



DINCON 2017

CONFERÊNCIA BRASILEIRA DE DINÂMICA, CONTROLE E APLICAÇÕES

30 de outubro a 01 de novembro de 2017 – São José do Rio Preto/SP

Estudo das Transferências Ótimas a Baixo Empuxo Entre Órbitas Coplanares em Variáveis Não-Singulares

Francisco das Chagas Carvalho¹

Departamento de Matemática, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, SP

Sandro da Silva Fernandes²

Departamento de Matemática, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, SP

João Victor Bateli Romão³

Departamento de Matemática, Instituto de Ciência e Tecnologia, UNIFESP, São José dos Campos, SP

Resumo. Neste trabalho é apresentado um estudo para o problema de otimização de transferências entre órbitas coplanares, realizadas por sistemas propulsivos a baixo empuxo e potência limitada (PL) em campo gravitacional central. Após a aplicação do Princípio de Máximo de Pontryagin e determinação da Hamiltoniana máxima, os termos periódicos são eliminados através do conceito de média. Variáveis não singulares são introduzidas como novas variáveis de estado a fim de eliminar a singularidade para órbitas circulares. O problema de valor de contorno descrito pela Hamiltoniana média é resolvido através do método das trajetórias extremas vizinhas.

Palavras-chave. Baixo empuxo, potência limitada, princípio de Máximo de Pontryagin

1 Introdução

O estudo apresentado neste trabalho é motivado pelo uso de sistemas propulsivos de baixo empuxo em novas missões espaciais. As duas missões pioneiras foram NASA-JPL Deep Space 1 e ESA-SMART1. A Deep Space 1 foi a primeira nave espacial interplanetária a utilizar a propulsão elétrica solar. Foi lançada em 24 de outubro de 1998, e sua missão terminou em 18 de dezembro de 2001, quando o seu abastecimento de combustível esgotou. A SMART-1 foi desenvolvida pela Agência Espacial Europeia (ESA). Foi lançada em 27 de setembro de 2003, e sua missão terminou em 3 de setembro de 2006, quando a nave espacial, em uma manobra planejada, impactou a superfície lunar. Detalhes sobre essas missões podem ser encontrados em [1]; [8]; [9].

¹fchagas.carvalho@gmail.com

²sandro@ita.br

³bateli.romao@unifesp.br

Sistemas propulsivos elétricos de baixo empuxo são caracterizados por alto impulso específico (o propulsor funciona por horas ou dias) e os maiores ganhos com tais sistemas ocorrem em missões interplanetárias de alta energia — problemas de *rendez-vous* envolvendo o cinturão de asteroides, problemas de *rendez-vous* com cometas, missões “*fly-by*” por Plutão, etc — e em missões geocêntricas envolvendo sistemas de comunicação e satélites GPS. Resultados analíticos e numéricos têm sido estabelecidos desde os anos 60 para diversos tipos de manobras envolvendo configurações específicas das órbita inicial e final, ou, perfis de empuxo pré-especificados. Em alguns trabalhos anteriores, os autores desenvolveram teorias analíticas para os problemas de transferência entre órbitas coplanares elípticas quaisquer [2] ou de pequenas excentricidades [3].

Em [3], foi observado que a teoria analítica de primeira ordem na excentricidade não descreve de forma adequada a trajetória ótima, em particular, o comportamento da excentricidade, para manobras de grandes amplitudes na razão de semi-eixo maior das órbitas inicial e final. Por outro lado, a teoria para órbitas elípticas quaisquer não se aplica para transferências entre órbitas quasi-circulares. Desta forma, o objetivo deste trabalho é apresentar um estudo analítico-numérico do problema de transferências entre órbitas coplanares que elimine os inconvenientes observados nos trabalhos anteriores. O problema de otimização é formulado, inicialmente, como um problema de Mayer da teoria de controle ótimo com as variáveis de estado descritas pelos vetores posição e velocidade e por uma variável associada ao consumo de combustível. Após a aplicação do Princípio de Máximo de Pontryagin [7], um conjunto clássico de elementos orbitais - semieixo maior, excentricidade, argumento do periapsis e anomalia média - é introduzido e os termos periódicos da Hamiltoniana máxima são eliminados através do conceito de Hamiltoniana média.

A Hamiltoniana resultante do processo de média que descreve as trajetórias ótimas para as manobras de longa duração, é singular para órbitas circulares. Introduzindo um conjunto adequado de elementos orbitais não-singulares obtém-se uma nova Hamiltoniana que descreve as trajetórias ótimas para quaisquer configurações de órbitas terminais. O problema de valor de contorno descrito pela Hamiltoniana média e que consiste na passagem do veículo espacial de uma órbita inicial para uma órbita final, é resolvido através do método das trajetórias extremas vizinhas. Resultados numéricos são apresentados para manobras entre órbitas de quaisquer excentricidades.

