço de fases misto, o decaimento pode ser mais lento, apresentando um comportamento misto de exponencial com lei de potência [3].

¹livorati@rc.unesp.br, andreliworati@gmail.com

O sistema em estudo é o modelo Fermi-Ulam (FUM), no qual a dinâmica consiste de uma partícula sofrendo colisões elásticas entre duas paredes rígidas, onde uma delas é fixa e a outra se move no tempo. Esse sistema possui espaço de fases do tipo misto, onde a região acessível para uma órbita caótica se difundir é limitada por uma curva invariante. Desta maneira, uma órbita caótica possui uma região finita para se difundir. Dependendo da velocidade inicial, o tempo para a dinâmica atingir a saturação pode ser longo devido a influência de stickiness. Uma análise de transporte mostra como órbitas que se localizam em altas energia preferem ficar perto da região da curva invariante por longos tempos. Os decaimentos de $\rho(n)$ são tipicamente exponenciais, e se mostraram ser invariante de escala.

2 Mapeamento e propriedades caóticas

A dinâmica do sistema é descrita por um mapeamento não-linear bidimensional para as variáveis velocidade v e tempo t , imediatamente após a n -ésima colisão da partícula com a parede móvel. O instante de tempo exato de cada colisão é obtido através da resolução de equações transcendentais, uma vez que consideramos a dinâmica completa do modelo.

Para a obtenção do mapeamento, supomos que as condições iniciais são v_0 e $t_0 = 0$, além da posição da partícula pertencer a parede móvel, como $\varepsilon \cos(wt_0)$, onde ε e w são respectivamente a amplitude e a frequência de oscilação da parede móvel. Existem três parâmetros de controle no sistema, ε , ℓ e w . É conveniente definir variáveis adimensionais e assim definir alguns novos parâmetros, como: $V_n = v_n/w\ell$, $\epsilon = \varepsilon/\ell$, além de medir o tempo em função do número de oscilações da parede móvel como $\phi_n = wt_n$. Assim, começando com uma condição inicial (V_n, ϕ_n) , onde a posição inicial da partícula é $x_p(\phi_n) = \epsilon \cos(\phi_n)$, a dinâmica é evoluída por um mapa T que nos dá o par (V_{n+1}, ϕ_{n+1}) na $(n+1)$ -ésima colisão com a parede móvel (para mais detalhes do mapeamento veja Ref. [4]). Levando isso em consideração, obtemos:

$$T : \begin{cases} V_{n+1} = V_n^* - 2\epsilon \sin(\phi_{n+1}) \\ \phi_{n+1} = [\phi_n + \Delta T_n] \mod(2\pi) \end{cases} , \quad (1)$$

onde as expressões de V_n^* e ΔT_n dependem do tipo de colisão que ocorre.

A Figura 1 mostra o espaço de fases para três valores diferentes do parâmetro ϵ , para 50 distintas condições iniciais. Pode-se ver basicamente que o espaço de fases apresenta a mesma estrutura mista para todos os valores de ϵ . Eles possuem um mar de caos na região de baixa energia (velocidade), e cadeias de ilhas KAM aparecem conforme a velocidade aumenta. Ainda, a quantidade de ilhas também aumenta conforme ϵ diminui. O limite de crescimento do mar de caos é dado pela primeira curva invariante do tipo *spanning* (FISC). A posição da FISC varia com ϵ e pode ser aproximada como

$$V_{FISC} = 2\sqrt{\frac{\epsilon}{K_c}} \approx 2\sqrt{\epsilon} , \quad (2)$$

onde ϵ é o parâmetro de controle, e K_c é o parâmetro crítico do mapa Stardard.

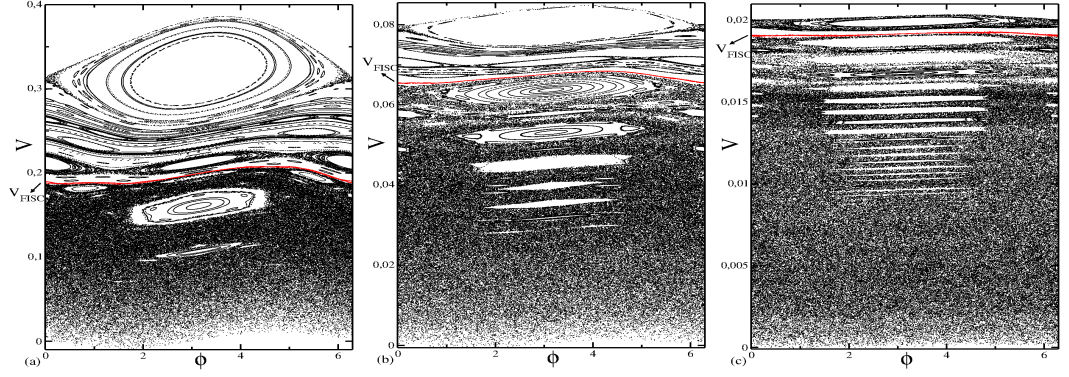


Figura 1: *Espaço de fases para versão completa do modelo FUM. Em (a) $\epsilon = 0.01$, em (b) $\epsilon = 0.001$ e em (c) $\epsilon = 0.0001$.*

3 Análise estatística e propriedades de transporte

Nesta subseção faremos uma análise estatística para a dinâmica do modelo FUM. Considerando propriedades da velocidade média quadrática, podemos “prever” o comportamento da dinâmica e comparar com os resultados numéricos.

3.1 Velocidade quadrática média V_{RMS}

Começaremos com a evolução numérica do comportamento da velocidade média quadrática, que é dada como $V_{RMS} = \sqrt{\overline{V^2}}$, onde

$$\overline{V^2} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n V_{i,j}^2, \quad (3)$$

onde M é o ensemble de condições iniciais, e n é o número de colisões (iterações). A média é tomada ao longo da evolução da órbita e ao longo do ensemble de condições iniciais. Ainda, as condições iniciais foram todas escolhidas no mar de caos, uniformemente distribuídas ao longo da fase $\phi \in [0, 2\pi)$.

A Figura 2 mostra as curvas de V_{RMS} considerando 2000 condições iniciais para os ensembles de alta e baixa energias, iteradas até 10^9 colisões. Podemos perceber que para ambos os ensembles, para o mesmo parâmetro de controle ϵ , as curvas de V_{RMS} tendem a um regime de saturação para $n \rightarrow \infty$, nomeado V_{SS} (velocidade de estado estacionário). É importante mencionar também, que os valores de V_{SS} são aproximadamente metade do domínio da porção finita do espaço de fases. Essa porção finita é delimitada pela FISC e por $-\epsilon$, e como $FISC \gg \epsilon$, definimos V_{SS} como

$$V_{SS} = \frac{V_{FISC}}{2} = \sqrt{\frac{\epsilon}{K_c}} \approx \sqrt{\epsilon}, \quad (4)$$

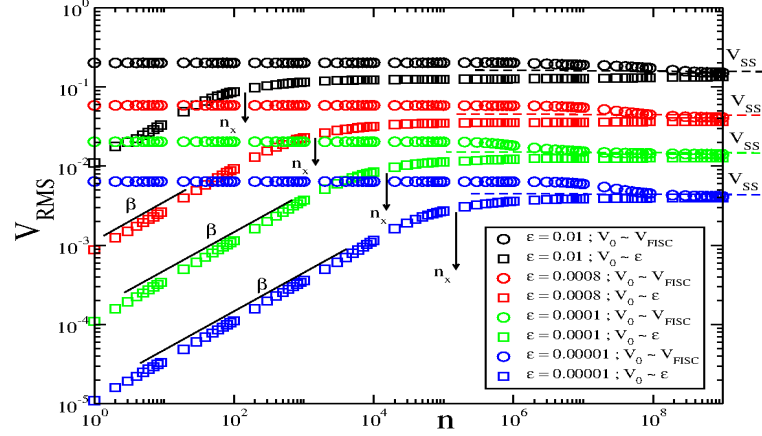


Figura 2: *Curvas de V_{RMS} para diferentes valores de ϵ .*

Fazendo uma análise analítica para as propriedades estatísticas para a velocidade, tomamos a expressão de recorrência da velocidade do mapa dado na Eq.(1), elevamos ambos os lados ao quadrado, e fazendo uma média, obtemos: $\overline{(V_{n+1})^2} = \overline{(V_n)^2} - 4\overline{V_n \epsilon \sin(\phi_{n+1})} + 4\overline{\epsilon^2 \sin^2(\phi_{n+1})}$. Definindo $(\Delta V)^2 = \overline{(V_{n+1})^2} - \overline{(V_n)^2}$, e considerando a média na fase no intervalo $\in [0, 2\pi]$, encontramos