2 A Hamiltoniana máxima

Conforme descrito em [2], o problema de otimização de transferências a baixo empuxo e potência limitada entre órbitas coplanares em campo gravitacional central Newtoniano é formulado como um problema de Mayer da Teoria de Controle Ótimo com os vetores posição $\mathbf{r}$ e velocidade $\mathbf{v}$ como variáveis de estado. O consumo de combustível é descrito pela variável J definida por [6]

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \Gamma^2 dt \quad (1)$$

onde Γ denota a magnitude do vetor aceleração $\mathbf{\Gamma}$ tomado como variável de controle. O vetor de estado é definido por $(\mathbf{r}, \mathbf{v}, J)$.

Após a aplicação das condições necessárias expressas pelo Princípio de Máximo de Pontryagin [7], obtém-se que a Hamiltoniana máxima que descreve as trajetórias extremas é expressa por

$$H^* = \mathbf{p}_r \cdot \mathbf{v} - \mathbf{p}_v \cdot \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \frac{1}{2} p_v^2 \quad (2)$$

onde $\mathbf{p}_r$ e $\mathbf{p}_v$ são os vetores adjuntos a $\mathbf{r}$ e $\mathbf{v}$, respectivamente, e, μ é o parâmetro gravitacional.

Introduzindo-se o conjunto de elementos orbitais clássicos - semieixo maior a , excentricidade e , argumento do periapsis ω e anomalia média M - e aplicando-se o conceito de Hamiltoniana média obtém-se:

$$\bar{H}^* = \frac{a}{2\mu} \left\{ 4a^2 p_a^2 + \frac{5}{2} (1 - e^2) p_e^2 + \frac{(5 - 4e^2)}{2e^2} p_\omega^2 \right\} \quad (3)$$

onde p_a , p_e e p_ω são as variáveis adjuntas a a , e , ω , respectivamente. É importante notar que $\bar{H}^*$ descreve as manobras de longa duração e que se torna singular para órbitas circulares.

Considere a transformação canônica - Mathieu - [5] definida por:

$$\begin{aligned} a' &= a & h &= e \cos \omega & k &= e \sin \omega \\ p_{a'} &= p_a & p_h &= p_e \cos \omega - \frac{p_\omega}{e} \sin \omega & p_k &= p_e \sin \omega + \frac{p_\omega}{e} \cos \omega \end{aligned} \quad (4)$$

Desde que $\bar{H}^*$ é invariante sob esta transformação obtém-se das Eqs (3) e (4),

$$\bar{H}^* = \frac{a}{2\mu} \left\{ 4a^2 p_a^2 + \frac{5}{2} \left[p_h^2 + p_k^2 - (hp_h + kp_k)^2 \right] - 2(kp_h - hp_k)^2 \right\}. \quad (5)$$

Esta nova função Hamiltoniana média não contém singularidades e descreve as transferências de longa duração entre órbitas coplanares quaisquer.

3 Resolução do Problema de Contorno

O problema de valor de contorno que consiste em transferir o veículo de uma órbita inicial O_0 para uma órbita final O_f é descrito pelo sistema canônico de equações diferenciais

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \bar{H}^*}{\partial p} \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial \bar{H}^*}{\partial x} \quad (6)$$

onde $x = [a \quad h \quad k]^T$ e $p = [p_a \quad p_h \quad p_k]^T$, com condições iniciais e finais definidas por

$$a(0) = a_0, \quad a(t_f) = a_f, \quad h(0) = h_0, \quad h(t_f) = h_f, \quad k(0) = k_0, \quad k(t_f) = k_f \quad (7)$$

A solução deste TPBVP tem sido obtida através do método das trajetórias extremas vizinhas [4]. Após a resolução deste problema, a variável de consumo é calculada por simples integração sendo expressa por $J = \bar{H}^* t$, pois $\bar{H}^*$ é uma integral primeira do sistema (6).

A fim de descrever a trajetória ótima utilizam-se as equações para a distância radial e a anomalia verdadeira bem conhecidas do problema de dois-corpos com os elementos osculadores calculados a partir das variáveis não-singulares. A latitude média l é obtida por integração numérica da equação diferencial

$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} + \frac{7}{4} \frac{a}{\mu} (kp_h - hp_k). \quad (8)$$

4 Resultados

Nesta seção é apresentado um estudo numérico para o problema de otimização de transferências entre órbitas coplanares, realizadas por sistemas propulsivos a baixo empuxo e potência limitada em um campo gravitacional central. Nesta análise consideram-se algumas transferências com razões de semi-eixo maior entre a órbita inicial e final, ($\rho = \frac{r_f}{r_0}$), correspondentes a $\rho = 0.7270$, 2.0000 e 2.5000, respectivamente, como apresentados na Tabela 1. Nota-se que $\rho = 0.7270$ corresponde a uma missão Terra-Vênus, $\rho = 2.5000$ corresponde a uma missão Terra-Cinturão de asteróides, e, $\rho = 2.0000$ a uma missão arbitrária. É importante notar que as missões consideradas envolvem transferências entre órbitas de pequenas excentricidades e transferências entre órbitas de excentricidades quaisquer.