$$(\Delta V)^2 = 2\epsilon^2. \quad (5)$$

Considerando o intervalo entre colisões e a expressão de $(\Delta V)^2$, podemos fazer uma aproximação para uma derivada [4], onde $\frac{\overline{(V_{n+1})^2} - \overline{(V_n)^2}}{(n+1) - n} \approx \frac{\partial \overline{V^2}}{\partial n}$. Aqui, o intervalo $(n+1) - n$ é o menor possível na dinâmica, uma vez que estamos evoluindo as iteração em função do número de colisões, e não em função do tempo. Integrando ambos os lados, temos $\overline{(V_n)^2} = (V_0)^2 + 2\epsilon^2 n$ [4]. Portanto

$$V_{RMS} = \sqrt{(V_0)^2 + 2\epsilon^2 n}. \quad (6)$$

Com a expressão acima podemos “prever” o comportamento das curvas de V_{RMS} curves, como mostrado na Fig.2. Basicamente, as curvas do ensemble de baixas energias apresentam um regime de crescimento para tempos curtos, dado por uma lei de potência $\sqrt{n}$, passando por um crossover (n_x), e finalmente atingindo um regime de saturação (V_{SS}) para tempos longos. Ao compararmos esse comportamento com a expressão dada na Eq.(6), temos dentro do argumento da raiz quadrada $2\epsilon^2 n \gg \epsilon^2$, conforme o número de colisões evolui. Isso explica o porque do regime de crescimento em lei de potência para tempos curtos.

Para as curvas do ensemble de altas energias, podemos observar um leve decaimento linear (quase um platô constante) para tempos curtos, e depois um decaimento para tempos longos, seguindo pelo platô de estado estacionário em V_{SS} . Comparando esse comportamento com a expressão da Eq.(6), com $V_0 \approx V_{FISC}$, temos dentro do argumento da raiz

quadrada $4\epsilon \gg 2\epsilon^2 n$ para tempos curtos. Isso explica o platô inicial quase constante, com leve decaimento linear.

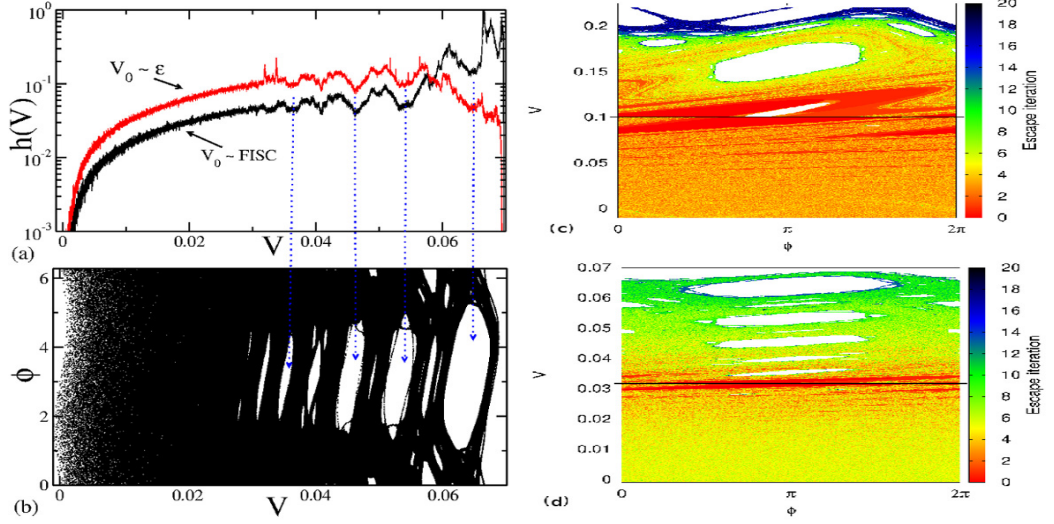


Figura 3: (a) Histograma de distribuição de velocidades $h(V)$ para $\epsilon = 0.001$; (b) comparação das ilhas de estabilidade com o histograma de $h(V)$; (c,d) evolução das condições iniciais até atingir o platô de saturação, $V = V_{SS}$.

3.2 Transporte e Probabilidade de Sobrevivência

Inicialmente construímos um histograma de frequências para a velocidade, dito $h(V)$ para ambos os ensembles, como mostra a Fig.3(a). Consideramos 10000 diferentes condições iniciais, evoluídas até 10^6 colisões, para um valor de $\epsilon = 0.001$. Analisando a Fig.3(a) podemos ver que para ambos os ensembles, as órbitas tem acesso a todo o espaço de fases, porém com algumas particularidades. Para o ensemble de baixa energia, as órbitas “preferem” ficar na região de velocidade intermediária (perto de V_{SS}). Já para as altas energias, as órbitas “preferem” regiões de velocidade alta, principalmente por causa da influência de stickiness. Uma comparação entre as Figs.3(a,b) mostra que os vales da distribuição estão relacionados com a posição das ilhas de estabilidade no espaço de fases, indicadas pelas setas.

A investigação das propriedades de transporte foi feita por meios de bacia de escape. Uma vez que sabemos que as órbitas tendem ao regime estacionário para tempos longos em V_{SS} , colocamos um “buraco” nessa região e contamos o número de colisões necessárias para uma órbita atingir essa região. Quando isso ocorre, marcamos em um vetor quantas colisões ocorreram e paramos a dinâmica, e começamos a simulação novamente com uma nova condição inicial. Criamos uma grade de 1000×1000 condições iniciais igualmente distribuídas no espaço de fases acessível, i.e., $\phi_0 \in [0, 2\pi]$ e $V_0 \in [-\epsilon, V_{FISC}]$. Desta forma

cada condição inicial foi evoluída até 10^8 iterações, ou até atingir o valor de V_{SS}

Podemos ver na Fig.3(c,d), para $\epsilon = 0.01$ e $\epsilon = 0.001$ respectivamente, que as condições iniciais próximas à V_{SS} escapam rapidamente para ambos os ensembles. Olhando particularmente para o ensemble de baixa energia na Fig.3(c), vemos que em médias todas as condições iniciais escapam por volta de 200 colisões, o que está de acordo com o crossover (n_x) mostrada na Fig.2. Para o ensemble de alta energia, temos dois comportamentos a serem destacados. O primeiro consiste de um caminho preferencial em vermelho, que é muito similar ao comportamento das variedades do modelo FUM. O outro é o efeito de stickiness, especialmente nas ilhas próximas a FISC, onde a escala de cor chega a marcar $\exp(18)$, ou por volta de 6.4×10^7 colisões até o escape, indicando um atraso considerável na dinâmica, e também corroborando para o longo platô observado nas curvas de V_{RMS} na Fig.2.