Os resultados numéricos são obtidos através da resolução do problema de valor de contorno em dois pontos pelo método das trajetórias extremas vizinhas [4]. Os valores da variável de consumo J são apresentados na Tabela 2, considerando alguns valores para os tempos de voo $t_f - t_0$. Os resultados são expressos em unidades canônicas. Os valores de tempo de voo correspondem a transferências com duração moderada ou longa (para transferências de satélites artificiais, estes valores correspondem a alguns dias, e, para sondas interplanetárias correspondem a 4-30 anos). As trajetórias ótimas com amplitudes $\rho = 0.7270$ e tempos de voo $t_f - t_0 = 25$ e 75 unidades de tempo estão apresentadas nas Figs. 1a e 1b, as transferências com amplitude $\rho = 2.0000$ e tempos de voo $t_f - t_0 = 50$ e 75 unidades de tempo estão representadas nas Figs. 2a e 2b, e, finalmente, as transferências com amplitude $\rho = 2.5000$ e tempos de voo $t_f - t_0 = 50$ e 75 unidades de tempo encontram-se representadas nas Figs. 3a e 3b.

Dos resultados apresentados na Tabela 2, verifica-se que o consumo decresce com a duração da manobra. Por outro lado, as trajetórias representadas nas Figs. 1 a 3 ilustram o comportamento em espiral que caracteriza as manobras de longa duração realizadas pelos sistemas propulsivos a baixo empuxo.

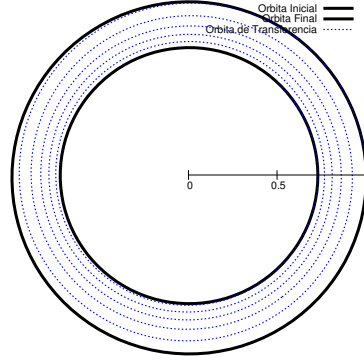
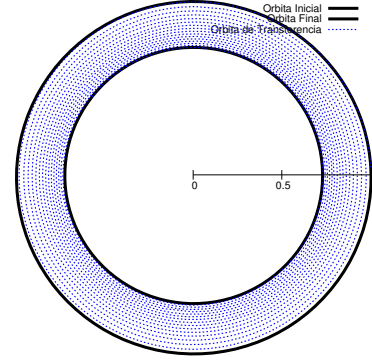
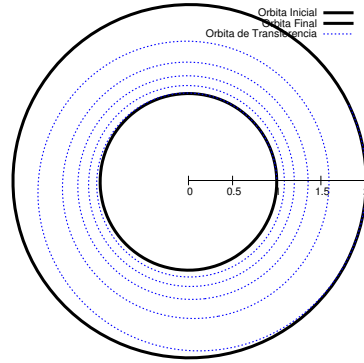
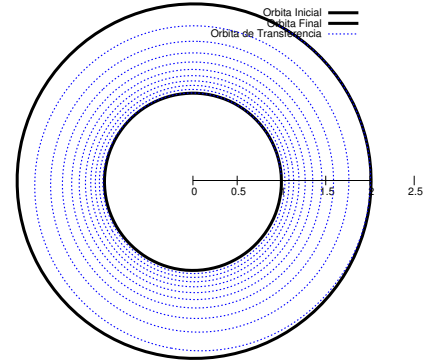
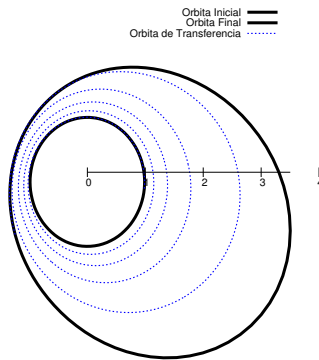
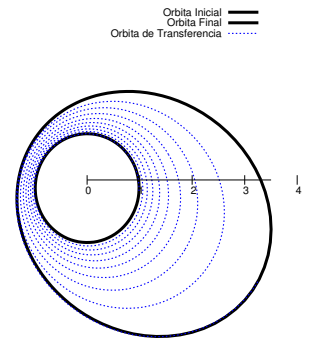
(a) Trajetória com tempo de voo de 25 ut (b) Trajetória com tempo de voo de 75 ut Figura 1: Trajetória para $\rho = 0.7270$.(a) Trajetória com tempo de voo de 50 ut (b) Trajetória com tempo de voo de 100 ut Figura 2: Trajetória para $\rho = 2$.(a) Trajetória com tempo de voo de 50 ut (b) Trajetória com tempo de voo de 100 ut Figura 3: Trajetória para $\rho = 2.5$.