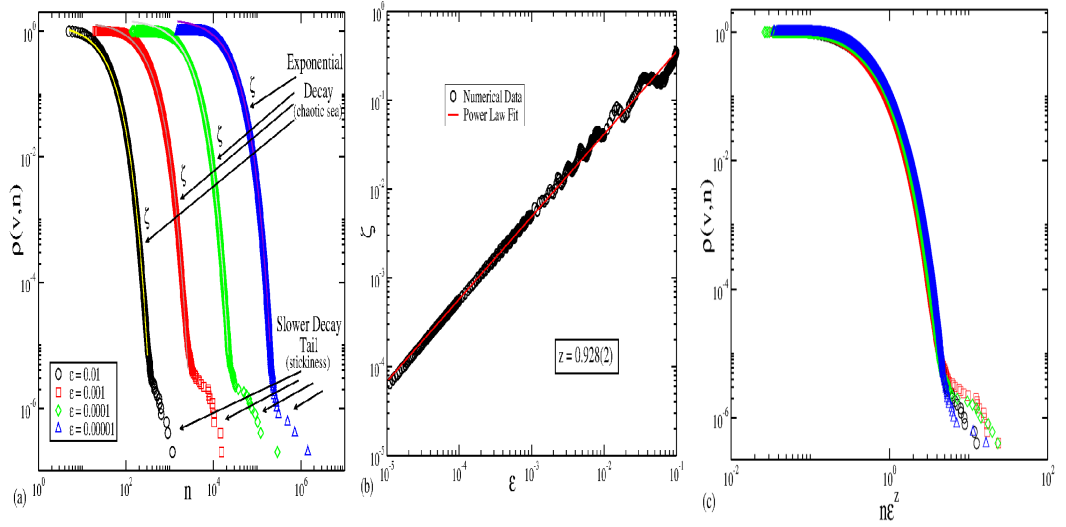


Figura 4: (a) Curvas de $\rho(v, n)$ para alguns valores de ϵ ; (b) comportamento de $\zeta \times \epsilon$, e em (c) invariância de escala das curvas de $\rho(v, n)$.

Uma vez que sabemos que a dinâmica ira convergir para um estado estacionário V_{SS} para tempos longos, introduzimos então um buraco no espaço de fases acessível, definido como $V_{hole} = V_{SS} = \sqrt{\epsilon}$. A probabilidade de sobrevivência, descrita em termos do formalismo de escape [1] é obtida da integração da seguinte expressão abaixo

$$\rho(v, n) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N N_{rec}(j) , \quad (7)$$

onde a somatória é tomada ao longo do ensemble de $N = 5 \times 10^6$ condições iniciais escolhidas ao longo do mar de caos para ambos os ensembles, e v é a velocidade de escape, ou posição do buraco no espaço de fases no eixo das velocidades. O termo $N_{rec}(j)$

representam o número de condições iniciais que não escaparam pelo buraco até a j -ésima colisão [2].

Basicamente os tipos de decaimentos podem ser equacionados da seguinte forma:

$$\rho(v, n) = A \exp(-\zeta n) , \quad (8)$$

onde A é uma constante não negativa e ζ é a taxa de decaimento.

$$\rho(v, n) = B n^{-\gamma} , \quad (9)$$

onde B também é uma constante não negativa e γ é a taxa de decaimento em lei de potência, que, de acordo com a literatura [1], é encontrada na faixa entre $\gamma \in [1, 3]$.

A Fig.4(a), mostra curvas de $\rho(v, n)$ para alguns valores de ϵ , onde a velocidade de escape é $H_d = V_{SS}$. Para tempos curtos e médios, um ajuste exponencial conforme Eq.(7) é o que melhor descreve o comportamento de $\rho(v, n)$, onde obtemos a taxa de decaimento ζ . Na Fig.4(b), mostramos o comportamento de ζ em função de ϵ . O melhor ajuste para a Fig.4(b) é do tipo $\zeta = C_1 \epsilon^z$, onde $C_1 = 2.9838(1)$ e $z = 0.928(2)$. Fazendo um reajuste no eixo horizontal conforme $n \rightarrow n \epsilon^z$ mostramos na Fig.4(c) a invariância de escala das curvas de $\rho(v, n)$ e seu colapso universal com relação ao expoente z .

4 Considerações Finais

Analizamos a dinâmica do modelo FUM que possui espaço de fases do tipo misto. Considerando propriedades estatísticas para as curvas de velocidade quadrática média em diferentes regimes de energia inicial. Constatamos que o fenômeno de stickiness causa transporte e difusão anômalos no sistema, gerando assim atrasos na dinâmica até atingir o estado estacionário.

Referências

- [1] E. G. Altmann, J. S. E. Portela, e T. Tél, “*Leaking Chaotic Systems*”, Rev. Mod. Phys., **85**, 869, (2013).
- [2] P. Gaspard, “*Chaos, Scattering and Statistical Mechanics*”, Cambridge: Cambridge University Press, (1998).
- [3] A. L. P. Livorati, T. Kroetz, C. P. Dettmann, I. L. Caldas, e E. D. Leonel, “*Stickiness in a bouncer model: A slowing mechanism for Fermi acceleration*”, Phys. Rev. E, **86**, 036203, (2012).
- [4] A. L. P. Livorati, C. P. Dettmann, I. L. Caldas, e E. D. Leonel, “*On the statistical and transport properties of a non-dissipative Fermi-Ulam model*”, Chaos, **25**, 103107, (2015).
- [5] G. M. Zaslavsky, *Physics of Chaos in Hamiltonian Systems*, Imperial College Press, New York (2007).