Tabela 1: Parâmetros Orbitais para as condições de contorno

Transferência	Orbita	Parâmetros Orbitais		
		a	e	ω ($^\circ$)
1	O_0	1.000	0.0167	102.937
	O_f	0.727	0.0068	131.563
2	O_0	1.000	0.0150	90.000
	O_f	2.000	0.0075	150.000
3	O_0	1.000	0.1500	90.000
	O_f	2.500	0.5000	150.000

Os valores de consumos e o tempo de voo para as manobras analisadas são apresentados na Tabela 2.

Tabela 2: Consumo e duração da transferência

Transferência	$t_f - t_0$	Consumo J
1	25	5.9577×10^{-4}
	50	2.9820×10^{-4}
	75	1.9889×10^{-4}
	100	1.4923×10^{-4}
2	50	8.6627×10^{-4}
	75	5.7648×10^{-4}
	100	4.3067×10^{-4}
	125	3.4381×10^{-4}
3	50	1.8707×10^{-3}
	75	1.2391×10^{-3}
	100	9.5104×10^{-4}
	125	7.7245×10^{-4}

5 Conclusões

Um estudo numérica é apresentado para o problema de transferências entre órbitas coplanares realizadas por sistema propulsivos a baixo e potência limitada (sem rendez-vous) em um campo de força central Newtoniano. Para as manobras de longa duração, o problema de valor de contorno em dois pontos, descrito por uma função Hamiltoniana média expressa em variáveis não-singulares, que caracteriza o problema de transferir o veículo espacial de uma orbita inicial para uma órbita final é resolvido pelo método das trajetórias extremas vizinhas. Resultados numéricos são apresentados para monobras entre órbitas de pequenas excentricidades e para manobras entre órbitas elípticas com valores significativos de excentricidades e razão de semi-eixo maior.

Agradecimentos

Esta pesquisa foi apoiada pelo CNPq sob o contrato 304913 / 2013-8 e pela FAPESP sob contrato 2012 / 21023-6.

Referências

- [1] O. Camino, M. Alonso, R. Blake, D. Milligan, J. D. Bruin, S. Ricken, SMART-1: Europe's Lunar Mission Paving the Way for New Cost Effective Ground Operations (RCSGSO), Sixth International Symposium Reducing the Costs of Spacecraft Ground Systems and Operations (RCSGSO), (2005), European Space Agency ESA SP-601, Darmstadt, Germany.
- [2] S. da Silva Fernandes, F. das Chagas Carvalho, A first-order analytical theory for optimal low-thrust limited-power transfers between arbitrary elliptical coplanar orbits, Mathematical problems in engineering, (2008), Article ID 525930.
- [3] S. da Silva Fernandes, F. das Chagas Carvalho, R. V. de Moraes, Optimal low-thrust transfers between coplanar orbits with small eccentricities, Comp. Appl. Math., (2016), DOI: 10.1007/s40314-015-0249-9
- [4] S. da Silva Fernandes, F. das Chagas Carvalho, Analytical solution for optimal low-thrust limited-power transfers between non-coplanar coaxial orbits based on canonical transformation theory, Journal of Aerospace Technology and Management, (2017), accept for publication.
- [5] C. Lanczos, The variational principles of mechanics, 4th edition, University of Toronto Press, Toronto, (1970).
- [6] J. P. Marec, Optimal space trajectories, Studies in astronautics, Elsevier Scientific Publishing Company, New York, ISBN 0-444-41812-1, 329p (1979).
- [7] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, E. F. Mishchenko, The mathematical theory of optimal control processes, John Wiley and Sons, New York, 357 p (1962).
- [8] G. D. Racca, A. Marini, L. Stagnaro, J. van Dooren, L. di Napoli, B. H. Foing, R. Lumb, J. Volp, J. Brinkmann, R. Grünagel et al., SMART-1 mission description and developments status, Planetary and Space Science 50:1323-1336, (2002), DOI:10.1016/S0032-0633(02)00123-X.
- [9] M. D. Rayman, P. Varghese, D. H. Lehman, L. L. Livesay, Results from the Deep Space 1 technology validation mission. Acta Astronautica, (2000), 47(2-9):475-487.